

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

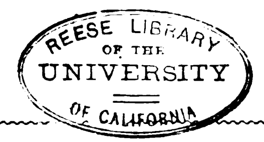
von

Dr. O. Schlömilch und Dr. B. Witzschel.



Dritter Jahrgang.

Mit 4 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.



LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1858.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Theoretische und praktische Geometrie.

Geschichte der Mathematik.

Mechanik.

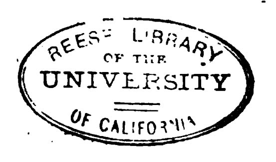
Akustik.

Optik.

Wärmelehre.

Elektricität und Galvanismus.

Vermischtes.



I.

Einige Bemerkungen über die Fusspunktslinien, insbesondere die der Kegelschnitte.

Von M. W. Drobisch,

ordentlichem Professor an der Universität zu Leipzig.

(Aus den Sitzungsberichten der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften. 1857.)

1.

Unter einer **Fusspunktslinie** ist, nach mehreren neuern Geometern, diejenige krumme oder gerade Linie zu verstehen, in welcher die Einfallspunkte aller Senkrechten liegen, die sich auf sämmtliche Berührende einer gegebenen ebenen Curve aus einem in ihrer Ebene gegebenen festen Punkte fällen lassen. Dieser Punkt heisse der **Pol**, die gegebene Curve die **Basis** der Fusspunktslinie. — Obwohl von diesen Linien bereits eine Menge merkwürdiger Eigenschaften bekannt ist *), so wird doch vielleicht das Nachfolgende theils hinsichtlich der Resultate, theils in der Art ihrer Ableitung einiges Neue enthalten.

Sei die Gleichung der Basis einer gesuchten Fusspunktslinie

$$1)\qquad F(\xi, \eta) = 0,$$

wo ξ, η rechtwinklige Coordinaten bedeuten, deren Anfang der gegebene Pol ist; seien ferner x, y die rechtwinkligen Coordinaten der Fusspunktslinie, in Bezug auf dieselben Coordinatenaxen wie ξ, η; so ist, da die Senkrechte aus dem Pol auf die Berührende der Basis parallel der Normale derselben in dem Berührungspunkte (ξ, η),

$$2)\qquad \frac{y}{x} = -\frac{\partial \xi}{\partial \eta}, \text{ oder } x\partial\xi + y\partial\eta = 0.$$

Der durch x und y bestimmte Fusspunkt dieser Senkrechten liegt aber offenbar zugleich auf dem Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser der aus dem Pol nach dem Berührungspunkt (ξ, η) gezogenen Radiusvector, und dessen Mittelpunkt also durch die Coordinaten $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$ bestimmt ist. Die Gleichung dieses Kreises ist daher

---

*) Man findet sie hauptsächlich in **Steiner's** reichhaltiger Abhandlung „von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven" (Crelle's Journal Bd. 21). Auch ist hierbei eine Abhandlung von **Raabe** im 48. Bande von Crelle's Journal anzuführen.

3) $$x^2 + y^2 = x\xi + y\eta.$$

Eliminirt man nun aus den vorstehenden drei Gleichungen nachdem $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ mittels (1) als Function von ξ und η ausgedrückt worden ist, oder, da aus (1) und (2) direct folgt

2*) $$x\frac{\partial F}{\partial \eta} = y\frac{\partial F}{\partial \xi},$$

aus den Gleichungen (1), (2*) und (3) ξ und η, so erhält man die Gleichung der Fusspunktslinie der Basis (1).

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende bemerkenswerthe Eigenschaften der Fusspunktslinien.

1) Da der Abstand des Mittelpunktes des erwähnten, nach Grösse und Lage veränderlichen Kreises vom Pole immer halb so gross ist als der mit ihm der Richtung nach zusammenfallende, aus dem Pole gezogene Radiusvector der Basis, so folgt unmittelbar, dass die durch diesen Mittelpunkt beschriebene Curve der Basis, in Bezug auf den Pol als äusseren Aehnlichkeitspunkt, ähnlich ist. Und da, wenn man in der Gleichuug (3) nur ξ und η als veränderlich betrachtet und dieselbe in Bezug auf diese Grössen differentiirt, sich die Gleichung (2) ergiebt, zwischen ξ und η aber die Relation (1) besteht, so erhellt, dass die Fusspunktslinie der Basis (1) die einhüllende Curve des Kreises ist, dessen Mittelpunkt die ebenbemerkte, der Basis ähnliche Curve beschreibt.

2) Hieraus folgt, dass jede Fusspunktslinie die Evolvente der Katakaustika ist, deren strahlender Punkt der Pol, und deren zurückwerfende Curve die vorgedachte, der Basis der Fusspunktslinie ähnliche Curve; denn die einhüllende Curve des Kreises, welche die Fusspunktslinie giebt, hat zugleich diese Bedeutung *).

3) Die Fusspunktslinie ist endlich auch diejenige Roulette, die entsteht, wenn auf der Curve, die der Mittelpunkt dieses Kreises beschreibt, (als Basis der Roulette) eine derselben congruente Curve dergestalt rollt, dass zu Anfange der Bewegung zwei homologe Punkte beider Curven zusammenfallen, und der mit der rollenden Curve fest verbundene beschreibende Punkt in Bezug auf diese dieselbe Lage hat, wie der gegebene Pol in Bezug auf die ruhende. Denn diese Roulette ist identisch mit der einhüllenden Curve, welche gleichbedeutend mit der Fusspunktslinie ist**).

---

*) Magnus, Sammlung geom. Aufgaben I, S. 475.

**) Magnus I, S. 609. Es bedurfte also nur dieser Bemerkung, dass die mehrerwähnte einhüllende Curve mit der Fusspunktslinie identisch ist, um obigen, wie es scheint, zuerst von Steiner (Crelle XXI, S. 132) aufgestellten und geometrisch erwiesenen Satz zu gewinnen.

2.

Sei die Basis der Fusspunktslinie durch eine Gleichung zwischen polaren Coordinaten

$$4)\qquad \Phi(\psi, \varrho) = 0$$

gegeben, in der ϱ den Vector aus dem gegebenen Pol, ψ die zugehörige Anomalie bedeutet, so ist, wenn r die aus dem Pol auf die Berührende der Basis gefällte Senkrechte, also den Vector der Fusspunktslinie, und φ den Winkel bezeichnet, um den r von der Axe abweicht, auf die sich ψ bezieht (also die Anomalie von r), offenbar

$$5)\qquad r = \varrho \cos(\psi - \varphi),$$

wo $\psi - \varphi$ positiv ist, wenn ϱ zugleich mit ψ wächst. Es ist dieser Winkel aber auch gleich demjenigen, um welchen die Normale des Punktes (ψ, ϱ) der Basis von dem Vector ϱ abweicht, daher

$$6)\qquad tg(\psi - \varphi) = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial \psi}.$$

Durch Elimination von $\psi - \varphi$ aus (5) und (6) erhält man die Gleichung

$$7)\qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial \psi}\right)^2,$$

welche sich aussprechen lässt: das Quadrat der Reciproken des Vectors der Fusspunktslinie ist gleich der Summe der Quadrate der Reciproken des Vectors der Basis und ihrer polaren Subtangente.

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (4), (5) oder (7) und (6) ψ und ϱ, so erhält man die Gleichung der Fusspunktslinie der Basis (4) aus dem Pol, aus dem ϱ und r gezogen sind, in den polaren Coordinaten φ, r. Für die Lemniskate z. B., für welche $\varrho^2 = a^2 \cos 2\psi$, folgt $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial \psi} = -tg\, 2\psi$, daher ist nach (6) $\psi = \frac{1}{3}\varphi$, folglich nach (5) die Gleichung der Fusspunktslinie aus dem Mittelpunkte der Lemniskate

$$r^2 = a^2 \cos^3 \tfrac{2}{3}\varphi.$$

Für die logarithmische Spirale ist $\varrho = ae^{\psi:m}$, oder wenn $\frac{1}{m} = tg\,\mu$, $\varrho = ae^{\psi\, tg\mu}$ daher $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial \psi} = tg\,\mu$; folglich nach (6) $\psi = \varphi + \mu$; mithin nach (5)

$$r = a \cos\mu\, e^{(\varphi + \mu)\, tg\mu}$$

die Gleichung der Fusspunktslinie. Diese ist also wieder eine logarithmische Spirale*), und zwar eine solche, die sich von der gegebenen nur der Lage nach unterscheidet. Denn es ist $r = \varrho$, wenn

$$\varphi - \psi = -\mu - \cot\mu \,.\, lgn \cos\mu.$$

*) Wie auch aus dem von Jakob Bernoulli gefundenen Satze folgt, dass eine logarithmische Spirale, die sich auf sich selbst wälzt, wieder eine logarithmische Spirale erzeugt.

Dreht man also die gegebenen Spirale um diesen Winkel, so erhält man ihre Fusspunktslinie.

Aus den Gleichungen (4) bis (7) ergeben sich nachstehende zur Bestimmung der Gestalt der Fusspunktslinien nützliche Folgerungen.

1) Aus der Formel (5) erhellt, dass $r = \varrho$, wenn $\varphi = \psi$. Es fällt also der Vector der Fusspunktslinie nach Grösse und Lage mit dem Vector der Basis zusammen, wenn der letztere eine Normale der Basis, was auch von selbst evident ist. Diese Basis und ihre Fusspunktslinie haben daher ebensoviele Punkte mit einander gemein, als sich aus dem Pole Normalen an erstere ziehen lassen. Diese gemeinsamen Punkte sind im allgemeinen Berührungspunkte beider Curven. Denn durch Differentiation der Gleichung (5) erhält man mit Zuziehung von (6)

$$8) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial \psi}.$$

Da aber diese beiden Werthe die Tangenten der Neigung der Normale, resp. der Fusspunktslinie und ihrer Basis gegen ihre Vectoren r und ϱ ausdrücken, so sind diese Neigungen für alle nach Formel (5) mit einander im Zusammenhang stehende Werthe von r und ϱ gleich; daher haben, wenn r und ϱ der Lage und Grösse nach zusammenfallen, beide Curven gemeinschaftliche Normalen und Tangenten. Eine Ausnahme hiervon macht jedoch der Fall, wo der Pol auf dem Umfang der Basis liegt. Denn alsdann fällt der im Pole verschwindende Vector der Basis der Lage nach mit der Tangente derselben am Pole zusammen, steht also auf dem, gleichfalls verschwindenden, aber der Lage nach in die Normale der Basis fallenden Vector der Fusspunktslinie senkrecht. Demnach bildet die Fusspunktslinie im Pol eine Spitze, wofern nicht etwa dieser zugleich ein Wendepunkt der Basis ist, in welchem Falle die Basis von der Fusspunktslinie im Pole geschnitten wird, und dieser zugleich ein Wendepunkt der letzteren ist.

2) Nach Formel (5) wird $r = 0$, wenn entweder $\varrho = 0$, oder $\psi - \varphi = \pm 90^0$. Da nun aber $\psi - \varphi$ auch der Winkel ist, den die Normale der Basis im Endpunkt ihres Vectors mit diesem bildet, so folgt, dass die Fusspunktslinie durch den Pol geht, wenn dieser entweder auf der Basis selbst, oder so liegt, dass sich aus ihm eine oder mehrere Berührende an die Basis ziehen lassen. Der im Pole verschwindende Vector r, folglich auch die mit ihm der Lage nach zusammenfallende Berührende der Fusspunktslinie, steht dann immer senkrecht auf dem Vector der Basis, der diese berührt. Lassen sich daher aus dem Pole zwei oder mehrere Berührende an die Basis ziehen, so geht die Fusspunktslinie eben so vielmal durch den Pol, und schliessen die sich schneidenden Zweige derselben Winkel ein, welche den von den entsprechenden vom Pol auslaufenden Berührenden der Basis eingeschlossenen Winkel gleich sind.

3) Eine Fusspunktslinie hat nur dann unendliche Zweige, wenn ihre Basis deren solche hat, die sich keiner Asymptote nähern. Nach Formel (7) wird nämlich r nur dann unendlich, wenn nicht nur ϱ, sondern zugleich mit ihm auch $\varrho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}$, die polare Subtangente der Basis, unendlich wird. Wenn dagegen für $\varrho = \infty$ diese letztere einen endlichen Grenzwerth hat, so bleibt r endlich und wird diesem Grenzwerth gleich. Da nun im letzteren Falle die Basis eine Asymptote hat, so ist damit der aufgestellte Satz erwiesen.

3.

Sei die Basis einer Fusspunktslinie ein Kegelschnitt, so ist die Gleichung desselben in rechtwinkligen Coordinaten, wenn $2a$, $2b$ die beiden Axen, der Coordinatenanfang im Scheitel der ersten Axe genommen, und diese Axe zur Abscissenaxe gewählt wird,

$$\left(\frac{\xi - a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 = 1,$$

wo a und b für die Ellipse reell sind, für die Hyperbel b mit $b\sqrt{-1}$ zu vertauschen, und für die Parabel $\frac{b}{a} = 0, \frac{b^2}{a} = p$ und $a = \infty$ zu setzen ist. Sei der Pol der Fusspunktslinie durch die Coordinaten f, g gegeben, so wird, wenn man ihn zum Anfang eines neuen, dem vorigen parallelen Coordinatensystems macht, die Gleichung des Kegelschnitts in Bezug auf dieses neue System aus der vorigen Gleichung durch Vertauschung von ξ mit $\xi + f$ und η mit $\eta + g$ erhalten; sie ist daher

$$\left(\frac{\xi + f - a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta + g}{b}\right)^2 = 1.$$

Hieraus folgt nach Formel (2)

$$\frac{y}{x} = \frac{a^2(\eta + g)}{b^2(\xi + f - a)}.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen und der unter (3) ξ und η, so erhält man

$$[x^2 + y^2 + (f - a)x + gy]^2 = a^2x^2 + b^2y^2,$$

als die allgemeine Gleichung der Fusspunktslinien der Kegelschnitte in Bezug auf den, durch die Coordinaten f und g hinsichtlich seiner Lage gegen den Scheitel des Kegelschnitts bestimmten Pol.

Macht man für die Ellipse und Hyperbel ihren Mittelpunkt zum Coordinatenanfang, so dass sich auch f und g auf diesen beziehen, so ist in (9) f mit $f + a$ zu vertauschen. Daher ist für diesen Anfang der Coordinaten die Gleichung der Fusspunktslinie der beiden centralen Kegelschnitte

$$10) \qquad [x^2 + y^2 + fx + gy]^2 = a^2x^2 \pm b^2y^2,$$

wo sich im rechten Theil + auf die Ellipse, auf die Hyperbel bezieht.

Entwickelt man den linken Theil der Gleichung (9), dividirt dieselbe dann durch a, und setzt $a=\infty$, $\frac{b^2}{a}=p$, so folgt

19) $$x[x^2+y^2+fx+gy]+\tfrac{1}{2}py^2=0,$$

als die Gleichung der Fusspunktslinie der Parabel, in Bezug auf den, hinsichtlich seiner Lage gegen den Scheitel, durch f und g bestimmten Pol.

Setzt man in (10) $x=r\cos\varphi$, $g=r\sin\varphi$, wo also r den Radiusvector aus dem Pol, φ dessen Abweichung von der positiven Richtung der x-Axe bedeutet, so ergiebt sich

12) $$[r+f\cos\varphi+g\sin\varphi]^2=a^2\cos^2\varphi\pm b^2\sin^2\varphi,$$

als Polargleichung der Fusspunktslinie der Ellipse und Hyperbel in Bezug auf den Pol (f, g); wo für die Ellipse φ alle Werthe von 0 bis 360° annehmen kann, für die Hyperbel nur diejenigen, welche $tg^2\varphi \leqq \frac{a^2}{b^2}$ geben.

Setzt man in (11) $x=-r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, wo demnach wieder r den Vector aus dem Pol, φ aber dessen Abweichung von der negativen Richtung der x-Axe bezeichnet, so erhält man

13) $$r=f\cos\varphi-g\sin\varphi+\tfrac{1}{2}p\sin\varphi\, tg\,\varphi,$$

als Polargleichung der Fusspunktslinie der Parabel in Bezug auf den Pol (f, g).

Die Gleichungen (12) und (13) lassen sich construiren. Aus (12) ergiebt sich nämlich, wenn zur Abkürzung $a^2\mp b^2=c^2$ gesetzt wird, wo also c die Exentricität des Kegelschnittes ist,

$$r=-f\cos\varphi-g\sin\varphi\pm\sqrt{a^2-c^2\sin^2\varphi}.$$

Setzt man hierin $f=c$, $g=0$ und $r=r_0$, so kommt

14) $$r_0=-c\cos\varphi\pm\sqrt{a^2-c^2\sin^2\varphi},$$

als Gleichung der Fusspunktslinie der Ellipse und Hyperbel, wenn der Pol mit dem Brennpunkt auf der positiven Seite der ersten Axe zusammenfällt. Es ist dies aber die Gleichung für den von dem Brennpunkt auslaufenden Vector eines über der Axe $2a$ beschriebenen Kreises, und man erhält damit den bekannten Satz, dass die Fusspunkte der aus dem Brennpunkt auf die Berührenden der Ellipse und Hyperbel gefällten Senkrechten in dem Umfange des über der ersten Axe dieser Kegelschnitte beschriebenen Kreises liegen. Dasselbe giebt die Vertauschung von c mit $-c$ für den andern Brennpunkt. Zieht man die Gleichung (14) von der vorhergehenden ab, so folgt

$$r-r_0=(c-f)\cos\varphi-g\sin\varphi,$$

oder, wenn

$$r_1=(f-c)\cos\varphi+g\sin\varphi$$

gesetzt wird,

15) $$r=r_0-r_1.$$

Es ist aber r_1 der von demselben Brennpunkt auslaufende und zu derselben Anomalie wie r_0 und r gehörige Vector eines Kreises, dessen Durchmesser

die Gerade, welche den Brennpunkt mit dem durch f, g gegebenen Pole verbindet. Es ist demnach der von dem Pol der Fusspunktslinie auslaufende Vector derselben die Differenz der ihm parallelen, von einem Brennpunkt des Kegelschnittes auslaufenden Vectoren der Kreise, von denen der erste die Axe $2a$, der andre die den Brennpunkt mit dem Pole verbindende Gerade $\sqrt{(f-c)^2+g^2}$ zum Durchmesser hat. Fällt man daher aus dem Endpunkte des Vectors r_0 auf eine, parallel zu ihm durch den Pol gezogene Gerade eine Senkrechte, so ist der Abschnitt jener Geraden, der zwischen dem Fusspunkt dieser Senkrechten und dem Pol enthalten ist, der derselben Anomalie wie die von r_0 zugehörige Vector der Fusspunktslinie. — Man kann dieses Resultat aber auch durch eine viel einfachere Betrachtung erhalten. Geht man nämlich von dem in den Elementen der Kegelschnitte bewiesenen Satze aus, dass die Fusspunkte aller aus einem Brennpunkt der Ellipse oder Hyperbel auf die Berührenden derselben gefällten Senkrechten in dem über der ersten Axe dieser Kegelschnitte beschriebenen Kreise liegen, so ist jede Gerade, die senkrecht auf dem Endpunkte des aus dem Brennpunkt des Kegelschnitts gezogenen Vectors des Kreises steht, eine Berührende des Kegelschnitts, und daher die aus dem Pol auf die gefällte Senkrechte ein Vector der Fusspunktslinie. Man kann auch aus diesem Satze umgekehrt die Gleichung (12) und aus dieser die Gleichung (10) der Fusspunktslinie ableiten.

Entsprechende Resultate erhält man in Bezug auf die Parabel. Setzt man nämlich in (13) $f=\frac{1}{2}p$, $g=0$ und $r=r_0$, so folgt

$$16)\qquad r_0=\frac{\frac{1}{2}p}{\cos\varphi},$$

als Gleichung der Fusspunktslinie der Parabel, wenn ihr Pol mit dem Brennpunkt zusammenfällt. Man erhält damit den bekannten Satz, dass die Fusspunktslinie die Berührende der Parabel am Scheitel ist, oder, was dasselbe, dass die Fusspunkte aller aus dem Brennpunkt auf die Berührenden der Parabel gefällten Senkrechten in jener Berührenden liegen. Subtrahirt man nun (16) von (13) und setzt

$$r_1=(\tfrac{1}{2}p-f)\cos\varphi+g\sin\varphi,$$

so folgt auch hier

$$r=r_0-r_1,$$

wo r_1 ebenfalls den von dem Brennpunkt auslaufenden, zu derselben Anomalie wie r und r_0 gehörigen Vector des Kreises bedeutet, dessen Durchmesser die Gerade ist, welche den Pol mit dem Brennpunkt verbindet. Es ergiebt sich also dieselbe Construction des Vectors der Fusspunktslinie in Bezug auf den gegebenen Pol wie für Ellipse und Hyperbel; auch lässt sich dieselbe ebenso elementar ableiten und rückwärts zur Aufstellung der Formeln (13) und (11) benutzen.

Vermöge dieser Sätze kann man die Fusspunktslinien der Kegelschnitte auch auf folgende Weise durch Bewegung erzeugen. Lässt man eine

Gerade um einen Brennpunkt des Kegelschnitts sich drehen, und gleichzeitig einen rechten Winkel sich so bewegen, dass der eine seiner Schenkel immer durch den gegebenen Pol geht und jener Geraden stets parallel bleibt, der andre Schenkel aber durch den Punkt geht, in welchem dieselbe Gerade den über der ersten Axe des Kegelschnitts beschriebenen Kreis (der für die Parabel in die Berührende am Scheitel übergeht) schneidet, so beschreibt der Scheitel dieses rechten Winkels die Fusspunktslinie des Kegelschnitts, die sich auf den gegebenen Pol bezieht.

4.

Mittels der vorstehenden Gleichungen und der ihnen vorangeschickten allgemeinen Sätze lässt sich eine Uebersicht der mannichfaltigen Gestalten gewinnen, welche die Fusspunktslinien der Kegelschnitte annehmen können.

Was zuerst die beiden centralen Kegelschnitte betrifft, so ist die der Ellipse eine, diese umschliessende, in sich zurücklaufende Curve, welche nach dem Satze des Appollonius über die Anzahl der durch einen gegebenen Punkt gehenden Normalen eines Kegelschnitts*), je nachdem der Pol innerhalb, auf, oder ausserhalb der Evolute der Ellipse liegt, resp. vier, drei, oder zwei Punkte, die im allgemeinen Berührungspunkte sind, mit ihr gemein hat.

Liegt der Pol im Mittelpunkt der Ellipse, wo in den Formeln (10) und (12) $f = g = 0$ zu setzen ist, so sind die vier Scheitel der Ellipse die Berührungspunkte. Dass dann, jenachdem $a \leqq b\sqrt{2}$, oder $a > b\sqrt{2}$, die Curve beziehungsweise eine ovale, oder eine an den Scheiteln der kleinen Axe der Ellipse eingebogene Gestalt hat, und dass ihr Halbmesser umgekehrt proportional ist dem mit ihm coincidirenden Halbmesser der um 90^0 gedrehten Ellipse, ist schon an einem andern Orte**) gezeigt worden, wo auch von der Rectification und Quadratur dieser Curve gehandelt wurde.

Liegt der Pol auf dem Umfange der Ellipse, so bildet die Fusspunktslinie eine Spitze, deren Berührende senkrecht auf der Ellipse steht. Die Curve berührt dann die Ellipse noch in einem zweiten Punkte und hat eine herzförmige Gestalt.

Liegt der Pol ausserhalb der Ellipse, so durchschneidet ihn die Fusspunktslinie zweimal und bildet eine die Ellipse berührende Schlinge, deren Tangenten am Pole senkrecht auf den beiden, durch denselben gehenden Tangenten der Ellipse stehen; ausserdem wird letztere von der Fusspunktslinie noch in einem zweiten Punkte berührt.

---

*) Berichte 1856, S. 103.

**) Berichte 1854, S. 22.

Geht die Ellipse in einen **Kreis** über, so folgt schon daraus, dass alle Fusspunktslinien Rouletten sind, dass die des Kreises eine **Epicykloide** sein muss. Denn die Basis der Roulette wird dann ein Kreis, dessen Halbmesser halb so gross ist, als der Halbmesser der Basis der Fusspunktslinie, und dessen Mittelpunkt von dem Pol halb so entfernt ist als der Mittelpunkt der Basis der Fusspunktslinie. Rollt nun auf jener Basis der Roulette ein gleich grosser Kreis, dessen beschreibender Punkt vom Mittelpunkt desselben eben so weit entfernt ist wie der Pol vom Mittelpunkt des Kreises, auf dem er rollt, so beschreibt dieser Punkt eine Epicykloide, welche mit der Fusspunktslinie des Kreises, dessen Halbmesser doppelt so gross als der der Basis der Roulette, identisch ist. Es lässt sich dies aber auch analytisch nachweisen: Denn sei, wenn a der Halbmesser der Basis der Fusspunktslinie, zuerst der Mittelpunkt der Basis der Epicykloide, deren Halbmesser also $= \frac{1}{2} a$, der Coordinatenanfang, und die Gerade, welche denselben mit dem Mittelpunkte des gleich grossen rollenden Kreises, in seiner anfänglichen Lage, verbindet, die Abscissenaxe, so ist, wenn f der Abstand des Pols vom Mittelpunkt der Basis der Fusspunktslinie, daher $\frac{1}{2} f$ der Abstand desselben vom Mittelpunkt der Basis der Epicykloide, folglich auch der des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt des rollenden Kreises, und wenn φ der Winkel, um den der letztere sich seit Anfang der Bewegung um seinen Mittelpunkt gedreht hat, die Epicykloide, welche der beschreibende Punkt erzeugt, gegeben durch die Gleichungen

$$x' = a \cos \varphi - \tfrac{1}{2} f \cos 2\varphi, \quad y' = a \sin \varphi - \tfrac{1}{2} f \sin 2\varphi,$$

wo x', y' die rechtwinkligen Coordinaten der Epicykloide bedeuten. Verlegt man nun den Coordinatenanfang nach dem Punkte der x'-Axe, dessen Abscisse $= \frac{1}{2} f$, d. i. nach dem Pole, und setzt $x' - \frac{1}{2} f = x$, $y' = y$, so erhält man

$$x = (a - f \cos \varphi) \cos \varphi, \quad y = (a - f \cos \varphi) \sin \varphi,$$

woraus, wenn $x^2 + y^2 = r^2$, folgt

$$r = a - f \cos \varphi,$$

wo sich leicht ergiebt, dass φ auch die zu dem aus dem Pole gezogenen Vector r der Epicykloide gehörige Anomalie ist. In diese Gleichung geht aber die der Fusspunktslinie (12) über, wenn $a = b$, $g = 0$ wird. Jenachdem f grösser, kleiner als a oder gleich a, jenachdem also der Pol ausserhalb, innerhalb, oder auf der Kreisbasis liegt, ist diese die Fusspunktslinie darstellende Epicykloide eine **verkürzte**, **gestreckte** oder **gemeine** und zwar im dritten Falle eine **Kardioide**.

Auch die Fusspunktslinie der **Hyperbel** ist, vermöge Art. 2, Nr. 3, eine in sich zurücklaufende Curve, die zwischen den beiden Theilen der Hyperbel liegt und dieselben, jenachdem der Pol innerhalb, auf, oder ausserhalb der Evolute der Hyperbel gegeben ist, mit derselben beziehungsweise vier, drei, oder zwei Punkte gemein hat, die im allgemeinen Berühr-

ungspunkte sind. Die Abstände dieser Punkte vom Pol sind die grössten und kleinsten Werthe die der Vector der Curve aus dem Pol annehmen kann.

Liegt der Pol im **Mittelpunkt** der Hyperbel, so wird diese von der Fusspunktslinie in den beiden Scheiteln berührt. Diese bilbet dann, wie früher*) gezeigt wurde, eine Schleifenlinie, deren Halbmesser dem coincidirenden Halbmesser einer concentrischen Hyperbel umgekehrt proportional ist, deren Axen zwar der Lage nach mit den gleichnamigen der gegebenen Hyperbel zusammenfallen, von denen aber die erste der zweiten Axe der gegebenen Hyperbel, und die zweite der ersten derselben gleich ist. Diese Schleifenlinie geht in die gemeine **Lemniskate** über, wenn die gegebene Hyperbel eine **gleichseitige** wird.

Die Curve bleibt eine Schleifenlinie, deren Knoten der Pol, so lange dieser **zwischen** beiden Theilen der Hyperbel liegt, und die Tangenten der Curve am Pol stehen immer senkrecht auf den beiden Tangenten der Hyperbel, die durch denselben gehen; nur berührt die Schleifenlinie die letztere drei- oder viermal, wenn der Pol zugleich resp. auf, oder innerhalb der Evolute der Hyperbel liegt.

Rückt der Pol **auf den Umfang** der Hyperbel, so verschwindet diejenige Schleife, die bis dahin den entsprechenden Theil der Hyperbel berührte, und der Knoten wird zu einer Spitze, deren Tangente senkrecht auf der Hyperbel steht. Die Zahl der übrigen Berührungspunkte kann nach derselben Unterscheidung der Lage des Pols gegen die Evolute der Hyperbel, eins, zwei oder drei sein.

Liegt der Pol innerhalb eines von beiden Theilen der Hyperbel, so geht die vorige Spitze in einen Berührungspunkt über, die Zahl der übrigen Berührungspunkte hängt nach demselben Gesetz wie zuvor von der Lage des Pols ab.

5.

Was die Fusspunktslinie der **Parabel** betrifft, so erstreckt sie sich, vermöge Art. 2, Nr. 3, ins Unendliche, und zwar hat sie zwei unendliche Zweige, die sich einer gemeinsamen Asymptote nähern. Das erste folgt aus Formel (13), wo, wenn $\varphi = \pm 90^0$, r unendlich wird. Dieselbe Formel giebt aber auch

$$x = - r \cos \varphi = -(f - \tfrac{1}{4} p) \cos^2 \varphi + g \sin \varphi \cos \varphi - \tfrac{1}{4} p;$$

daher wird, wenn $\varphi = \pm 90^0$, $x = - \frac{1}{4} p$. Eine in diesem Abstande vom Pole parallel zu der Berührenden am Scheitel der Parabel gezogene Gerade ist demnach eine Asymptote der Fusspunktslinie, und jenachdem $f - \frac{1}{4} p$ grösser, gleich, oder kleiner als Null ist, wird dieselbe die Parabel resp. schneiden, im Scheitel berühren, oder sie nicht treffen. Da aber nach For-

*) Berichte 1854, S. 23.

mel (11), wenn $x = -\frac{1}{2}p$, nicht nur $y = +\infty$, sondern auch $y = \frac{\frac{1}{2}p(f-\frac{1}{2}p)}{g}$ wird, so schneidet zugleich die Fusspunktslinie ihre Asymptote in diesem Abstande von der durch den Pol gehenden, der Hauptaxe der Parabel parallel x-Axe, nur mit Ausnahme des Falls, wenn $g=0$, also der Pol auf der x-Axe liegt, wo der Durchschnitt ins Unendliche rückt. — Ferner wird die Abscisse x ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 2(f-\tfrac{1}{2}p) \sin\varphi \cos\varphi + g(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,$$

d. i. wenn

$$tg\,\varphi = \frac{f-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(f-\frac{1}{2}p)^2+g^2}}{g}$$

für welchen Werth

$$x = -\tfrac{1}{2}[f+\tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{(f-\tfrac{1}{2}p)^2+g^2}]$$

wird. Die Fusspunktslinie liegt demnach zwischen zwei Parallelen zur Berührenden am Scheitel der Parabel, deren Abstände vom Pol durch die vorstehenden beiden Werthe von x bestimmt sind. Da $-\frac{1}{2}(f+\frac{1}{2}p)$ die Abscisse der Mitte zwischen dem Durchschnitt der Directrix der Parabel mit ihrer Hauptaxe und dem Fusspunkt des Pols in der letzteren, und $\frac{1}{2}\sqrt{(f-\frac{1}{2}p)^2+g^2}$ der halbe Abstand des Pols vom Brennpunkt, so liegt die Fusspunktslinie zwischen zwei Geraden, welche einen, mit dem eben erwähnten halben Abstand, als Halbmesser, um jene Mitte, als Mittelpunkt, beschriebenen Kreis in den beiden Punkten berühren, wo er die Hauptaxe der Parabel schneidet. Liegt der Pol auf der Parabel, so dass $g^2 = 2pf$, so werden die beiden Abstände dieser Parallelen, vom Pol $x=0$ und $x = -(f+\frac{1}{2}p)$; die eine von ihnen geht also durch den Pol, die andre ist die Directrix. Immer begegnet die Fusspunktslinie jeder von diesen beiden Parallelen in einem einzigen Punkte. Denn die Substitution der obigen Maximal- und Minimalwerthe von x und der beiden zugehörigen Werthe von $tg\,\varphi$ in $y = -x\,tg\,\varphi$ giebt

$$y = \frac{p(f-\frac{1}{2}p) - g^2 \pm p\sqrt{(f-\frac{1}{2}p)^2+g^2}}{2g},$$

wo $\pm$ sich auf $\mp$ in dem Ausdruck von x bezieht. In diesen beiden Punkten, von denen, wenn $g=0$, der eine der Scheitel der Parabel ist, der andre im Unendlichen, und zwar in der Asymptote liegt, wird nun die Fusspunktlinie von den sie einschliessenden Parallelen im allgemeinen berührt, was daraus folgt, dass, wenn man die Gleichung (11) für y auflöst und das irrationale Glied des sich ergebenden Werthes gleich Null setzt, die Werthe von x, welche dieser Bedingung genügen, die obigen Maximal- und Minimalwerthe von x sind. Eine Ausnahme hiervon macht nur für eine dieser Parallelen der Fall, wo der Pol auf der Parabel liegt, daher $g^2 = 2pf$ ist, und in Folge dessen der der Fusspunktslinie mit der einen Parallele ge-

meinsame Punkt der Coordinaten 0, 0, der mit der andern die Coordinaten $-(f+\frac{1}{2}p), -(f+\frac{1}{2}p)\sqrt{\frac{\frac{1}{2}p}{f}}$ hat. Nur der letztere, der in die Directrix fällt, ist nämlich dann ein Berührungspunkt, im ersteren dagegen, dem Pol, bildet die Fusspunktslinie eine Spitze, deren Tangente senkrecht auf der Parabel steht, daher diejenige von den beiden Parallelen, welche durch den Pol geht, schneidet.

Man wird sich nun auf folgende Weise ein Bild von den verschiedenen Gestalten der Fusspunktslinie der Parabel entwerfen können.

Liegt der Pol ausserhalb der Parabel, so schneidet ihn die Fusspunktslinie zweimal, so dass er der Knoten einer die Parabel berührenden Schlinge wird. Der eine durch ihn ins Unendliche gehende Zweig nähert sich sofort der Asymptote auf der nämlichen Seite derselben, auf welcher der Pol liegt, der andre schneidet sie zuerst und nähert sich ihr dann ohne Ende auf der entgegengesetzten Seite. Dieser zweite Zweig berürt die Parabel noch ein- oder zweimal, wenn der Pol zugleich resp. auf oder innerhalb ihrer Evolute liegt. Die Tangenten der Fusspunktslinie im Knoten stehen auch hier senkrecht auf den durch ihn gehenden beiden Berührenden der Parabel.

Liegt der Pol auf der Parabel, so verschwindet die Schlinge und geht in die schon bemerkte Spitze über; alles Uebrige bleibt wie zuvor. — Liegt insbesondre der Pol im Scheitel der Parabel, so dass $f=g=0$, so geben die Formeln (11) und (13) den bekannten Satz, dass dann die Fusspunktslinie eine Cissoide ist. Da nach (13) ihre Polargleichung $r=\frac{1}{2}p \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi$, die der Parabel aus dem Scheitel aber $\varrho=-\frac{2p}{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}$ ist, so folgt dann $r\varrho=-p^2$. Es sind demnach die Vectoren der Parabel aus dem Scheitel und die der Richtung nach entgegengesetzten Vectoren der Cissoide, die in Bezug auf den Scheitel als Pol ihre Fusspunktslinie ist, einander umgekehrt proportional.

Liegt endlich der Pol innerhalb der Parabel, so geht die Spitze in einen Berührungspunkt über, und die unendlichen Zweige nähern sich ihrer Asymptote auf beiden Seiten derselben, wie zuvor. Der eine dieser Zweige berührt auch hier die Parabel noch ein- oder zweimal, wenn der Pol zugleich resp. auf oder innerhalb ihrer Evolute liegt.

6.

Es mag endlich noch bemerkt werden, dass die Kegelschnitte zu ihren Fusspunktslinien in derjenigen allgemeinen Verwandtschaft stehen, die Magnus (Samml. geom. Aufg. §. 50) aufgestellt hat, und von welcher die durch Möbius selbständig begründete und ausführlich entwickelte Kreisverwandtschaft ein besonderer Fall ist.

Sind nämlich ξ, η die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordina-

ten eines Systems von Punkten (Σ), und x, y die auf dieselben oder andre Axen sich beziehenden Coordinaten eines zweiten Systems von Punkten (S); bezeichnen ferner A, A', A'', B, B', B'', lineare Functionen von x und y, so dass

$$A = ax + by + c, \quad A' = a'x + b'y + c' \text{ u. s. f.},$$

so findet, nach Magnus, zwischen beiden Systemen jene allgemeine Verwandtschaft statt, wenn

$$A\xi + A'\eta + A'' = 0 \text{ und zugleich } B\xi + B'\eta + B'' = 0,$$

woraus folgt

$$\xi = \frac{A'B'' - A''B'}{AB' - A'B}; \quad \eta = \frac{A''B - AB''}{AB' - A'B};$$

in welchen Formeln Zähler und Nenner in Bezug auf x und y Functionen vom zweiten Grade sind. Löst man umgekehrt die vorstehenden Gleichungen für x und y auf, so ergeben sich Ausdrücke der Form

$$x = \frac{M'N'' - M''N'}{MN' - M'N}; \quad y = \frac{M''N - MN''}{MN' - M'N};$$

wo M, M', M'', N, N', N'' lineare Functionen von ξ und η bezeichnen und demnach Zähler und Nenner dieser Formeln ebenfalls in Bezug auf ξ und η Functionen vom zweiten Grade sind.

Substituirt man vorstehende Ausdrücke von ξ und η in der Gleichung einer Geraden im System (Σ), so erhält man eine Gleichung vom zweiten Grade in Bezug auf x und y, also die Gleichung eines Kegelschnitts, von dem sich zeigen lässt, dass er immer durch drei bestimmte Punkte, die Cardinalpunkte des Systems (S) geht, unter denen mindestens Einer stets reell ist, und deren Coordinaten aus den Gleichungen

$$A'B'' - A''B' = 0, \; A''B - AB'' = 0, \; AB' - A'B = 0$$

bestimmt werden. Es entspricht also jeder Geraden im System (Σ) im allgemeinen ein Kegelschnitt im System (S), der durch dessen Cardinalpunkte geht. Ebenso hat das System (Σ) drei Cardinalpunkte, und jeder Geraden im System (S) entspricht im allgemeinen ein Kegelschnitt im System (Σ), der durch dessen Cardinalpunkte geht. Beide Sätze gelten auch umgekehrt, so dass also jedem durch die Cardinalpunkte des einen Systems gehenden Kegelschnitt im andern System eine Gerade entspricht. Hiernach entspricht nun auch jedem durch die Cardinalpunkte des einen Systems gehenden Kreis eine Gerade im andern System. Dagegen entspricht jedem nicht durch die Kardinalpunkte des einen Systems gehenden Kreis im andern System im allgemeinen eine Linie der vierten Ordnung. Reducirt sich dieselbe aber vermöge der in A, A', A'', B... enthaltenen Constanten auf einen Kreis, so findet zwischen beiden Systemen Kreisverwandtschaft statt.

In dieser allgemeinen Verwandtschaft stehen nun die Kegelschnitte zu ihren Fusspunktslinien. Denn setzt man, was zuerst die Ellipse und Hyperbel betrifft, in ihrer gemeinsamen Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

$$\xi = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2 + fx + gy} \text{ und } \eta = \frac{\pm b^2 y}{x^2 + y^2 + fx + gy},$$

welche Ausdrücke specielle Werthe der obigen allgemeinen durch A, A' etc. bestimmt sind, so erhält man die Gleichung (10) ihrer Fusspunktslinien. Setzt man die Zähler und Nenner dieser Ausdrücke gleich Null, so zeigt es sich, dass die Fusspunktslinie nur Einen Cardinalpunkt hat, welcher ihr Pol ist, für den $x = 0$, $y = 0$. Bestimmt man x durch y und ξ durch η und setzt Zähler und Nenner der sich ergebenden Brüche gleich Null, so findet man, dass der einzige Cardinalpunkt der Ellipse und Hyperbel ihr Mittelpunkt ist.

Substituirt man vorstehende Ausdrücke von ξ und η durch x und y in der Gleichung einer Geraden im System der Ellipse oder Hyperbel

$$\varkappa\xi + \lambda\eta + \mu = 0,$$

so erhält man

$$\varkappa a^2 x \pm \lambda b^2 y + \mu(x^2 + y^2 + fx + gy) = 0.$$

Es entpricht also jeder Geraden im System jener Kegelschnitte im allgemeinen ein Kreis im System ihrer Fusspunktslinien, welcher durch deren Pol geht. Geht aber die Gerade durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts, so dass $\mu = 0$ wird, so entspricht ihr die durch den Pol der Fusspunktslinie gehende Gerade

$$\varkappa a^2 x + \lambda b^2 y = 0:$$

Die Tangenten der Neigungen beider Geraden gegen ihre Abscissenaxe stehen also im constanten Verhältniss $b^2 : a^2$.

Einem Kreis im System der beiden Kegelschnitte

$$\xi^2 + \eta^2 + \varkappa\xi + \lambda\eta + \mu = 0$$

entspricht im System der zugehörigen Fusspunktslinie die Curve

$$a^4 x^2 + b^4 y^2 + (x^2 + y^2 + fx + gy)[\varkappa a^2 x \pm \lambda b^2 y + \mu(x^2 + y^2 + fx + gy)] = 0,$$

also im allgemeinen eine Linie vierter Ordnung, welche durch den Pol geht. Ist $\mu = 0$, geht also der Kreis durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts, so entspricht demselben eine durch den Pol der Fusspunktslinie gehende Linie dritter Ordnung.

Ist die Hyperbel gleichseitig, also $a = b$, und ihr Mittelpunkt der Pol der Fusspunktslinie, die dann eine Lemniskate, also $f = 0$, $g = 0$, so entspricht jedem nicht durch den Mittelpunkt gehenden Kreis im System eine Hyperbel ein Kreis im System der Lemniskate.

$$a^4 + a^2(\varkappa x - \lambda y) + \mu(x^2 - y^2) = 0,$$

der ebenfalls nicht durch den derselben mit der Hyperbel gemeinsamen Mittelpunkt geht, mit dem Pol als zugeordnetem Punkte. Jedem durch den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel gehenden Kreis aber, für den also $\mu = 0$, entspricht an der Lemniskate die Gerade

$$a^2 + \varkappa x - \lambda y = 0;$$

und umgekehrt der Geraden $\varkappa\xi + \lambda\eta + \mu = 0$ an der Hyperbel entspricht an der Lemniskate der durch ihren Mittelpunkt gehende Kreis

$$a^2(\varkappa x - \lambda\eta) + \mu(x^2 + y^2) = 0.$$

Diese Sätze, aus denen hervorgeht, dass die gleichseitige Hyperbel und Lemniskate einander kreisverwandt sind, hat schon Magnus (a. a. O. S. 291) bemerkt.

Was endlich die Parabel betrifft, so erhält man aus ihrer Gleichung

$$\eta^2 - 2p\,\xi = 0,$$

die ihrer Fusspunktslinie (11) auch, wenn man

$$\xi = \frac{-p^2 x}{x^2+y^2+fx+gy} \text{ und } \eta = \frac{p^2 y}{x^2+y^2+fx+gy}$$

setzt, woraus erhellt, dass zwischen beiden Curven dieselbe allgemeine Verwandtschaft stattfindet, wie zwischen den beiden andern Kegelschnitten und ihren Fusspunktslinien. Der einzige Cardinalpunkt der Parabel ist ihr Scheitel, der ihrer Fusspunktslinie wiederum der Pol. Der Geraden

$$\varkappa\xi + \lambda\eta + \mu = 0$$

im System der Parabel entspricht hier im System der Fusspunktslinie der durch ihren Pol gehende Kreis

$$p^2(\lambda y - \varkappa x) + \mu(x^2 + y^2 + fx + gy) = 0;$$

jedem, nicht durch den Scheitel der Parabel gehenden Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 + \varkappa\xi + \lambda\eta + \mu = 0$$

eine Linie der vierten Ordnung

$$p^4(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + fx + gy)[p^2(\lambda y - \varkappa x) + \mu(x^2 + y^2 + fx + gy)] = 0,$$

die, wenn $\mu = 0$, also jener Kreis durch den Scheitel geht, sich auf eine Linie dritter Ordnung reducirt.

Für $f = g = 0$, wo die Fusspunktslinie der Parabel eine Cissoide ist, geht diese Gleichung über in

$$(x^2 + y^2)[p^4 + p^2(\lambda y - \varkappa x) + \mu(x^2 + y^2)] = 0,$$

welche einen nicht durch den Pol gehenden Kreis, mit dem Pol als zugeordneten Punkte anzeigt; was ebenfalls schon Magnus (a. a. O.) bemerkt hat, und woraus die Kreisverwandtschaft zwischen der Parabel und Cissoide hervorgeht.

Für $\mu = 0$ entspricht dem durch den Scheitel der Parabel gehenden Kreis eine Gerade an der Cissoide, mit dem Pol als zugeordneten Punkt.

II.

Bemerkungen über das numerische Eliminiren bei geodätischen Operationen.

Von J. J. Vorländer,

Königl. Preuss. Steuerrath in Minden.

Herr Professor Gerling bemerkt in seinem Werke „Die Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie“ *) Seite 386, dass Gauss ihm, bei Gelegenheit seiner Klage über die grosse Mühseligkeit des directen Eliminirens bei den geodätischen Ausgleichungsrechnungen über dessen Methode des indirecten Verfahrens Auskunft gegeben habe und dass dieses Verfahren späterhin in seinen geodätischen Arbeiten durchgehends angewendet worden sei.

Diese indirecte Methode ist allerdings überaus einfach, leicht und sicher, aber ich habe mich nicht überzeugen können, dass sie weniger weitläuftig sei, als die directe Methode, wenn diese nach den bekannten Gauss'schen Vorschriften angewendet wird. Im Gegentheile, ich finde die letztere beträchtlich kürzer, auch die damit verbundene Arbeit fast eben so leicht und gegen Rechnungsfehler hinreichend geschützt.

Es ist vielleicht den Lesern dieser Blätter nicht unwillkommen, hier einige vergleichende Notizen über beide Methoden zu finden. Des leichteren Verständnisses wegen, möge es mir erlaubt sein, dass von Gauss für das directe Eliminiren gegebene Rechnungsverfahren kürzlich anzuführen.

Bekanntlich führt die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate immer auf Gleichungen von der Form:

$$[aa]\,v + [ab]\,x + [ac]\,y + [ad]\,z + \ldots [an] = 0$$
$$[ab]\,v + [bb]\,x + [bc]\,y + [bd]\,z + \ldots [bn] = 0$$
$$[ac]\,v + [bc]\,x + [cc]\,y + [cd]\,z + \ldots [cn] = 0$$
$$[ad]\,v + [bd]\,x + [cd]\,y + [dd]\,z + \ldots [dn] = 0$$

u. s. w.

aus denen v, x, y, z u. s. w. durch Elimination gefunden werden müssen, und das gedachte Rechnungsschema des directen Verfahrens ist:

---

*) Hamburg, bei Perthes. 1843.

$$\begin{array}{r}
[aa]\,v+[ab]\;x+[ac]\;y+[ad]\;z+\ldots[an]=0\\
+[bb]\;x+[bc]\;y+[bd]\;z+\ldots[bn]=0\\
+[cc]\;y+[cd]\;z+\ldots[cn]=0\\
+[dd]\;z+\ldots[dn]=0\\
\hline
[bb]_1x+[bc]_1y+[bd]_1z+\ldots[bn]_1=0\\
+[cc]_1y+[cd]_1z+\ldots[cn]_1=0\\
+[dd]_1z+\ldots[dn]_1=0\\
\hline
[cc]_2y+[cd]_2z+\ldots[cn]_2=0\\
+[dd]_2z+\ldots[dn]_2=0\\
\hline
[dd]_3z+\ldots[dn]_3=0\\
\hline
\end{array}$$

Wir haben also so viele Rechnungsabsätze zu bilden, als unbekannte Grössen zu eliminiren sind, um zuletzt eine derselben durch einfache Division zu finden.

Der Uebergang von einem Absatze zum nächstfolgenden ergiebt sich durch Multiplication der ersten Zeile jenes Absatzes mit dem Quotienten, welcher entsteht, wenn der Coefficient ihres zweiten Gliedes mit dem des ersten Gliedes dividirt wird, und durch Subtraction der Producte von den entsprechenden Gliedern der zweiten Zeile, wobei das erste Glied aus der Rechnung fällt. Diese erste Operation giebt die erste Zeile des folgenden Absatzes. Um die zweite Zeile zu finden, muss die erste Zeile des vorhergehenden Absatzes mit dem Quotienten zwischen dem Coefficienten ihres dritten und ersten Gliedes multiplicirt, und die Producte müssen von der dritten Zeile des vorhergehenden Absatzes abgezogen werden, wobei nicht nur ebenfalls das erste Glied aus der Rechnung fällt, sondern auch das zweite Glied nicht gebildet zu werden braucht, weil sein Coefficient dem Coefficienten des rechts über ihm stehenden Gliedes der vorher gebildeten ersten Zeile gleich ist. In Zeichen finden wir z. B. aus dem ersten Absatze für den zweiten Absatz:

die erste Zeile:
$$\left\{\begin{array}{l}
[bb]_1=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ab],\\
[bc]_1=[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ac],\\
[bd]_1=[bd]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ad],\\
[bn]_1=[bn]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[an],
\end{array}\right.$$

die zweite Zeile:
$$\left\{\begin{array}{l}
[cc]_1=[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ac],\\
[cd]_1=[cd]-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ad],\\
[cn]_1=[cn]-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot[an],
\end{array}\right.$$

die dritte Zeile:
$$\begin{cases} [dd]_1 = [dd] - \frac{[ad]}{[aa]} \cdot [ad], \\ [dn]_1 = [dn] - \frac{[an]}{[aa]} \cdot [an]. \end{cases}$$

Um den Uebergang vom zweiten zum dritten Absatze zu schematisiren, braucht in den vorstehenden Ausdrücken überall nur die Kennziffer um 1 erhöht und für jeden Buchstaben der ihm im Alphabet nachfolgende gesetzt zu werden. Es wird also z. B. für den dritten Absatz:

die erste Zeile:
$$\begin{cases} [cc]_2 = [cc]_1 - \frac{[bc]_1}{[bb]_1} \cdot [bc]_1, \\ [cd]_2 = [cd]_1 - \frac{[bc]_1}{[bb]_1} \cdot [bd]_1, \\ [cn]_2 = [cn]_1 - \frac{[bc]_1}{[bb]_1} \cdot [bn]_1 \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Zum Schutze gegen Irrthümer im Rechnen setzt man neben die Gleichungen die Zahlensumme der Glieder und lässt sie an allen Rechnungsoperationen Theil nehmen. Man bezeichnet sie füglich mit $[as]$, $[bs]$, $[cs]$ u. s. w., so nämlich, dass:
$$[aa] + [ab] + [ac] + [ad] + \ldots [an] = [as]$$
$$[ab] + [bb] + [bc] + [bd] + \ldots [bn] = [bs] \quad \text{u. s. w.}$$
Es muss dann werden:
$$[bb]_1 + [bc]_1 + [bd]_1 + \ldots [bn]_1 = [bs]_1$$
$$[cc]_2 + [cd]_2 + \ldots [cn]_2 = [cs]_2$$
auch
$$[cd]_2 + [dd]_2 + \ldots [dn]_2 = [ds]_2 \quad \text{u. s. w.}$$

Wir haben also, ebenso wie bei der indirecten Methode für jeden Schritt der Rechnung völlige Sicherheit.

Ist eine unbekannte Grösse gefunden, so erhalten wir durch einfache Substitution derselben in den nächst vorhergehenden Absatz die zweite, durch Substitution der ersten und zweiten in den vorhergehenden Absatz die dritte u. s. w. Auch dieses Geschäft findet in der Summenspalte eine leichte Controle.

Zu den Eliminationen, welche bei geodätischen Arbeiten am häufigsten vorkommen, gewähren die Crelle'schen Multiplicationstafeln hinreichende Genauigkeit. Durch ihre Anwendung wird die Rechnung in hohem Grade erleichtert und abgekürzt. Ich will dieses an demselben Beispiele zeigen, welches Herr Professor Gerling, Seite 391 des bezeichneten Werkes, nach der indirecten Methode bearbeitet hat.

Aus den Gleichungen:
$$6{,}000\,k_1 + 4{,}319\,k_2 - 0{,}763\,k_3 + 6{,}617 = 0$$
$$4{,}319\,k_1 + 77{,}629\,k_2 + 2{,}663\,k_3 + 4{,}202 = 0$$
$$-0{,}763\,k_1 + 2{,}663\,k_2 + 3{,}005\,k_3 - 7{,}345 = 0$$
sollten die unbekannten Grössen k_1, k_2, k_3 durch Elimination gefunden werden.

Nach dem oben formulirten directen Verfahren ist die Rechnung folgende:

	k_1	k_2	k_3	n	s	
	6,000	+ 4,319	— 0,763	+ 6,167	+ 15,723	x, x'
		+ 77,629	+ 2,663	+ 4,202	+ 88,813	
			+ 3,005	— 7,345	— 2,440	
x + 0,72		+ 3,110	— 0,549	+ 4,440	+ 11,321	
x' — 0,127			+ 0,097	— 0,784	— 1,997	
		+ 74,519	+ 3,212	— 0,238	+ 77,492	x''
			+ 2,908	— 6,561	— 0,443	
x'' + 0,0431			+ 0,138	— 0,010	+ 3,340	
			+ 2,170	— 6,551	— 3,783	
			k_3 =	+ 2,365	+ 1,365	
			— 3,212	+ 7,596	+ 4,384	
		+ 74,519	0	+ 7,358	+ 81,876	
		k_2 =		+ 0,0988	— 1,0988	
		— 4,319		— 0,427	— 4,746	
			+ 0,763	— 1,801	— 1,041	
	6,000	0	0	+ 3,936	+ 9,936	
	b_1 =			— 0,656	— 1,656	

Das directe Eliminationsgeschäft erforderte also 234 Ziffern und siebenmaliges Aufschlagen der Multiplicationstafel. Dagegen musste Herr Professor Gerling bei dem indirecten Verfahren 573 Ziffern, also weit über die doppelte Anzahl, verwenden.

Herr Professor Gerling bemerkt nun zwar, dass kleinere Beispiele von 2, 3, 4 Normalgleichungen keine entscheidende Erfahrung darbieten könnten, führt aber dafür keine Gründe an. Der Umfang der Arbeit bei dem directen Verfahren wächst mit dem Producte $m(m+1)$, oder wenn die vorgedachte Summencontrole angewendet wird, mit $m(m+2)$, wo m die Anzahl der Unbekannten bezeichnet. Dass die Zunahme der Arbeit bei dem indirecten Verfahren in einem minder hohen Grade erfolgen sollte, ist nicht wahrscheinlich.

Bei meinen trigonometrischen Arbeiten ist immer direct eliminirt worden, aber ich habe mich nicht jederzeit strenge an das obige Verfahren gebunden, sondern möglichst alle Erleichterungen benutzt, welche die Beschaffenheit der Coefficienten zufällig darbieten mochte. Dergleichen Erleichterungen kommen, insbesondere bei den Horizontabschlüssen häufig vor, weil die Beobachter gewöhnlich nach fünfmaliger Repetition die Nonien ablesen, demnach die Schlusszahlen, welche gewöhnlich als Gewichte der gefundenen Winkelresultate adoptirt werden, sich auf 5, 10, 15, 20 u. s. w. abrunden. Alle Verbindungen derselben sind dann durch 5 oder 10 theil-

bar und dieser Umstand kann benutzt werden, gewisse Glieder der Gleichungen mit bequemen Eliminationsfactoren aus der Rechnung zu schaffen. Wie bequem sich die Arbeit auch unter nicht grade günstigen Umständen gestaltet, möge man aus folgendem Beispiele ersehen.

Auf der Station Herrmanns-Denkmal*) im Teutoburger Walde wurden die Winkel zwischen fünf Richtungen gemessen und die zur Verbesserung der vorläufigen Azimuthe gebildeten Normalgleichungen waren:

$$70\,a_1 - 20\,a_2 - 15\,a_3 - 35\,a_4 + 114{,}110 = 0$$
$$-20\,a_1 + 95\,a_2 - 20\,a_3 - 45\,a_4 - 262{,}110 = 0$$
$$-15\,a_1 - 20\,a_2 + 58\,a_3 - 10\,a_4 + 406{,}504 = 0$$
$$-35\,a_1 - 45\,a_2 - 10\,a_3 + 90\,a_4 - 97{,}700 = 0.$$

Wird diesen Gleichungen die horizontale Zahlensumme beigefügt, so ist die Rechnung:

Gleichung.	a_1	a_2	a_3	a_4	n	s	Verfahren.
(1)	+70	—20	—15	—35	+ 114,110	+ 114,110	
(2)	—20	+95	—20	—45	— 262,119	— 252,110	
(3)	—15	—20	+58	—10	+ 406,504	+ 419,504	
(4)	—35	—45	—10	+90	— 97,700	— 97,700	
(5)	0	+10	+13	0	+ 160,804	+ 183,804	(1)+(2)+(3)+(4)
(6)	0	+120	+48	—145	+ 242,094	+ 265,094	(2)+(3)—(4)
(7)	0	+365	—292	—95	+ 2412,346	— 2434,346	3(2)—4(3)
(8)	0	—8305	+9360	0	+ 74557,82	+ 75632,82	19(6)—29(7)
(9)	0	+8305	+10796,5	0	+133549,72	+152649,22	830,5(5)
(10)	0	0	+20176,5	0	+208105,54	+228282,04	(8)+(9)
(11)	0	0	+1	0	+ 10,314	+ 11,314	$\frac{1}{20176,5}$(10)
(12)	0	0	—13	0	— 134,082	— 147,082	—13(11)
(13)	0	+10	0	0	+ 26,722	+ 36,722	(5)+(12)
(14)	0	+1	0	0	+ 2,6722	+ 3,6722	$\frac{1}{10}$(13)
(15)	0	—120	0	0	— 320,664	— 440,664	—120(14)
(16)	0	0	—48	0	— 495,072	— 543,072	—48(11)
(17)	0	0	0	—145	— 573,642	— 718,642	(6)+(15)+(16)
(18)	0	0	0	+1	+ 3,956	+ 4,956	$\frac{1}{145}$(17)
(19)	0	+20	0	0	+ 53,444	+ 73,444	20(14)
(20)	0	0	+15	0	+ 154,710	+ 169,710	15(11)
(21)	0	0	0	+35	+ 138,460	+ 173,460	35(18)
(22)	+70	0	0	0	+ 460,724	+ 530,724	(1)+(19)+(20)+(21)
(23)	+1	0	0	0	+ 6,582	+ 7,582	$\frac{1}{70}$(22)

*) Geographische Bestimmungen des Verf. im Königl. Preuss. Regierungsbezirk Minden. Minden, bei Körber & Freytag, 1853.

Das Eliminationsgeschäft schliesst also mit den Werthen:

$$a_1 = -\ \ 6{,}582$$
$$a_2 = -\ \ 2{,}672$$
$$a_3 = -10{,}314$$
$$a_4 = -\ \ 3{,}956$$

und hat, ausser den entbehrlichen Nummern der Gleichungen und den nur zur Uebersicht für die ausfallenden Glieder eingerückten Nullen, 367 Ziffern in Anspruch genommen, also noch längst nicht so viel wie nach dem Obigen die indirecte Methode bei nur 3 Gleichungen bedurfte.

Das vorstehende Verfahren gewährt nun überdem den Vortheil, dass wir, wo es nöthig sein sollte, mit sehr geringer Mühe auch die Gewichte der gefundenen Resultate angeben können. Wollen wir z. B. das Gewicht für a_3 finden, so haben wir zu setzen:

$$(1) = 0$$
$$(2) = 0$$
$$(3) = 1$$
$$(4) = 0$$

sodann ist

$$(5) = (1) + (2) + (3) + (4) = 1$$
$$(6) = (2) + (3) - (4) = 1$$
$$(7) = 3(2) - 4(3) = -4$$
$$(8) = 19\,(6) - 29\,(7) = 19 + 116 = 135$$
$$(9) = 830{,}5\,(5) = 830{,}5$$
$$(10) = (8) + (9) = 830{,}5 + 135 = 965{,}5$$
$$(11) = \frac{1}{20176{,}5}\,(10) = \frac{965{,}5}{20176{,}5} = 0{,}04785$$

Das Gewicht für a_3 ist also $= \frac{1}{0{,}04785} = 20{,}9.$

Müssten endlich nicht blos die Gewichte der Resultate, sondern auch die allgemeinen Ausdrücke zwischen den unbekannten Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 und den Gleichungswerthen n_1, n_2, n_3, n_4, etwa zum Zwecke der Gesammtausgleichung des Netzes*) angegeben werden, so finden wir diese, indem wir setzten:

	n_1	n_2	n_3	n_4
1) =	+1			
2) =		+1		
3) =			+1	
4) =				+1
5) =	+1	+1	+1	+1
6) =		+1	+1	−1
7) =		+3	−4	
8) =		−68	+135	−19
9) =	+830,5	+830,5	+830,5	+830,5
10) =	+830,5	+762,5	+965,5	+811,5
11) =	$+\frac{830{,}5}{20176{,}5}$	$+\frac{762{,}5}{20176{,}5}$	$+\frac{965{,}5}{20176{,}5}$	$+\frac{811{,}5}{20176{,}5}$
oder a_3 =	$+0{,}04116\,n_1$	$+0{,}03779\,n_2$	$+0{,}04785\,n_3$	$+0{,}04022\,n_4$

*) Vergl. die Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer, Berlin, bei Dümmler 1838, Seite 152.

Es versteht sich von selbst, dass, wenn letztere Ausdrücke entwickelt wurden, die besondere Berechnung der Ausdrücke für die Gewichte nicht erforderlich ist, weil diese in jener schon vorkommen.

Aus dem vorstehenden Beispiele ergiebt sich zugleich, dass die Rechnungsgeschäfte bedeutend erleichtert würden, wenn die Trigonometer es sich allgemein zur Regel machten, jeden Winkel volle 10, 20, 30 oder $10 . m$ mal zu beobachten. Dafür, dass die Repetition nur bei einer geraden Zahl abgebrochen worden, liegt überdem ein nicht unwichtiger sachlicher Beweggrund vor. Der Trigonometer hat nämlich die Pflicht, constante Fehler möglichst zu vermeiden oder sie durch sein Verfahren aufzuheben. Den Fehler, welcher entsteht, wenn die Achse für die Vertikalbewegung des Fernrohrs der Ebene des Limbus nicht absolut genau parallel liegt, sucht der Beobachter in der Regel dadurch aufzuheben, dass er das Fernrohr nach einer gewissen Reihe von Beobachtungen, wie man es zu nennen gewohnt ist, durchschlägt, nämlich dasselbe vertikal um zwei rechte Winkel umlegt, ohne die Lage der Achse gegen die Alhidade zu verändern. Soll diese Compensation eine vollständige sein, so müssen bei der einen Lage des Fernrohrs ebenso viele Beobachtungen angestellt werden, als bei der anderen, d. h. die Gesammtzahl der Beobachtungen muss eine gerade Zahl sein.

III.

Reduction eines vielfachen Integrales.

Von O. Schlœmilch.

(Aus den Sitzungsberichten der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften. 1857.)

Im 2ten Bande meiner „Analytischen Studien" (Leipzig 1848) habe ich gezeigt, dass das vielfache Integral

$$\int\int\int \ldots \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

dessen Variabelen alle positiven und negativen mit der Bedingung

$$1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \ldots \geqq 0$$

verträglichen Werthe annehmen sollen, immer auf ein einfaches Integral zurückgeführt werden kann; die nämliche Bemerkung gilt auch für das etwas allgemeinere Integral

$$\int\int \ldots \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \ldots\right)^m \varphi(\alpha x + \beta y + \ldots)\, dx\, dy \ldots,$$

wie sich bei einer andern Gelegenheit ergab (Zeitschrift f. Mathem. u. Phys. Jahrg. I, S. 83); endlich ist es mir in neuerer Zeit gelungen, ein weit allgemeineres Resultat zu erreichen und zwar besteht dasselbe in dem Satze, dass das vielfache Integral

$$\int\int \ldots f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\ldots\right)\varphi(\alpha x+\beta y+\ldots)\,dx\,dy\ldots$$

auf ein Doppelintegral zurückgeführt werden kann, wenn sich die Integrationen über alle positiven und negativen $x, y \ldots$ erstrecken, welche entweder der Bedingung

$$1 \geqq \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\ldots \geqq 0,$$

oder der Bedingung

$$\sigma_2 \geqq \alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots \geqq \sigma_1,$$

oder beiden Bedingungen zugleich genügen. Diese Reduction, welche um so bemerkenswerther sein dürfte als man zur Zeit nur sehr wenige vielfache Integrale mit zwei willkührlichen Functionen zu reduciren vermag, erlaube ich mir im Folgenden mitzutheilen.

Wenn es vorerst auf eine Transformation des Doppelintegrales

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda u+\mu v)\,du\,dv$$

ankommt, so kann man u und v als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes uv betrachten und diese durch Polarcoordinaten ausdrücken, indem man

$$u=r\cos\vartheta,\quad v=r\sin\vartheta,\quad du\,dv=r\,dr\,d\vartheta$$

setzt, man erhält

$$S=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(k^2+r^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda\cos\vartheta+\mu r\sin\vartheta)\,r\,dr\,d\vartheta.$$

Nach einem bekannten Satze ist nun *)

$$\int_0^{2\pi}\psi(a\cos\vartheta+b\sin\vartheta)\,d\vartheta=2\int_0^{\pi}\psi\left(\sqrt{a^2+b^2}\,.\cos\vartheta\right)d\vartheta;$$

wendet man denselben hier an, indem man

$$\psi(z)=\varphi(\varkappa+z),\quad a=\lambda r,\quad b=\mu r$$

substituirt, so ergiebt sich

$$S=2\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(k^2+r^2)\,\varphi\left(\varkappa+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,.r\cos\vartheta\right)r\,dr\,d\vartheta;$$

durch Rückkehr zu den ursprünglichen Variabelen u, v; und durch Zusammenstellung der ersten und letzten Form von S gelangt man zu der Gleichung

*) S. Formel 8) pag. 81 des Jahrganges I. der Zeitschrift.

1) $$\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda u+\mu v)\,du\,dv\\ &=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(k+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}.u)\,du\,dv.\end{aligned}\right.$$

Der Vortheil, welcher bei dieser Transformation erreicht worden ist, besteht darin, dass rechter Hand die Funktion φ nur die eine Variabele u enthält, während auf der linken Seite u und v in φ vorkommen.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir das dreifache Integral

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,dx\,dy\,dz.$$

Hier können wir die Formel 1) zunächst auf das nach y und z genommene Doppelintegral anwenden, indem wir uns

$$k=x,\quad u=y,\quad v=z,\quad \varkappa=\alpha x,\quad \lambda=\beta,\quad \mu=\gamma$$

gesetzt denken; wir erhalten dann

$$T=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(\alpha x+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}.y)\,dx\,dy\,dz.$$

Wiederum ist hier die Formel 1) auf das nach x und y genommene Doppelintegral anwendbar mittelst der Substitutionen

$$k=z,\quad u=x,\quad v=y,\quad \varkappa=0,\quad \lambda=\alpha,\quad \mu=\sqrt{\beta^2+\gamma^2};$$

es ergiebt sich dabei

$$T=4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.x)\,dx\,dy\,dz,$$

wo nun die Function φ nur die eine Variabele x enthält, während sie ursprünglich x, y, und z enthielt.

Man übersieht augenblicklich, wie dieses überaus einfache Verfahren bei jeder beliebigen Anzahl von Variabelen durchgeführt werden kann; bezeichnen wir mit n die Anzahl der Variabelen des Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

und setzen wir zur Abkürzung

2) $$\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots};$$

so gelangen wir zu der Gleichung

$$3) \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ = 2^{n-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\varrho x)\,dx\,dy\,dz\ldots \end{cases}$$

Auf der rechten Seite ist nun eine fernere bedeutende Reduction möglich. Man hat nämlich folgende von Liouville herrührende Formel

$$\int\int \ldots x^{p-1}\,y^{q-1}\ldots F(x+y+\ldots)\,dx\,dy\ldots$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\ldots}{\Gamma(p+q+\ldots)}\int\limits_{0}^{h} t^{p+q+\ldots-1}\,F(t)\,dt,$$

worin sich die Integrationen linker Hand auf alle positiven der Ungleichung

$$h \geqq x+y+\ldots \geqq 0$$

genügenden $x, y\ldots$ beziehen; setzt man in dieser Formel

$$x=\xi^2,\quad y=\eta^2\ldots,\quad p=q\ldots=\tfrac{1}{2},\quad h=\infty\,,\quad t=y^2,$$

so wird daraus

$$\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\ldots F(\xi^2+\eta^2+\ldots)\,d\xi\,d\eta\ldots = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty} y^{m-1}\,F(y^2)\,dy,$$

wo m die Anzahl der Variabelen bezeichnet. Für

$$F(y^2)=f(k^2+y^2) \text{ also } F(\xi^2+\eta^2+\ldots)=f(k^2+\xi^2+\eta^2+\ldots)$$

und durch Substitution von y für ξ, z für η u. s. w. gelangt man noch zu der Formel

$$\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\ldots f(k^2+y^2+z^2+\ldots)\,dy\,dz\ldots$$

$$= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty} y^{m-1}\,f(k^2+y^2)\,dy,$$

die unmittelbar auf das in Nr. 3) vorkommende $(n-1)$ fache, nach $y, z\ldots$ genommene Integral anwendbar ist, wenn $k=x$ und $m=n-1$ gesetzt wird. Wir haben demnach folgende Reduction

$$4) \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ = \dfrac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} f(x^2+y^2)\,\varphi(\varrho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy. \end{cases}$$

Diese Formel wird allgemeiner, wenn man linker Hand $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}\ldots$ an die Stelle von $x, y, z\ldots$ und gleichzeitig $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma\ldots$ für $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ eintreten lässt; sie lautet dann

$$5)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dy\ldots\\&=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}abc\ldots}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(x^2+y^2)\,\varphi(\varrho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy,\end{aligned}\right.$$

$$6)\qquad \varrho=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2+\ldots}$$

Um endlich die anfangs erwähnten Bedingungen hinzuzubringen, denken wir uns die Function $f(u)$ durch eine andere ersetzt, welche für $u<1$ mit $f(u)$ zusammenfällt und für $u>1$ verschwindet, wie es z. B. der Fall ist, wenn man

$$f(u)\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\tau}{\tau}\cos u\tau\,d\tau$$

an die Stelle von $f(u)$ treten lässt. Aus dem Integrale linker Hand fallen jetzt alle Elemente weg, für welche $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\ldots$ mehr als die Einheit beträgt und daher beziehen sich die Integrationen nur noch auf diejenigen positiven und negativen Werthe von $x, y, z\ldots$, welche der Bedingung

$$0<\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2+\ldots<1$$

genügen. Ebenso verschwinden rechter Hand alle Integralelemente, bei denen $x^2+y^2>1$ wird, d. h. die Integrationen erstrecken sich nur über die positiven und negativen x und über die positiven y, welche $x^2+y^2<1$ lassen; hieraus folgt, dass rechter Hand die Integrationen von $x=-1$ bis $x=+1$ und von $y=0$ bis $y=+\sqrt{1-x^2}$ gehen. Unter der Bedingung

$$7)\qquad 0<\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2+\ldots<1$$

ist also

$$7\,a)\quad\left\{\begin{aligned}&\int\int\int\ldots f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\ldots\right)\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots\\&=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}abc\ldots}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{+\sqrt{1-x^2}}f(x^2+y^2)\,\varphi(\varrho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy.\end{aligned}\right.$$

Denken wir uns zweitens in der Gleichung 5) $\varphi(s)$ durch eine andere Function ersetzt, welche mit $\varphi(s)$ identisch ist oder verschwindet, je nach-

dem s der Bedingung $\sigma_1 < s < \sigma_2$ genügt oder nicht genügt, so beziehen sich linker Hand die Integrationen nur auf alle die positiven und negativen x, $y, z \ldots$, für welche $\sigma_1 < \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots < \sigma_2$ ist; ebenso fallen rechts alle Integralelemente weg, welche die Bedingung $\sigma_1 < \varrho x < \sigma_2$ oder $\frac{\sigma_1}{\varrho} < x < \frac{\sigma_2}{\varrho}$ nicht erfüllen. Unter der Voraussetzung

$$8)\qquad \sigma_1 < \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots < \sigma_2$$

gilt demnach die Formel

$$8\text{a})\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int \ldots f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \ldots\right) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} abc \ldots}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\frac{\sigma_1}{\varrho}}^{\frac{\sigma_2}{\varrho}} \int_0^{\infty} f(x^2 + y^2)\, \varphi(\varrho x)\, y^{n-2}\, dx\, dy. \end{aligned} \right.$$

Wenn endlich die beiden in 7) und 8) erwähnten Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden sollen, so sind rechter Hand auch gleichzeitig die für x und y gefundenen Bedingungen

$$-1 < x < +1, \quad 0 < y < \sqrt{1-x^2},$$
$$\frac{\sigma_1}{\varrho} < x < \frac{\sigma_2}{\varrho}, \quad 0 < y < \infty$$

einzuhalten. Diess geschieht in Beziehung auf y, wenn diese Variabele auf das kleinere der beiden Intervalle, also auf $0 < y < \sqrt{1-x^2}$ beschränkt wird; hinsichtlich des x ist aber zu unterscheiden, ob die beiden Grössen $\frac{\sigma_1}{\varrho}$ und $\frac{\sigma_2}{\varrho}$ innerhalb des Intervalles -1 bis $+1$ liegen, oder ob nur eine oder ob keine zwischen -1 und $+1$ enthalten ist. In jedem Falle wählt man für x das kleinere der beiden oben angegebenen Intervalle, und gelangt damit zu folgendem Resultate:

Wenn sich die auf $x, y, z \ldots$ bezüglichen Integrationen über alle positiven und negativen, den beiden Bedingungen

$$9)\quad \left\{ \begin{aligned} &0 < \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \ldots < 1, \\ &\sigma_1 < \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots < \sigma_2, \end{aligned} \right.$$

gleichzeitig genügenden Werthe der Variabelen erstrecken, so ist

$$9\text{a})\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int \ldots f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \ldots\right) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} abc \ldots}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2)\, \varphi(\varrho x)\, y^{n-2}\, dx\, dy \end{aligned} \right.$$

und darin sind die Werthe der Integrationsgränzen x_1 und x_2 folgende

$$\begin{array}{llll} \text{für } -1 < \frac{\sigma_1}{\varrho} < \frac{\sigma_2}{\varrho} < +1, & x_1 = \frac{\sigma_1}{\varrho} & \text{und} & x_2 = \frac{\sigma_2}{\varrho}, \\ \text{„} \quad -1 > \frac{\sigma_1}{\varrho}, \quad \frac{\sigma_2}{\varrho} < +1, & x_1 = -1 & \text{„} & x_2 = \frac{\sigma_2}{\varrho}, \\ \text{„} \quad -1 < \frac{\sigma_1}{\varrho} \quad \frac{\sigma_2}{\varrho} > +1, & x_1 = \frac{\sigma_1}{\varrho} & \text{„} & x_2 = 1, \\ \text{„} \quad -1 > \frac{\sigma_1}{\varrho}, \quad \frac{\sigma_2}{\varrho} > +1, & x_1 = 1 & \text{„} & x_2 = 1. \end{array}$$

In dem sehr speciellen Falle $f(u) = \varphi(s) = 1$, $n = 3$, $\sigma_1 = \mu$ und $\sigma_2 = 1$, wo μ einen positiven oder negativen ächten Bruch bedeutet, kann man der vorigen Gleichung eine geometrische Bedeutung abgewinnen. Das Integral

$$V = \int\int\int dx\, dy\, dz$$

ist dann die Summe aller der Volumenelemente, welche sowohl innerhalb des Ellipsoides

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

als auch zwischen den beiden Parallelebenen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$

liegen; es bedeutet also V das Volumen einer ellipsoidischen Zone, wenn wir voraussetzen, dass beide Ebenen das Ellipsoid schneiden. Hierzu gehören bekanntlich die Bedingungen

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 > \mu^2, \quad a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 > 1,$$

d. i.

$$\varrho^2 > \mu^2; \quad \varrho^2 > 1,$$

von denen die erste überflüssig ist, weil wir $\mu^2 < 1$ voraussetzten. Da im vorliegenden Falle $\frac{\sigma_1}{\varrho} = \frac{\mu}{\varrho}$ und $\frac{\sigma_2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}$ zwischen -1 und $+1$ liegen, so haben wir für das Volumen der Zone den Ausdruck

$$V = 2\pi abc \int_{\frac{\mu}{\varrho}}^{\frac{1}{\varrho}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\, dx\, dy = \pi abc \left\{ \frac{1-\mu}{\varrho} - \frac{1}{3} \frac{1-\mu^3}{\varrho^3} \right\}$$

Die Richtigkeit desselben ist leicht auf gewöhnlichem Wege nachzuweisen.

Herr A. Genocchi, dem ich das Vorstehende mitgetheilt hatte, macht hierzu die gute Bemerkung, dass die ganze Analyse wörtlich dieselbe bleibt, wenn man statt der zwei Functionen f und φ, deren Argumente p und q heissen mögen, eine einzige Function der beiden Variabelen p und q betrachtet, also etwa $F(p, q)$ an die Stelle von $f(p)\,\varphi(q)$ treten lässt. In der

That ändert sich bis zu Formel 5) incl. gar nichts, nur hat man nachher vorauszusetzen, dass das eine Mal $F(p,q)$ für alle der Bedingung $0 < p < 1$ nicht genügenden p verschwindet, und dass sich im anderen Falle $F(p, q)$ bei solchen q annullirt, welche nicht innerhalb des Intervalles σ_1 bis σ_2 liegen; der Erfolg bleibt aber derselbe, nämlich immer der, dass $F(p, q)$ statt $f(p)\, \varphi(q)$ zu schreiben ist. Die mitgetheilten Resultate erhalten auf diese Weise eine nicht unwesentliche Verallgemeinerung.

Zur Molecularphysik,

angeknüpft an die neueste Schrift von Redtenbacher, das „Dynamidensystem,"

von WITZSCHEL.

Im 3. Heft des vorherg. Jahrg. unserer Zeitschrift S. 170 u. d. f. gaben wir einen kurzen Ueberblick über die Resultate von Untersuchungen zweier Physiker, bezüglich der besonderen Art von Molecularbewegungen, die sich als Wärme äussert, an welche sich zugleich einige Bemerkungen über die Constitution der Materie, namentlich auch über Aggregatverhältnisse anreihten. Mehrere seitdem erschienene oder uns zugekommene Abhandlungen, welche einen gleichen oder damit verwandten Gegenstand behandeln, namentlich die neueste Schrift Redtenbacher's: das Dynamiden-System, Grundzüge einer mechanischen Physik, Mannheim 1857; ausserdem Zernikow: Die Theorie[1] der Dampfmaschinen, in welcher die physikalischen Eigenschaften und die mechanischen Wirkungen des Dampfes von der ersten Ursache der Dampfbildung, von der Wärme, abhängig gemacht werden, Braunschweig 1857, sowie einige andere allgemeiner gehaltene Abhandlungen von Clausius[2]), Cornelius[3]), Reichardt[4]), Victor Weber[5]) geben Veranlassung auf diesen Punkt nochmals hier zurückzukommen, in-

---

1. Deren Ergebnisse, insoweit sie auf die Berechnung der Dampfmaschinen und deren einzelne Arten Anwendung finden, wir vorläufig dahin gestellt sein lassen, indem wir eine eingehendere Besprechung der Schrift uns vorbehalten.

2. Akademische Vorträge, über das Wesen der Wärme, verglichen mit Licht und Schall. Zürich, Meier und Zeller. 1857.

3. Ueber die Bildung der Materie aus ihren einfachen Elementen etc. Leipzig, O. Wiegand.

4. Die Theorie der Wärme, ein Versuch zur Erklärung der Erscheinungen von Wärme, Licht und Electricität. Jena, Döbereiner. 1857.

5. Licht und strahlende Wärme in ihren Beziehungen zu einander, mit Rücksicht auf die Identitätstheorie etc. Berlin, Bosselmann. 1857.

dem ein Referat namentlich über die erstgenannte Schrift den enger zumessenen Raum der beigehenden Literaturzeitung überschreiten möchte, andererseits die Bedeutsamkeit jener Abhandlung und der Name ihres Verfassers eine ausführlichere Anzeige unsern Lesern gegenüber rechtfertigen dürfte.

Das Dynamidensystem ist nach dem Ausspruche des Hrn. R. selbst nur eine Combination von — theilweise modificirten — Ansichten über die Constitution der Materie, wie sie vom atomistischen Standpunkte aus in den Arbeiten von Dalton, Fresnel, Ampère, Poisson und Cauchy vorliegen, also im Allgemeinen zunächst nur eine Hypothese, — was übrigens auch im Ganzen genommen die Meinungen und Ansichten aller Anderen über denselben Gegenstand sind, nur mit dem Unterschiede, dass Hr. R. diese Hypethese nach dem Vorgange der genannten Meister der Kritik durch die Rechnung, soweit als es ihm nur möglich ist, unterwirft und sich nicht begnügt eine blosse Zusammenstellung eigner wie fremder Ansichten zu geben, unbekümmert darum, ob man in der rationellen Physik damit etwas anfangen könne. In dieser Hinsicht möchte daher einigen neueren Erscheinungen gegenüber in der Literatur desselben Gegenstandes es nicht überflüssig sein, zu wiederholen, was Hr. R. in der Einleitung bezüglich einer allgemeineren Berechtigung zur Aufstellung von Hypothesen bemerkt. „Die Hypothesen sind nicht gefährlich, wenn sie nicht mit Wortkünsten“ (also nicht mit allgemeinen Phrasen) „sondern mit exakten Versuchen, oder mit scharfen analytischen Reagentien geprüft werden.“ Die Ungefährlichkeit der Aufstellung von Hypothesen steht aber nicht allein da; es ergiebt sich eine Nothwendigkeit dafür, wenn man die Mittel und Wege überdenkt, welche der Naturforschung überhaupt und der rationellen Physik insbesondere zu Gebote stehen. Wenn auch, wie Hr. R. weiter anführt, die Naturwissenschaften zuerst den Weg der Erfahrung zu betreten und mit der Induction zu beginnen pflegen, so komme doch ein gewisser Abschluss besonderer Gebiete nur erst durch eine Deduction zu Stande, in welcher die Folgerungen bestimmter Vorstellungen und Principien über die Natur des Gegenstandes der Untersuchung aufgestellt und mit den Ergebnissen der Erfahrung verglichen werden. Die Deduction ist es also auch, welche die rationelle Physik charakterisirt. So wie der wissenschaftliche Aufbau der der Astronomie erst mit der Deduction der Erscheinungen aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz durch Newton, die Optik als Wissenschaft erst mit Young und Fresnel, d. h. mit der Erklärung der Lichterscheinungen durch die Aetherschwingungen, oder strenger genommen erst mit Cauchy, der dieselben aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik erklärte, beginne; ebenso werde die rationelle Physik auch in andern Partieen nur von einer Hypothese ausgehen, da bestimmte Ansichten über die Constitution der Materie durch die Erfahrung nicht vorliegen.

Die Wahl dieser Hypothese muss freilich mit Umsicht geschehen und

bei derselben darf man nicht stehen bleiben, noch weniger aber sie für mehr ausgeben, als was sie ist, ehe sie ihre Probe in einer scharfen Deduction bestanden hat.

Zur Beantwortung der Frage, welche Hypothese bezüglich der Constitution der Materie wohl die geeignetste sei, um zu Folgerungen zu gelangen, die mit der heutigen Erkenntniss der Natur harmoniren, entwirft der Herr Verfasser eine kurze Darstellung der Geschichte der bisherigen Hypothesen über das Wesen der Materie, insbesondere der atomistischen Anschauungsweise, welche im Gegensatz zu dynamischen und in Hinblick darauf, dass auf Grund nur dieser wirkliche Fortschritte in der Naturerkenntniss gemacht worden sind, allein geeignet erscheine, als Basis für weitere Untersuchungen auf diesem Gebiete untergelegt zu werden. Nach einer ausführlicheren Besprechung der Ansichten Poisson's und Cauchy's, insoweit sie den analytischen Arbeiten derselben zum Grunde liegen, geht der Verfasser zur Erklärung seines Dynamiden-Systems über.

Ob die Materie absolut untheilbare Atome enthalte oder nicht, diese Frage legt der Hr. Verf. insofern als eine unnöthige bei Seite, als für den jetzigen Stand der Physik und Chemie nur zu wissen genügt, dass die sogenannten einfachen Stoffe der Chemiker aus kleinen Körpern oder Systemen derselben bestehen, die sich bei allen physikalischen und chemischen Vorgängen wie untheilbare Stoffeinheiten verhalten. Die Annahme solcher Einheiten, welche als absolut untheilbar betrachtet werden und die in der Folge Körperatome genannt werden, wird auch in Untersuchungen solcher Erscheinungen, bei welchen diese Atome keinerlei Veränderung erleiden, zu ganz richtigen Folgerungen führen, wie auch ähnlicher Weise in der Astronomie die Planeten als untheilbare Körpereinheiten in Rechnung gebracht werden.

Diese Körperatome, von denen in einem für unsere Sinne verschwindend kleinen Raum eine ungemein grosse Zahl enthalten sein kann, sind an und für sich träge Massen, so dass keines von oder aus sich selbst seinen Zustand verändern kann, aber mit Kräften versehen zu denken, vermöge welcher sie auf andere Atome eine Einwirkung ausüben, die zunächst nur in einer Anziehung zu bestehen braucht. Ausserdem sind die Körperatome als der Schwere unterworfen zu betrachten, und wenn auch ihr absolutes Gewicht unbekannt ist, so sind doch die Verhältnisse ihrer Gewichte in den chemischen Aequivalentzahlen ausgedrückt oder gegeben. Wie die Materie in den Körperatomen der Gestalt nach vereinigt ist, kann sehr mannigfaltig gedacht werden. Die Aneinanderlagerung kann regelmässig und unregelmässig sein; in krystallinischen Stoffen lässt sie sich als eine symmetrische in Bezug auf drei recht- oder schiefwinklige Axen annehmen.

Neben den trägen und ponderabelen Körperatomen sind in der Materie noch eine andere Art von trägen Atomen anzunehmen, welche aber als der Schwere nicht unterworfen anzusehen sind, nämlich die sogenannten Aetheratome. Man hat sich dieselben so klein im Verhältniss zu den

Körperatomen und zu ihren gegenseitigen Entfernungen zu denken, dass ihre Gestalt gar nicht in Betracht kommt und alle ihre Wirkungen so erfolgen, als ob in dem Mittelpunkte ihrer Masse deren Gesammtmasse und die Kräfte vereinigt wären. Die in Begleitung der Aetheratome auftretenden Kräfte äussern sich in einer Abstossung zwischen den Aetheratomen und in einer Anziehung zwischen Körper- und Aetheratomen.

Zwischen diesen Atomen sowohl von derselben, wie von verschiedener Art treten nun gewisse Wechselwirkungen ein, welche als der Ausfluss der denselben innewohnenden Kräften anzusehen sind. Für diese werden folgende Sätze aufgestellt:

1) Die Anziehung oder Abstossung, welche von einem Atom A ausgeht, kann nicht auf seine eigne Masse, sondern nur auf die eines andern Atoms B bewegend einwirken.

2) Die Wirkung zweier Atome A und B ist wechselseitig, die Kraft von A wirkt auf die Masse von B und die Kraft von B auf die Masse von A ein.

3) Die unmittelbare Aeusserung einer Atomkraft besteht entweder in einer Anziehung, welche eine Annäherung, oder in einer Abstossung, welche eine Entfernung der Atome hervorzubringen strebt.

4) Ist die Entfernung zweier Atome sehr gross, im Verhältniss zu ihren Dimensionen, so kann man die Richtung der gegenseitigen Anziehung oder Abstossung in die Verbindungslinie der Massenmittelpunkte der Atome legen.

5) Ist dagegen die Entfernung zweier Atome im Verhältniss zu ihren Dimensionen nicht gross, so muss die Wechselwirkung der Atome nach den Regeln bestimmt werden, die bei Anziehungen von Körpern von endlicher Gestalt in endlichen Entfernungen Geltung finden, wobei man sich jedoch die Masse jedes Atoms in seinen Raum homogen vertheilt denken kann. Bei so nahe gestellten Atomen kann die Wechselwirkung derselben ausser in einer gegenseitigen Annäherung oder Entfernung auch in einer Veränderung der Lage oder in Drehungen der Atome bestehen.

6) Die Intensitäten der Wechselwirkungen sind gleich gross anzunehmen und richten sich nach Entfernung, Gestalt, Lage und materieller Beschaffenheit der Atome.

7) Bei sehr grosser Entfernung der Atome im Verhältniss zu ihren Dimensionen ist die Intensität der Wechselwirkung dem Product der Massen der Atome und einer gewissen Function der Entfernung ihrer Massenmittelpunkte proportional zu setzen.

8) Die Wechselwirkung zweier Atome ist im bewegten Zustande eben so gross, wie im ruhenden.

Nach Festsetzung dieser allgemeinen Kraftäusserungen zwischen je zwei Atomen werden in Hinsicht der verschiedenen Arten von Anziehung

noch folgende Unterschiede zwischen den in den Körper- und Aetheratomen wirksamen Kräften aufgeführt.

1) Die allgemeine Schwere, deren Aeusserungen von der materiellen Beschaffenheit der Körperatome unabhängig dem Product der Atommassen direct, dem Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung umgekehrt proportional sind. Die Aetheratome werden in ihrem Verhalten unter einander und zu den Körperatomen von der Schwere nicht afficirt.

2) Die physikalische Anziehung oder die Aeusserung derjenigen Kraft, nach welcher sich zwei identische Körperatome mit einer Intensität anziehen, die dem Product ihrer Massen ebenfalls proportional ist, sich aber hinsichtlich der Entfernung nach einem andern Gesetze als die Schwere, im Allgemeinen nach einem solchen Gesetze richtet, demzufolge die Anziehung mit zunehmender Entfernung der Atome sehr rasch abnimmt.

3) Die chemische Anziehung oder Affinität, d. i. die Anziehung zwischen heterogenen Körperatomen, wesentlich abhängig von der chemischen Beschaffenheit der Körperatome, dem Product ihrer Massen proportional, und mit der Zunahme der gegenseitigen Entfernung sehr rasch abnehmend.

4) Die Aetherkräfte. Zwischen Aetheratomen findet, wie bereits bemerkt, Abstossung, zwischen Kürper- und Aetheratomen Anziehung Statt; letztere ist abhängig von der chemischen Beschaffenheit der Körperatome. Beiderlei Wechselwirkungen sind dem Product der Atommassen proportional und richten sich nach deren gegenseitiger Entfernung so, dass sie, wenn letztere wachsen, sehr rasch abnehmen.

Gemäss diesen Eigenschaften und Kräften an den ponderabelen und imponderabelen Atomen hat man sich weiter vorzustellen, dass der Aether, vermöge der wechselseitigen Abstossung seiner Atome, die auch der Schwere nicht unterworfen sind, sich im ganzen unendlichen Raum verbreitet, alle Körper durchdringt, und in Folge der von den Körperatomen auf ihn einwirkenden Anziehung um dieselben in einem mehr oder weniger concentrirtem Zustande gelagert ist. Hiernach hat man in den Räumen zwischen den Körperatomen eine Vertheilung des Aethers anzunehmen, welche sich richtet 1) nach der Gestalt, Stellung, und Gruppirung der Körperatome 2) nach der mittleren Dichte des Aethers im Universum, 3) nach dem Verhältniss der Intensitäten der Abstossungskraft zwischen Aetheratomen und der Anziehungskraft zwischen Aether- und Körperatomen. Nach letzterem Verhältnisse insbesondere sind unter verschiedenen Umständen zweierlei Gleichgewichtslagerungen der Atome möglich.

I) Wird nämlich vorausgesetzt: 1) dass die Entfernung der Körperatome gegen ihre Dimensionen sehr gross ist; 2) dass die Intensität der Anziehung zwischen Körper- und Aetheratomen sehr gross ist im Verhältniss zur Abstossung zwischen Aetheratomen; 3) dass die Anzahl der in einer bestimmten Quantität einer Substanz befindlichen Aetheratome vielmal, z. B. Millionenmal grösser ist, als die Anzahl der Körperatome: so wird sich

der Aether atmosphärenartig um die einzelnen Körperatome lagern, so dass jede Atmosphäre ihre bestimmte Gestalt und Grenze, sowie eine nach dem Körperatome hin zunehmende Dichte hat. Ein Körperatom mit der dasselbe umgebenden Aetherhülle nennt nun Hr. R. eine **Dynamide,** um damit den Complex Alles dessen, was zur Hervorbringung irgend welcher dynamischer Effecte erforderlich ist, anzuzeigen. Unter einem Dynamidensystem versteht er dann den Inbegriff solcher im Gleichgewicht sich befindenden Dynamiden.

Der Gleichgewichtszustand eines solchen Systems wäre als bekannt anzusehen, wenn sich bestimmen liessen: 1) Die Positionen der Schwerpunkte der Körperatome, 2) die Lage (Axenrichtung) jedes Körperatoms, 3) die Gleichgewichtslagerung der Körperatome in jeder Dynamide. Bei kugelförmiger oder dem Hexaedrischen Systeme angehöriger Gestalt der Atome würde die Gleichgewichtsgruppirung so ausfällen, dass um jedes Körperatom nach allen Richtungen einerlei Elasticität stattfindet. Bei einer nach drei zu einander senkrecht oder schief stehenden Axen symetrischen Form der Atome würde dagegen eine Gruppirung entstehen, nach welcher um jedes Atom herum in verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticitäten stattfinden.

Der dynamische Zustand eines Dynamidensystems wäre bekannt, wenn man im Stande wäre anzugeben: 1) die Bewegungen des Schwerpunktes der Körperatome; 2) die drehenden Bewegungen derselben um diese Schwerpunkte; 3) die relativen Bewegungen der Aetheratome in ihren Hüllen gegen die Oberfläche der Körperatome.

II. Wird dagegen vorausgesetzt, dass 1) die Entfernung der Körperatome klein, 2) die Anziehung zwischen Körper und Aetheratomen schwach ist, so wird sich das eben beschriebene Dynamidensystem nicht bilden können, sondern der Aether in den Räumen zwischen den Körperatomen wird eine solche Gruppirung der Atome annehmen, bei welcher die Dichte der Nebeneinanderlagerung längs einer Linie, die durch die Schwerpunkte einer Reihe von Körperatomen geht, periodisch veränderlich sein wird. Aus diesen Voraussetzungen resultirt also ein System ähnlich demjenigen, welches Cauchy seinen neueren Untersuchungen zum Grunde gelegt und Doppelmedium genannt hat. In dem Doppelmedium Cauchy's ist nämlich die Dichte der Aetheratome in der Nähe der Körperatome sehr gross und nimmt von da an gegen die Mitte der Entfernung je zweier benachbarter Körperatome allmälig ab, wodurch also eine Gruppirung mit periodisch wiederkehrender Dichte entsteht. Cauchy lässt bei seinen Untersuchungen, die noch nicht zum Abschluss gekommen sind, übrigens sehr grosse analytische Schwierigkeiten darbieten, die Bewegungen bei Seite, welche an den Körperatomen vorausgesetzt werden können und betrachtet nur den Bewegungszustand des Aethers.

Das Doppelmedium Cauchy's mit periodisch gruppirtem Aether würde

denjenigen festen Substanzen entsprechen, deren Atome gegen den Aether nur eine schwache Anziehung ausüben; das Dynamidensystem Redtenbacher's denjenigen festen Substanzen, deren Körperatome die Aetheratome sehr stark anziehen, sowie den tropfbaren Flüssigkeiten, Gasen und Dämpfen.

Die mathematische Theorie des Doppelmediums würde die des Dynamidensystem als speciellen Fall in sich schliessen, doch bietet erstere in dieser Allgemeinheit aufgefasst, sehr grosse analytische Schwierigkeiten dar, deren Bewältigung Herr Redtenbacher sich vorläufig noch nicht anheischig hat machen wollen. Deshalb hat er seine Untersuchungen auf das Dynamidensystem beschränkt. Man mag aber ja nicht glauben, dass die analytische Behandlung dieses Systemes eine so leichte Sache gewesen ist, im Gegentheil, vorliegende Untersuchungen dürften deutlich genug darthun, dass es schon ungewöhnlicher Umsicht und Gewandheit in der Analysis bedarf, um dieselben einem nur einigermassen dankbaren Resultate entgegen zu führen.

Die zusammengesetzte Dynamide oder eine Gleichgewichtsgruppe von zwei oder mehreren ungleichartigen Körperatomen mit der derselben gemeinschaftlich umgebenden Aetherhülle bezeichnet Hr. R. weiter als ein Molekül, das also für ein Product eines chemischen Processes anzusehen ist. In der Bildung der Moleküle nach ihrem Inhalte und der Gruppirungsweise der darin befindlichen Atome sind die chemischen Eigenschaften eines einfachen Stoffes begründet, welche von der Menge der Moleküle, ihrer Nebeneinanderlagerung und dem Aggregatzustande im Allgemeinen unabhängig sind.

Sowie sich indessen einzelne Atome zu der Gleichgewichtsgruppe eines Moleküls vereinigen können, so ist es auch möglich, dass zwei und mehrere gleichartige oder ungleichartige Moleküle zu einem zusammengesetzten Molekül zusammentreten, und dass diese Zusammensetzungen wieder ein zusammengesetztes Molekül höherer Ordnung bilden.

Die Grundgestalt einfacher Moleküle richtet sich nach der Zahl und Lagerung ihrer Atome. Binäre, ternäre, quaternäre Verbindungen geben stabförmige, dreieckige, tetraedrische Moleküle. Die Stabilität des Gleichgewichtszustandes innerhalb eines Moleküls hängt von der Anzahl und Grundform der Atome, der gegenseitigen Lage ihrer Schwerpunkte und der Stellung ihrer Axen, sowie auch von der Intensität ihrer chemischen Anziehung (Affinität) ab. In letzterer Hinsicht ist wohl anzunehmen, dass die Stabilität bei einer kleinen Anzahl energisch sich anziehender Atome stärker sein wird. Aehnlichen Bedingungen ist auch der Bestand der Moleküle von höherer Zusammensetzung unterworfen.

Dass es für einen und denselben Complex von Atomen mehr als eine stabile Gleichgewichtslagerung geben kann, ist leicht begreiflich, (Isomerie); ebenso, dass bei einer Vereinigung von wenig Atomen weniger ver-

schiedene Gleichgewichtslagerungen vorkommen werden. Auch die Grundgestalt der Atome bleibt dabei nicht ohne Einfluss, insofern einaxige und isoparametrische Formen eher eine und dieselbe Gleichgewichtslagerung veranlassen, als zwei- oder dreiaxige.

In unmittelbaren Zusammenhang damit lässt sich auch die Erklärung des Isomorphismus bringen. Denkt man sich in einem Molekül ein Atom durch ein nach gleichem Axensystem gebildetes vertreten, so wird die Gestalt der Zusammensetzung oder des Moleküls keine Veränderung erleiden, wenn auch der Stoffgehalt desselben gewechselt hat.

Unter der Voraussetzung, dass die Masse jedes Körperatoms seinen Raum continuirlich ausfüllt, kann man sich die Wechselwirkung zweier Dynamiden A und B, die in einer gewissen Entfernung von einander stehen, aus folgenden gegenseitigen Einwirkungen bestehend vorstellen:

1) Die in jedem unendlich kleinen Volumtheilchen des Körperatoms von A enthaltene Masse zieht die in jedem unendlich kleinen Volumtheilchen von B enthaltene Masse an.

2) Die in jedem unendlich kleinen Volumtheilchen von A enthaltene Masse zieht jedes Aetheratom der Hülle von B an.

3) Jedes Aetheratom der Hülle von A zieht jedes unendlich kleine Massentheilchen des Körperatoms von B an.

4) Jedes Aetheratom der Hülle von A stösst jedes Aetheratom von B ab.

Das Resultat dieser gegenseitigen Einwirkungen hängt ab von der Entfernung der Schwerpunkte der Körperatome der Dynamiden; von der Gestalt und dem Axensystem derselben; von der Lage der Schwerpunktslinie gegen die Richtung der Axen der Körperatome.

Hiernach beruht der Bestand eines Dynamidensystems nicht auf einer blosen Nebeneinanderstellung der Atome, sondern in der Dauer eines gewissen Gleichgewichtszustandes zwischen den gegenseitigen Einwirkungen der Dynamiden auf einander dergestalt, dass in Folge dessen jedes Atom seine Stelle nicht ohne Zutritt neuer in das System oder dessen Theile einwirkender Kräfte verändert und dann, wenn diese Aussenwirkungen aufhören, seinen Ort wieder mit einer gewissen Energie einzunehmen sucht, wie es die Natur eines Gleichgewichtszustandes, dessen Stabilität nicht aufgehoben ist, erfordert. Durch heftige äussere Einwirkungen kann aber diese Stabilität gänzlich zerstört werden; wodurch nach Umständen sehr verschiedene Bewegungen der Atome durcheinander, Auflösungen der Dynamiden und Moleküle, zeitweilige Zusammenstellungen zu ganz neuen Gruppen und Wiederauflösungen derselben, kurz ein beständig wechselnder chaotischer Zustand hervorgerufen wird, der so lange dauert, bis entweder der alte Gleichgewichtszustand wieder hergestellt ist, oder ein neuer zu Stande kommt, in welchem möglicher Weise ganz andere Atomgruppirungen vorhanden sind, der also, wenn keins der Atome aus dem ganzen Complex aus-

geschieden ist, einem isomeren Stoffe zum Grunde liegt. Mit solchen Aufhebungen des stabilen Gleichgewichtszustandes mögen die chemischen Processe begleitet sein, deren statische und dynamische Verhältnisse zu bestimmen in schon hieraus ersichtlicher Weise mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Die minder heftigen Einwirkungen auf den Gleichgewichtszustand eines Dynamidensystems, welche nicht eine gänzliche Aufhebung desselben zur Folge haben, veranlassen nur gewisse Bewegungen der Atome um ihre anfänglichen Positionen, Schwingungen, und diese Bewegungszustände sind es, mit deren Erörterung Hr. R. sich eingehender beschäftigt hat.

Im Allgemeinen müssen die Bewegungen der Körper und Aetheratome in den Dynamiden sich nach der Art der äussern Einwirkung, sowie nach der innern Zusammensetzung des Dynamidensystems richten. Möglicher Weise können in den Kernen — d. h. in den ponderabelen Theilen der Dynamiden — und in den Hüllen besondere Elementarbewegungen entstehen und aus diesen wieder zusammengesetzte Bewegungen hervorgehen. Die Elementarbewegungen der Kerne können bestehen 1) in grad- oder krummlinigen Schwingungen der Schwerpunkte; 2) in continuirlich kreislinigen oder krummlinigen Bewegungen der Schwerpunkte; 3) in continuirlichen Rotationen der Kerne um freie Axen ihrer Gestalten, d. h. um Axen in Bezug auf welche sich die Centrifugalkräfte das Gleichgewicht halten; 4) in drehenden Schwingungen der Kerne um gewisse Axen, wie die Schwingungen der Magnetnadel. Zu diesen Elementarschwingungen der ponderabelen Theile der Dynamiden können noch folgende der Aetheratome in den Hüllen hinzutreten: 1) radiale Schwingungen der Aetheratome, wobei sich die Hüllen abwechselnd ausdehnen und zusammenziehen; 2) continuirlich rotirende Schwingungen der Aetherhüllen um die Kerne oder mit den Kernen; 3) drehende Hin- und Herschwingungen der Hüllen mit den Kernen, oder gegen die Kerne.

In den meisten Fällen werden diese Elementarbewegungen nicht einzeln, sondern zu zweien oder mehreren, möglicher Weise zu allen sieben zugleich, auftreten und sich zu weiteren Bewegungen zusammensetzen.

Im Allgemeinen werden die Bewegungen der Aetheratome viel schneller vor sich gehen, als die der Körperatome, weil nach den früheren Voraussetzungen die Masse eines Aetheratoms oder vielmehr die aller Aetheratome einer ganzen Hülle noch verschwindend klein gegen die Masse eines Körperatoms ist, die Intensitäten der Kräfte jedoch, welche sich in Abstossungen zwischen den Aetheratomen und in Anziehungen zwischen Aether- und Körperatomen äussern, verhältnissmässig sehr gross sind.

Den Vorgang, nach welchen in den Dynamiden die erwähnten Elementarbewegungen vor sich gehen, nennt Hr. R. eine Wellenbewegung. Zur Erklärung dieses Vorganges führt er zuerst ein lineares System von Dynamiden $A\,B\,C\ldots Z$ vor. Wird gegen A ein Stoss ausgeübt, so wird,

wegen Störung des Gleichgewichts zwischen *A* und *B* auch *B* davon afficirt und geräth in Bewegung, was eine Störung des Gleichgewichts zwischen *B* und *C*, eine Bewegung von *C* zur Folge hat u. s. w. Auf diese Weise kommt die ganze Dynamidenreihe in Bewegung, doch bleibt der wahre Vorgang nicht bei diesem so detaillirten einfachen Bewegungszustande stehen, sondern ist complicirter. Denn mit dem Beginn der Bewegung von *A* wird nicht blos *B*, sondern auch *C*, *D*... zur Bewegung angeregt und jede Bewegung eines Atoms ruft in allen übrigen auch entsprechende Bewegungen hervor, mithin besteht die sich fortpflanzende Totalbewegung aus einer unendlichen Menge von Elementarbewegungen. In diesem Vorgange sucht Hr. R. eine Erklärung für die Dispersion im Allgemeinen und derjenigen des Lichts insbesondere. Würde die sich fortpflanzende Bewegung nur in einer einzigen Elementarschwingung bestehen, bei welcher jede Dynamide nur auf die unmittelbar vor ihr stehende und nicht zugleich auf die ferner liegenden einwirkte, so könnte die Dispersion nicht eintreten. In der That hat Hr. R. in den diesen allgemeinen Betrachtungen folgenden Rechnungen von der Entstehung des farbigen Lichts und der Dispersion desselben Resultate und Formeln aufgestellt, welche mit den Beobachtungen über die erwähnten Erscheinungen gut übereinstimmen und namentlich im Gegensatz zu den Ergebnissen der Rechnungen Cauchy's, denen zufolge die Dispersion für alle Medien gleich gross sein müsste, in bessern Einklange zu dem beobachteten Sachverhalte stehen.

Eine weitere Erwägung der Bewegungsverhältnisse an dem erwähnten linearen Dynamidensystem giebt Hrn. R. noch zu folgenden allgemeinen Bemerkungen Veranlassung. Die Fortpflanzung der Bewegung durch die Dynamidenreihe erfolgt insofern wie die eines Stosses durch eine Reihe von Elfenbeinkugeln, als hier wie dort jede Kugel oder Dynamide nicht die ganze lebendige Kraft, die sie erhalten, an die nächstfolgende abgiebt, sondern einen Theil davon zurückbehält. Ist also in Folge eines auf die erste Dynamide ausgeübten Stosses eine Welle durch die ganze Reihe hindurchgegangen, so wird noch jede Dynamide gemäss der zurückbehaltenen lebendigen Kraft eine entsprechende Bewegung annehmen, welche in den einzelnen Dynamiden verschieden und im Allgemeinen von der ersten bis zur letzten abnehmend sein wird. Wird beispielsweise angenommen, dass jede Dynamide von der erhaltenen lebendigen Kraft nur 0,9 oder allgemeiner nur ε an die folgende abgebe, und ist die der ersten Dynamide *A* ertheilte lebendige Kraft $= l$, so sind die nach einem Wellendurchgange restirenden lebendigen Kräfte

$$\begin{array}{llllll} \text{in} & A, & B, & C, & D, & E\ldots \\ & l(1-\varepsilon), & l\varepsilon(1-\varepsilon), & l\varepsilon^2(1-\varepsilon), & l\varepsilon^3(1-\varepsilon), & l\varepsilon^4(1-\varepsilon)\ldots \end{array}$$

Die Wiederholung des Stosses gegen die erste Dynamide lässt in der Dynamidenreihe zuletzt einen gewissen Beharrungszustand der Bewegungen

entstehen, nach welchem die Bewegungszustände von der ersten bis zur letzten Dynamide nach einem gewissen Gesetze abnehmen.

Auf diesen restirenden Bewegungen in den Aetherhüllen sollen die Leitungserscheinungen beruhen; für einen guten Leiter ist ε gross, für einen schlechten klein.

Die drei oben bemerkten Bewegungsarten der Aetheratome in den Hüllen bestimmen nach der Ansicht des Hrn. R. zum Theil auch den physikalischen Zustand einer Dynamide. Im ruhigen Zustand ist eine Dynamide weder warm, noch electrisch, noch magnetisch anzunehmen; im bewegten Zustande treten erst die Erscheinungen der Wärme, Elektricität und des Magnetismus auf. Weil die Wärmeerscheinungen mit Volumveränderungen der Körper verbunden sind, die beiden andern Erscheinungen dagegen ohne dieselben vor sich gehen, so vermuthet Hr. R., dass die ersteren auf Radialschwingungen der Aetheratome, bei welchen die Aetherhülle ausgedehnt und ihre Repulsivkraft gesteigert wird, beruhen. Die continuirlich rotirende Bewegung der Aetherhüllen soll ferner dem elektrischen Strome entsprechen und durch Verbindung der rotirenden Bewegung der Dynamiden mit der drehenden Bewegung der Erde eine axiale Stellung der Dynamide hervorgebracht werden, worauf möglicher Weise die Erscheinung des Magnetismus beruhen könne. Die eigenthümlichen Bewegungsweisen der Atome einer Dynamide können durch verschiedene Veranlassungen in einander übergehen oder eine in die andere verwandelt werden. Aus Schwingungen der Körperatome können Aetherschwingungen entstehen, Aetherschwingungen gewisser Art können in die anderer Art umgesetzt werden; d. h. durch besondere äussere Einwirkungen kann Wärme in Licht, Elektricität und umgekehrt übergehen, wie so viele Erscheinungen dies andeuten.

Es ist dabei keineswegs nothwendig, dass jedesmal diese secundären Bewegungsweisen, sich in ihrer Totalität irgendwie fühlbar machen oder in Erscheinungen bekannter Art sich manifestiren. Es ist möglich, dass bei schwächeren Störungen des Gleichgewichts, unter denen zunächst entweder nur die Körper- oder nur die Aetheratome afficirt werden, die mit auftretenden oder dadurch hervorgerufenen Schwingungen der Aether- oder Körperatome so schwach sind, dass sie nicht empfunden werden können. Werden z. B. Schallschwingungen erregt, so mögen zwar die Aetheratome mit den Körperatomen mit hin und her bewegt werden, allein mit einer so geringen Geschwindigkeit, bei welcher keine erheblichen Wärmewirkungen zum Vorschein kommen. Umgekehrt können die äuserst raschen Aetherschwingungen wohl auch die Körperatome in gewisse Bewegungen versetzen, allein dieselben werden dann in einer für unsere Sinne nicht mehr wahrnehmbaren Weise vor sich gehen oder für uns spurlos vorübergehen. Diese Verhältnisse können in gewissen Fällen die mathematische Behandlung dahin gehöriger Fragen in sofern erleichtern als man z. B. bei Schallschwingungen nicht die Aetherschwingungen, bei letzteren nicht die Körperschwin-

gungen zu berücksichtigen braucht. Es werden aber auch Fälle genug sich vorfinden, in denen der Einfluss der Aetherschwingungen sich auf Zustände der ponderabelen Atome und umgekehrt geltend macht.

Diese allgemeine Auseinandersetzung des Dynamidensystems, welche im Vorstehenden theilweise mit den eignen Worten des Verfassers wiedergegeben ist, findet man der Hauptsache nach auch in den schon im Jahre 1852 von demselben Verfasser erschienenen „Principien der Mechanik und des Maschinenbaues S. 19—41. Aus demselben lassen sich zwar auch schon ohne Rechnung Erklärungen von mancherlei physikalischen Erscheinungen in ungezwungener Weise ableiten, doch unterwirft Hr. R. dasselbe einer genaueren Prüfung und Formulirung mittels der Rechnung. Von diesem grösseren und selbstverständlich wichtigsten Theile der Schrift lässt sich schwer ein Auszug geben und es mögen daher nachstehends nur die Hauptprobleme noch angeführt werden, welche Hr. R. in ebenso scharfsinniger wie umsichtiger Weise einer Lösung entgegenzuführen unternommen hat.

Diese analytischen Untersuchungen sind in drei Abschnitten mitgetheilt. Im ersten werden die hauptsächlichsten Wärmeerscheinungen, welche aus der Natur derselben, als einer Bewegungsart, Bezug haben, der Rechnung unterzogen. Die Temperatur oder die Intensität eines Wärmezustandes wird hierbei der mittleren lebendigen Kraft des einzelnen Aetheratoms proportional und von der Dichte des Aethers unabhängig gesetzt. Diese Annahme giebt für die Rechnungen einen Ausgangspunkt, von dem aus die Folgerungen mit den Thatsachen harmoniren. Man erkennt hieraus auch sofort wie diese Annahme eine mechanische Wärmetheorie involvirt. Die vielerlei interessanten Folgerungen, (Arbeit welche der Erwärmung entspricht, Aetherausscheidung bei chemischen Processen, bei der Dampfbildung, potenzirtes Mariotte'sches Gesetz etc.), zu denen Hr. R. durch seine Rechnungen geführt wird, einzeln und bestimmt anzugeben, würde hier zu weit führen, wir können nur die Einsicht des Originals empfehlen. Der zweite Abschnitt behandelt das Gleichgewicht eines Dynamidensystems. Von den Folgerungen, welche hierbei sich ergeben, seien nur erwähnt: der absolute Nullpunkt der Temperaturen ist — 272°,56, die Abstossung zweier Aetheratome ist ihrer Entfernung verkehrt proportional. Im dritten Abschnitte werden die Bewegungen eines Dynamidensystems näher untersucht, und zwar sowohl die Schwingungen der Körperatome wie die der Aetheratome. Bei letzteren kommt der Hr. Verfasser auf die Theorie der Lichtschwingungen, der Dispersion des Lichtes und die Beantwortung der Frage, warum es keine Dispersion der Körperschwingungen gebe.

Die im Eingange des erwähnten ersten Abschnitts über die Wärme aufgestellten Begriffe über Wärmeverhältnisse, welche sich auf Temperatur, Wärmecapacität, (rationelle oder wahre und empirische, erstere gleich der Anzahl der Aetheratome, welche in der Gewichtseinheit eines Körpers enthalten sind), auf Atomvolumen in Verbindung mit specifischer Wärme,

auf die der Erwärmung eines Körpers entsprechende Arbeit, oder auf das mechanische Aequivalent einer Wärmeeinheit beziehen, hat Hr. R. nach eigner Angabe bereits seit längerer Zeit (15 Jahren) sich zurechte gemacht und theilweise bei seinen Vorträgen über technische Benutzung der Wärme gebraucht. Sie stimmen zum Theil mit den auch anderwärts und von Anderen gegebenen Ansichten bezüglich der genannten Verhältnisse, namentlich des mechanischen Arbeitsäquivalents überein, wenn auch die gewählten Ausdrücke dafür noch verschiedentlich geformt sind.

Es kann wohl im Ganzen betrachtet als fest angenommen werden, dass alle namhaften Physiker die Wärme als einen Bewegungszustand auffassen und von dieser Idee getragen darauf bezügliche Untersuchungen in Angriff nehmen. Diese Ansicht wird der leitende Gedanke sein für die Anstellung und Beurtheilung neuer Versuche sowohl als auch für die Aufstellung einer umfassenderen Theorie der Wärme insbesondere, oder überhaupt einer Statik und Dynamik von Molekularsystemen, begründet auf die allgemeinen Principien der Mechanik. Als ein Versuch, die Wärme gleichsam mehr in das Bereich der allgemeinen Mechanik mit hineinzuziehen, lässt sich die Theorie der Dampfmaschinen von Zernikow ansehen, in welcher die physikalischen Eigenschaften und mechanischen Wirkungen des Dampfes von der ersten Ursache der Dampfbildung, der Wärme, abhängig gemacht werden. Die Beurtheilung dieser Theorie vom technischen Standpunkte aus, der hier mit zu berücksichtigen ist, würde hier zu weit führen.

Die Analogien zwischen Licht und Wärmeerscheinungen, durch Melloni's Arbeiten entdeckt und hervorgehoben, sind für die neueren Theorien der Wärme nicht ohne Einfluss gewesen und werden voraussichtlich auch weiter von Bedeutung bleiben. Diese Analogien sind recht gut zusammengestellt in der Eingangs erwähnten Schrift von V. Weber: „Licht und strahlende Wärme etc." Dieselbe enthält eine allgemeine und leicht fassliche Licht- und Wärmelehre mit Berücksichtigung auch der neueren experimentalen Untersuchungen über die Natur des Lichts und der strahlenden Wärme.

In einem für ein gemischtes Publikum berechneten Vortrage über das Wesen der Wärme verglichen mit Licht und Schall hat Herr Clausius ein übersichtliches Bild von den ähnlichen Verhältnissen an den genannten Vorgängen gegeben. Es sind darin zum Theil einige der Resultate berührt, deren Entwickelung und Begründung derselbe Herr Verfasser in wissenschaftlichen Zeitschriften und anderwärts bekannt gemacht hat. (Vergl. auch diese Zeitschrift II. 3. S. 170.) Ein Vergleich des Schalles und der Wärme, insofern jener durch die Schwingungen eines festen Körpers erzeugt, durch Luftwellen fortgepflanzt wird und durch letztere wieder die Theile eines andern festen Körpers in Schwingungen versetzt werden, während die Wärme durch Schwingungen ponderabeler Theilchen hervorgerufen, durch Aetherwellen (Strahlungen) weiter verbreitet wird und hierauf

wieder ponderabele Theilchen eines andern Körpers in Bewegung setzt — dieser Vergleich, schon an und für sich nicht uninteressant, kann möglicher Weise auch Anhalt geben, die Art der besonderen Bewegung, welche Wärme heisst, bestimmter zu formuliren. Freilich sind die mathematischen Ausdrücke für die Schwingungen fester Körper, in gehöriger Allgemeinheit gehalten, complicirt genug, so dass eine entsprechende Modification derselben, wie sie für Wärmeverhältnisse erforderlich werden, und die jedenfalls in keiner Vereinfachung bestehen würde, nicht geringe Schwierigkeiten in Aussicht stellt.

Die analytischen Schwierigkeiten, die überhaupt der Calcul für Molekularverhältnisse darbietet und deren Bewältigung die Anstrengungen der bedeutendsten Mathematiker in hohem Grade in Anspruch nimmt, dürften wohl der Grund sein, weshalb Viele, mit dem grössten Interesse für Fragen dieser Art zwar beseelt, doch an eine Betrachtung des Gegenstandes in nur ganz allgemeinen Umrissen gehen können und sich begnügen müssen, die Haltbarkeit aufgestellter Ansichten und Hypothesen durch Analogien zu begründen, statt durch die Rechnung zu prüfen. In diesem Sinne dürfte auch die Schrift: „Ueber die Bildung der Materie aus ihrem einfachen Elementen" etc. von Cornelius aufzufassen sein. Es werden in derselben die üblichen Ansichten über Aggregation von Massentheilchen gleichfalls vom Standpunkte der physikalischen Atomistik aus aufgestellt, die Gleichgewichts- und dynamischen Verhältnisse eines Systems solcher Massentheilchen durch Annahme eines gewissen Gegensatzes zwischen letzteren erklärt, die Beziehung zwischen ponderabeln und imponderabeln Atomen übrigens auch so fest gestellt, dass letztere die ersteren sphärenartig umgeben und in Radialschwingungen versetzt werden können, welche sich in Ausdehnungen und Zusammenziehungen der Aetherhüllen und in Volumveränderungen der Systeme manifestiren. Wie aber die gegenseitige Annäherung oder das, was einer Anziehung gleich kommt, durch den angenommenen Gegensatz zwischen den Elementen zu Stande kommt, ist Referent unklar geblieben, wenigstens hat er sich keine Maasseinheiten bilden können, welche mit der Zahl in Verbindung gebracht auch nur von den einfachsten Gleichgewichtsverhältnissen ihm eine präcise Vorstellung ermöglichte. Desgleichen bleibt ihm die Nebeneinanderlagerung der Elemente bei theilweiser Durchdringung der Aethersphären etwas unerklärliches und nicht minder die darauf basirten Erklärungen der Anziehung und Gravitation.

Was schliesslich die von Herrn Dr. Reichardt zusammengestellte Theorie der Wärme betrifft, so ist in der Eingangs erwähnten Schrift eine Ansicht welche der mechanischen Theorie der Wärme direct widerspricht, festgehalten, nämlich die Annahme eines besonderen Wärmestoffs, von dem jeder Körper eine unabänderliche Menge für das Bestehen seines Zustandes gebunden enthalte. Eine Widerlegung der auf diese Voraus-

setzung gegründeten Behauptungen würde zu weit führen und dürfte auch in sofern überflüssig sein, als den Deductionen des Hrn. Verf. nicht selten die erforderliche Schärfe abgeht. Wenn z. B. S. 49 es heisst: „Stoff oder Kraft? ist die unzählige Male auch für die Wärme aufgeworfene Frage. Nehmen wir an, dass die Körperlichkeit oder Stofflichkeit ganz unabhängig sei von der bis jetzt uns möglichen Bestimmung durch die Waage, so steht der Annahme des Wärmestoffs auch gar nichts (?) mehr entgegen.“ Oder S. 51: „Dass aber Wärme ein Bewegungszustand sei, dagegen sprechen namentlich die Erscheinungen des Mangels der Wärme, wo Bewegungen, welche in der Grösse und Stärke nicht zu unterscheiden sind, nicht Wärme sondern Kälte — Mangel von Wärme — hervorbringen“; wobei für letztere Behauptungen als Beleg die Condensation der gasförmigen Kohlensäure verglichen auch mit der Condensation des Wasserdampfes beigefügt werden: — so kann wohl von einem näheren Eingehen auf diese und ähnliche Deductionen hier Umgang genommen werden.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber Flächen von gewisser Krümmung. Die Differentialgleichung derjenigen Flächen, für deren jeden Punkt die Summe der Hauptkrümmungen verschwindet, ist bekanntlich, wenn man sich der Monge'schen Bezeichnungsweise bedient, die folgende:

$$(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t=0.$$

Um die ihr genügenden Oberflächen anzugeben, setzen wir die Gleichung derselben in folgender Form voraus:

$$x=f(\alpha,\beta),\ y=\varphi(\alpha,\beta),\ z=\psi(\alpha,\beta).$$

Führt man der Kürze wegen folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}-\frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial z}{\partial\alpha}=X,\ \frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial z}{\partial\alpha}-\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}=Y,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}-\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}=Z,$$

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}=D_0,\qquad E=\frac{\partial x^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial y^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial z^2}{\partial\alpha^2}$$

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha,\partial\beta}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta}=D_1,\qquad F=\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}$$

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial\beta}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial\beta}=D_2,\qquad G=\frac{\partial x^2}{\partial\beta^2}+\frac{\partial y^2}{\partial\beta^2}+\frac{\partial z^2}{\partial\beta^2}$$

so geht die obige Differentialgleichung durch die entsprechende Transformation, die übrigens anderweit bekannt ist, über in:

$$E D_2 - 2 F D_1 + G D_0 = 0.$$

Wählt man x, y und z derart, dass

$$E = 0, \quad G = 0,$$

so ist noch die Gleichung

$$D_1 = 0$$

zu erfüllen, welcher genügt wird durch $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0$,

oder durch:

$$x = f(\alpha) + F(\beta), \; y = \varphi(\alpha) + \Phi(\beta), \; z = \psi(\alpha) + \Psi(\beta).$$

Gleichzeitig geschieht der Bedingungen $E = 0$, $G = 0$ Genüge, wenn die 6 willkührlichen Functionen so gewählt werden, dass:

$$f'(\alpha)^2 + \varphi'(\alpha)^2 + \psi'(\alpha)^2 = 0$$
$$F'(\beta) + \Phi'(\beta)^2 + \Psi'(\beta)^2 = 0.$$

Es wird daher folgendes Gleichungssystem ein Integral der obigen Differentialgleichung sein:

$$x = f(\alpha) + F(\beta), \; y = \varphi(\alpha) + \Phi(\beta), \; z = i \int \sqrt{f'^2 + \varphi'^2} \, d\alpha - i \int \sqrt{F'^2 + \Phi'^2} \, d\beta,$$

welches System ein reelles Resultat giebt, wenn man setzt

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \; \varphi(x) = f_3(x) + i f_4(x), \; F(x) = f_1(x) - i f_2(x)$$
$$\Phi(x) = f_3(x) - i f_4(x),$$

wo f_1, f_2, f_3, f_4 willkürliche reelle Functionen bedeuten, wovon man sich überzeugt, wenn man die Substitution ausführt, und alsdann α mit $\mu + \nu i$, β mit $\mu - \nu i$ vertauscht. Trotzdem dies Integral vier willkürliche Functionen enthält, ist es jedoch nicht allgemeiner, als mit zwei willkührlichen Functionen, wie dies in der Natur der Sache liegt. Ein solches ist gegeben durch die Gleichungen:

$$x = \int \varphi'(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha + \int \Phi'(\beta) \cos \beta \, d\beta$$
$$y = \int \varphi'(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha + \int \Phi'(\beta) \sin \beta \, d\beta$$
$$z = i \left[\varphi(\alpha) - \Phi(\beta) \right]$$

oder falls man ein von den Integrationszeichen freies Gleichungssystem wünscht, durch das folgende:

$$x = \varphi'(\alpha) \sin \alpha + \varphi''(\alpha) \cos \alpha + \Phi(\beta) \sin \beta + \Phi''(\beta) \cos \beta$$
$$y = \varphi'(\alpha) \cos \alpha - \varphi''(\alpha) \sin \alpha + \Phi''(\beta) \cos \beta - \Phi'(\beta) \sin \beta$$
$$z = i \left[\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha) - \Phi(\beta) - \Phi''(\beta) \right],$$

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man bemerkt, dass allen verlangten Bedingungen genügt wird. Uebrigens geben beide Systeme durch Elimination von α und β reelle Resultate, wenn man wie oben die Functionen φ und Φ durch conjugirte imaginäre Functionen ersetzt.

Es ist noch von Wichtigkeit zu bemerken, dass man aus dem letzten System algebraische Flächen der verlangten Eigenschaft erhält, wenn man

für φ und Φ algebraische Funktionen des *Sinus* oder *Cosinus* der Variabeln substituirt.

Berlin. JULIUS WEINGARTEN.

II. Ueber einige geometrische Sätze von Flächen. I. Die Sätze über Krümmungslinien centrischer Flächen 2. Grades, welche Herr KÜPPER im 4. Hefte 2. Jahrgangs, anführt, lassen sich direct auf ein zweites System von Flächen übertragen, welches man durch Transformation mittelst reciproker Radienvektoren erhält. Zieht man nämlich von einem Punkt O nach beliebigen Punkten $M, M' \ldots$ einer Fläche F Radien, und bestimmt auf ihren Richtungen die Punkte $m, m' \ldots$, so dass $OM.Om = OM'.Om' =$ *const.*, so liegen diese Punkte m, m'.. auf der transformirten Fläche f. Es ergiebt sich nun leicht, dass eine Kugel, welche durch zwei entsprechende Punkte M und m geht und zugleich F in M berührt, auch f in m berührt, woraus folgt, dass die Normalen von F und f in je zwei entsprechenden Punkten in einer Ebene liegen und mit dem Radius dieser Punkte nach entgegengesetzten Seiten hin gleiche Winkel bilden. Wenn MM' ein Element der Krümmungslinie auf F ist, so schneiden sich die Normalen von M und M' in N, $NM = NM'$. Man konstruire zwei Kreise, wovon der erste durch m geht und zugleich MN in M berührt; der andere geht durch m' und berührt $M'N$ in M'. Da nun die Tangenten NM und NM' beider Kreise gleich sind, ferner $OM.Om = OM'.Om'$ ist, so hat die Durchschnittslinie ihrer Ebenen, ON gleiche Eigenschaften, wie die Potenzlinien zweier Kreise in einer Ebene, woraus sich sofort ergiebt, dass sich die Tangenten in m und m' in einem Punkte n auf ON schneiden. Weil aber MN und mn in einer Ebene liegen und mit dem Radius OM nach entgegengesetzten Seiten hin gleiche Winkel bilden und MN die Normale von F ist, so muss auch mn die Normale von f sein; ebenso lässt sich zeigen, dass $m'n$ eine Normale von f ist, und die beiden Normalen sich schneiden; so ist mm' ein Element der Krümmungslinie von f.

Die Ausdehnung dieser Schlussweise auf die weiteren Elemente der Krümmungslinien führte zu dem Satz: der durch O als Spitze und eine Krümmungslinie von F als Leitende bestimmte Kegel schneidet die transformirte Fläche F wieder in einer Krümmungslinie. Nimmt man also irgendwo einen Punkt O an und zieht von ihm nach dem Ellipsoid und den beiden Hyperboloiden, die sich gegenseitig in ihren Krümmungslinien schneiden, Radien, und bildet auf die angegebene Weise die transformirten Flächen, so schneiden sich diese ebenfalls in ihren Krümmungslinien. Auch die Sätze über das Ellipsoid S. 227 lassen sich übertragen.

II. Ein specieller Fall dieser Transformation ist die stereographische

Projektion. Der Punkt O, von welchem aus die Radien gehen, liegt auf einer Kugelfläche K, deren Mittelpunkt C. Die Transformirte von K ist eine Ebene, E, senkrecht auf OC. Einem Kreise auf K entspricht wieder ein Kreis auf E. Drei Kreise auf K erscheinen, wo auch O auf K angenommen wird in einer zu OC senkrechten Ebene als 3 Kreise, von deren 6 Aehnlichkeitspunkten 4 mal 3 in gerader Linie liegen, mithin liegen 3 Kugelkreise auf 6 verschiedenen Kegeln, von deren Spitzen 4 mal 3 in gerader Richtung liegen. Die nachfolgenden Sätze lassen sich auf analoge Weise verifiziren. Wenn zwei Kegel mit gemeinschaftlicher Spitze in einer Kugel in Kreisschnitten eindringen, so sind auch die Austrittscurven Kreise; vier solche Kreise liegen auf 12 Kegeln, von deren Spitzen zweimal sechs und achtmal drei in gerader Linie liegen; ihre Ebenen schneiden sich in einem Punkt; es lassen sich 4 weitere Kreise auf der Kugel ziehen, welche die 4 ersten berühren, und von welchen die nämlichen Sätze gelten.

Die genannten Sätze über Kugelkreise lassen sich durch Verwandlung mittelst proportional getheilter Ordinaten auf das Drehungs- und von diesem auf das allgemeine Ellipsoid übertragen, die Kreise verwandeln sich dabei in Ellipsen.

III. Es ist eine Ellipse gegeben, mit zwei zugeordneten Durchmessern AB und CD, die sich im Mittelpunkt O scheiden. Man lege durch AB unter beliebigen Winkel eine Ebene oder Tafel T und ziehe in T durch O senkrecht auf AB eine Linie Zz, $OZ = Oz = OA = OB$. Der geometrische Ort des Augpunkts, von welchem aus die Ellipse auf T als Kreis erscheint, ist eine Hyperbel, von welcher CD ein reeller und Zz der zugeordnete imaginäre Durchmesser ist. Wenn AB ein imaginärer und CD der zugeordnete reelle Durchmesser einer Hyperbel ist, so erscheint diese als Kreis auf T, wenn sich das Auge in einer Ellipse befindet, deren zugeordnete Durchmesser CD und Zz sind. Wenn AB eine durch den Brennpunkt einer Parabel gehende Sehne ist, deren Mitte O, so ist der Endpunkt D des dieser Sehne zugeordneten Durchmessers ein unendlich ferner Punkt; der Ort des Augpunkts eine Parabel deren Durchmesser die Verlängerung von CD ist. Die demselben zugeordnete Brennsehne ist gleich $Zz = AB$.

Ein Kreis erscheint auf einer Tafel T, senkrecht zu seiner Ebene, wieder als solcher, wenn sich das Auge irgendwo in einem einmanteligen Drehungs-Hyperboloid befindet, mit drei gleichen Axen und welches den gegebenen Kreis zum Kehlkreis hat.

Sämmtliche Kreisbilder, als welche ein Kegelschnitt K auf einer Tafel T erscheinen kann, haben den Durchschnitt von T mit der Ebene von K zur gemeinschaftlichen Potenzlinie, welche die Kreisbilder schneidet, berührt, oder ausserhalb derselben liegt, jenachdem T zwei Punkte, einen oder keinen mit K gemein hat.

Es ist ein Kegelschnitt K gegeben. Die Brennpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, von welchen aus k auf einer zu seiner Ebene senkrechten

Tafel T als Kreis erscheint, liegen so, dass sieh von jedem dieser Brennpunkte zwei sich rechtwinklig schneidende Tangenten an K ziehen lassen.

Sulz a/N. O. Böklen.

I. Bemerkungen über die Integration der linearen Differentialgleichung

$$1)\qquad (a_2+b_2 x)\, y'' + (a_1+b_1 x)\, y' + (a_0+b_0 x)\, y = 0$$

von Simon Spitzer. Der erste, der sich mit der Integration von Gleichungen dieser Art beschäftigte, ist Laplace, er setzt nämlich das Integral derselben voraus in der Form:

$$2)\qquad y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, V\, du$$

unter V eine Function von u und unter u_1 und u_2 constante Zahlen verstanden.

Man hat dann:

$$y' = \int_{u_1}^{u_2} u\, e^{ux}\, V\, du$$

$$y'' = \int_{u_1}^{u_2} u^2\, e^{ux}\, V\, du$$

und setzt man der Kürze halber

$$a_2\, u^2 + a_1\, u + a_0 = U_0$$
$$b_2\, n^2 + b_1\, u + b_0 = U_1$$

so ist das Resultat der Substitution von (2) in der vorgelegten Gleichung

$$3)\qquad \int_{u_1}^{u_2} (U_0 + U_1\, x)\, e^{ux}\, V\, du = 0$$

Nun ist aber:

$$\int_{u_1}^{u_2} U_1\, x\, e^{ux}\, V\, du = \Big[e^{ux}\, U_1\, V\Big]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \frac{d\,(U_1\, V)}{du}\, du$$

und wird dies in (3) eingeführt, so erhält man:

$$\Big[e^{ux}\, U_1\, V\Big]_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\left[U_0\, V - \frac{d\,(U_1\, V)}{du}\right] du = 0$$

was identisch stattfinden soll. Man erreicht dieses, wenn man:

$$4)\qquad U_0\, V - \frac{d\,(U_1\, V)}{du} = 0$$

setzt, und für u_1 und u_2 solche constante Zahlen wählt, welche die Gleichung

5) $$e^{ux}\, U_1\, V = 0$$

befriedigen. Aus (4) folgt:

$$V = \frac{1}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}$$

und wenn man $\frac{U_0}{U_1}$ in folgender Form voraussetzt:

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta},$$

so hat V die Gestalt:

$$V = (u-\alpha)^{A-1}\,(u-\beta)^{B-1}\,e^{mu}$$

und die Gleichung, welche zur Bestimmung der Integrationsgrenzen dient, ist:

$$(u-\alpha)^A\,(u-\beta)^B\,e^{u\,(m+x)} = 0.$$

Sind A und B positive Zahlen oder imaginäre, mit positiven reellen Bestandtheilen, so hat man für das Integral der Gleichung (1)

6) $$y = \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}\,(u-\beta)^{B-1}\,e^{u\,(m+x)}\,du$$

und dieser Ausdruck ist tadelfrei, weil sowohl y als auch y' und y'' innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch Unendliche gehen.

Geleitet durch die Arbeit Poisson's (*Journal de l'école polytechnique, tom XII pag.* 226), versuchte ich, wenn möglich, der vorgelegten Gleichung (1) durch einen Ausdruck folgender Form zu genügen:

7) $$y = \int_\alpha^\beta e^{ux}\,V\,\log\left[(a_2 + b_2 x)\,W\right]du,$$

wo V den obigen Werth, und W eine, einstweilen noch unbestimmte Function von u bedeutet.

Der Ausdruck (7) lässt sich auch so schreiben:

$$y = \int_\alpha^\beta e^{ux}\,V\log W\,du + \log(a_2 + b_2 x)\int_\alpha^\beta e^{ux}\,V\,du$$

dann ist:

$$y' = \frac{b_2}{a_2 + b_2 x}\int_\alpha^\beta e^{ux} V\,du + \int_\alpha^\beta u\,e^{ux}\,V\log W\,du + \log(a_2 + b_2 x)\int_\alpha^\beta u\,e^{ux}\,V\,du$$

$$y'' = -\frac{b_2^2}{(a_2 + b_2 x)^2}\int_\alpha^\beta e^{ux}\,V\,du + \frac{2b_2}{a_2 + b_2 x}\int_\alpha^\beta u\,e^{ux}\,V\,du + \int_\alpha^\beta u^2 e^{ux}\,V\log W\,du$$

$$+ \log(a_2 + b_2 x)\int_\alpha^\beta u^2 e^{ux}\,V\,du$$

und folglich hat man

$$(a_2+b_2x)\,y''+(a_1+b_1x)\,y'+(a_1+b_0x)\,y=$$

$$\frac{b_2(a_1+b_1x)-b_2^2}{a_2+b_2x}\int_\alpha^\beta e^{ux}\,V\,du+2\,b_2\int_\alpha^\beta ue^{ux}\,V\,du$$

$$+\int_\alpha^\beta (U_0+U_1x)e^{ux}\,V\log W\,du+\log(a_2+b_2x)\int_\alpha^\beta (U_0+U_1x)e^{ux}\,V\,du.$$

Der mit $\log(a_2+b_2x)$ multiplicirte Ausdruck verschwindet wegen der Wahl von V; nehmen wir ferner an, dass

$$\frac{b_2(a_1+b_1x)-b_2^2}{a_2+b_2x}$$

eine constante Zahl, und folglich gleich b_1 ist, so hat man:

$$(a_2+b_2x)\,y''+(a_1+b_1x)\,y'+(a_0+b_0x)\,y=$$

$$b_1\int_\alpha^\beta e^{ux}\,V\,du+2b_2\int_\alpha^\beta u\,e^{ux}\,V\,du+\int_\alpha^\beta (U_0+U_1x)\,e^{ux}\,V\log W\,du.$$

Setzt man nun, da

$$b_2u^2+b_1u+b_0=U_1$$

ist,

$$2b_2u+b_1=U_1',$$

und bemerkt man, dass

$$\int_\alpha^\beta U_1\,x\,e^{ux}\,V\log W\,du=\Big[e^{ux}\,U_1\,V\log W\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^{ux}\,\frac{d\,(U_1\,V\log W)}{du}\,du$$

ist, so hat man, da

$$\Big[e^{ux}\,U_1\,V\Big]_\alpha^\beta=0$$

ist, auch

$$\Big[e^{ux}\,U_1\,V\log W\Big]_\alpha^\beta=0$$

und somit

$$(a_2+b_2x)\,y''+(a_1+b_1x)\,y'+(a_0+b_0x)\,y=$$

$$\int_\alpha^\beta (U_1'+U_0\log W)\,e^{ux}\,V\,du-\int_\alpha^\beta e^{ux}\,\frac{d\,(U_1\,V\log W)}{du}\,du,$$

welcher Ausdruck verschwindet, wenn man W so wählt, dass

$$U_1'\,V+U_0\,V\log W-\frac{d\,(U_1\,V\log W)}{du}=0$$

wird.

Wird diese Gleichung entwickelt, so erhält man

$$U_1' V + U_0 V \log W = U_1 V \frac{W'}{W} + (U_1 V' + U_1' V) \log W.$$

Die mit $\log W$ verbundenen Glieder verschwinden in Folge der Gleichung 4), man hat daher

$$U_1' V = U_1 V \frac{W'}{W},$$

woraus

$$W = C U_1$$

folgt, unter C eine willkührliche Constante verstanden.

Wenn daher

$$\frac{b_2 (a_1 + b_1 x) - b_2^2}{a_2 + b_2 x} = b_1,$$

d. h. wenn

$$8) \qquad a_1 b_2 - a_2 b_1 = b_2^2$$

ist, so hat man für das complete Integral der Gleichung 1)

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} e^{u(m+x)} du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} e^{u(m+x)} \log [(a_2 + b_2 x)(b_2 u^2 + b_1 u + b_0)] du,$$

oder wenn man die Gleichung 1) in folgende Form bringt:

$$9) \qquad (m+x) y'' + [A + B - (\alpha+\beta)(m+x)] y' + [-(A\beta + B\alpha) + \alpha\beta (m+x)] y = 0$$

hat man, für den Fall, dass

$$A + B = 1$$

ist, folgendes Integral für die Gleichung 9)

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} e^{u(m+x)} du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} e^{u(m+x)} \log [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du,$$

unter C_1 und C_2 willkührliche Constanten, und unter A und B positive Zahlen, oder imaginäre, mit positiven reellen Bestandtheilen verstanden.

Sei $y = \varphi(x)$ das Integral der Gleichung

$$10) \qquad (m+x) y'' + [A + B - (\alpha+\beta)(m+x) y' + [-(A\beta + B\alpha) + \alpha\beta (m+x)] y = 0.$$

Wir wollen nun suchen, das Integral jener Gleichung als Function von $\varphi(x)$ anzugeben, welche man erhält, wenn man in 10) A um a wachsen lässt, unter a vor der Hand eine ganze positive Zahl verstanden.

Setzen wir in 10)

$$y = e^{\alpha x} z\,,$$

so erhalten wir:

$$11)\quad (m+x)\,z'' + [A + B + (\alpha - \beta)(m+x)]\,z' + A(\alpha - \beta)\,z = 0$$

und ihr genügt:

$$12)\qquad z = e^{-\alpha x}\,\varphi(x).$$

Differenzirt man die Gleichung 11) a mal, so hat man:

$$13)\quad (m+x)\,z^{(a+2)} + [a + A + B + (\alpha - \beta)(m+x)]\,z^{(a+1)} + (a+A)(\alpha-\beta)\,z^{(a)} = 0,$$

und ihr Integral ist auch

$$12)\qquad z = e^{-\alpha x}\,\varphi(x).$$

Setzt man nun

$$z^{(a)} = V,$$

so erhält man

$$14)\quad (m+x)\,V'' + [a + A + B + (\alpha-\beta)(m+x)]\,V' + (a+A)\,V = 0$$

und für das Integral derselben:

$$V = \frac{d^a}{dx^a}[e^{-\alpha x}\,\varphi(x)].$$

Setzt man endlich in 14)

$$V = e^{-\alpha x}\,W,$$

so erhält man die Gleichung:

$$15)\quad (m+x)\,W'' + [a + A + B - (\alpha+\beta)(m+x)]\,W' + [-\beta(a+A) - \alpha B + \alpha\beta(m+x)]\,W = 0,$$

der folgender Ausdruck genügt:

$$16)\qquad W = e^{\alpha x}\,\frac{d^a}{dx^a}\,[e^{-\alpha x}\,\varphi(x)]$$

woraus wir deutlich den Einfluss sehen, den die Aenderung von A auf das Integral ausübt.

Lässt man nun in 15) auch B um b wachsen, unter b ebenfalls vorerst eine ganze positive Zahl verstanden, so hat man für das Integral der Gleichung:

$$17)\quad (m+x)\,Y'' + [a + A + b + B - (\alpha+\beta)(m+x)]\,Y' + [-\beta(a+A) - \alpha(b+B) + \alpha\beta(m+x)]\,Y = 0$$

folgenden Werth:

$$Y = e^{\beta x}\,\frac{d^b}{dx^b}\Big[e^{(\alpha-\beta)x}\,\frac{d^a}{dx^a}\{e^{-\alpha x}\,\varphi(x)\}\Big]$$

und es lässt sich leicht nachweisen, dass dieser Ausdruck auch für beliebige Werthe von a und b stattfindet, nur dürfen die, bei den Differentiationen eingeführten Constanten nicht willkührlich sein, sondern müssen vielmehr so gewählt werden, dass der Gleichung 17) Genüge geleistet wird.

Bleibt man bei der Voraussetzung von ganzen und positiven Werthen von a und b stehen, so erhält man, wenn man den constanten Factor $(-1)^{a+b}\,\alpha^a\,\beta^b$ weglässt, durch Entwickelung des obigen Ausdrucks:

$$18)\quad Y=\varphi(x)-\frac{\binom{a}{1}\beta+\binom{b}{1}\alpha}{\alpha\beta}\varphi'(x)+\frac{\binom{a}{2}\beta^2+\binom{a}{1}\binom{b}{1}\alpha\beta+\binom{b}{2}\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\varphi''(x)$$
$$-\frac{\binom{a}{3}\beta^3+\binom{a}{2}\binom{b}{1}\alpha\beta^2+\binom{a}{1}\binom{b}{2}\alpha^2\beta+\binom{b}{3}\alpha^3}{\alpha^3\beta^3}\varphi'''(x)+\ldots$$

welche Reihe offenbar abbricht.

Mit Nutzen anwendbar ist dieses Integral dann, wenn in der Gleichung 17)

$$A+B=1$$

ist, ferner A und B positiv sind, oder imaginär, mit positiven reellen Bestandtheilen, man hat nämlich alsdann für $\varphi(x)$ folgenden Werth

$$19)\quad \varphi(x)=C_1\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du$$
$$+C_2\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log\,[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

und hierdurch bestimmt sich auch leicht das Y.

Wenn daher die gegebene Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann

$$(m+x)\,y''+[A_1+B_1-(\alpha+\beta)(m+x)]\,y'$$
$$+[-(A_1\beta+B_1\alpha)+\alpha\beta(m+x)]\,y=0$$

und hierin A_1 und B_1 positive, gebrochene Zahlen bedeuten (oder imaginäre mit positiven und gebrochenen reellen Bestandtheilen), deren Summe aber eine g a n z e positive Zahl ist, so lässt sich das Integral dieser Gleichung so ausdrücken:

$$y=\varphi(x)-\frac{\binom{a}{1}\beta+\binom{b}{1}\alpha}{\alpha\beta}\varphi'(x)$$
$$+\frac{\binom{a}{2}\beta^2+\binom{a}{1}\binom{b}{1}\alpha\beta+\binom{b}{2}\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\varphi''(x)$$
$$-\frac{\binom{a}{3}\beta^3+\binom{a}{2}\binom{b}{1}\alpha\beta^2+\binom{a}{1}\binom{b}{2}\alpha^2\beta+\binom{b}{3}\alpha^3}{\alpha^3\beta^3}\varphi'''(x)+\ldots$$

wo $\varphi(x)$ den in 19) angegebenen Werth besitzt, ausserdem

$$A=A_1-a,\quad B=B_1-b$$

ist, unter a und b die grössten ganzen positiven Zahlen verstanden, die man von A_1 und B_1 abziehen kann, und wodurch also

$$A + B = 1$$

bleiben muss.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass $\frac{U_0}{U_1}$ eine Zerlegung auf folgende Weise gestatte:

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}.$$

Im Folgenden setzen wir voraus, dass $\frac{U_0}{U_1}$ gleich sei

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha},$$

dass somit die zu integrirende Gleichung folgende Gestalt habe:

$$20)\quad (m+x)\,y'' + [B - 2\alpha(m+x)]\,y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]\,y = 0.$$

Setzt man $y = e^{\alpha x} z$, so erhält man

$$(m+x)\,z'' + Bz' + Az = 0,$$

welche durch Einführung einer neuen unabhängigen Variablen ξ mittelst der Substitution

$$\xi^2 = m + x$$

folgende Gestalt annimmt:

$$21)\qquad \xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + (2B-1)\frac{dz}{d\xi} + 4Az\xi = 0.$$

Ihre Integration erfordert das Zerlegen des folgenden Bruches in Partialbrüche:

$$\frac{(2B-1)\,u}{u^2+4A} = \frac{B-\frac{1}{2}}{u+2\sqrt{-A}} + \frac{B-\frac{1}{2}}{u-2\sqrt{-A}}$$

und aus den Zählern der Partialbrüche ersieht man, dass so oft B eine ganze positive Zahl ist, das Integral der Gleichung 21) die Gestalt hat, wie sie in 18) angeführt ist. Ist man auf diese Weise zur Kenntniss des Integrals der Gleichung 21) gelangt, so kann man auch leicht das Integral der Gleichung 20) angeben.

IV. Integration der linearen Differentialgleichung:

$$1)\qquad x^2(a_2 + b_2 x)\,y'' + x(a_1 + b_1 x)\,y' + (a_0 + b_0 x)\,y = 0.$$

Von Simon Spitzer. Diese Gleichung war Gegenstand der Bemühungen Eulers, Pfaff's und Malmsten's. Wir betreten den Weg des letztern,

da er der einfachste ist, und wollen aber auch jene Fälle berücksichtigen, wo man nach seiner Methode nicht zum Jntegrale gelangt.

Setzt man in 1)

$$y = x^k z$$

so erhält man:

$$x^2 (a_2 + b_2 x) \frac{d^2 z}{dx^2} + [2k(a_2 + b_2 x) + a_1 + b_1 x] \, x \frac{dz}{dx}$$
$$+ [k(k-1)(a_2 + b_2 x) + k(a_1 + b_1 x) + a_0 + b_0 x] \, z = 0,$$

welche Gleichung von derselben Form ist, wie die vorgelegte, sich aber vereinfacht, wenn man k so wählt, auf dass

2) $$a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 = 0$$

wird, denn man kann alsdann durch x abkürzen, und erhält

$$x(a_2 + b_2 x) \frac{d^2 z}{dx^2} + [a_1 + 2k a_2 + x(b_1 + 2k b_2)] \frac{dz}{dx}$$
$$+ [b_2 k(k-1) + b_1 k + b_0] \, z = 0.$$

Wird diese Gleichung μ mal differenzirt, so erhält man:

$$x(a_2 + b_2 x) \frac{d^{\mu+2} z}{dx^{\mu+2}} + [a_2 \mu + a_1 + 2a_2 k + x(2b_2 \mu + b_1 + 2b_2 k)] \frac{d^{\mu+1} z}{dx^{\mu+1}}$$
$$+ [b_2 \mu(\mu-1) + \mu(b_1 + 2k b_2) + b_2 k(k-1) + b_1 k + b_0] \frac{d^\mu z}{dx^\mu} = 0$$

und diese vereinfacht sich, wenn man μ so wählt, dass

$$b_2 \mu(\mu-1) + \mu(b_1 + 2b_2 k) + b_2 k(k-1) + b_1 k + b_0 = 0$$

wird. Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

3) $$b_2(\mu + k)(\mu + k - 1) + b_1(\mu + k) + b_0 = 0.$$

Man hat dann:

$$x(a_2 + b_2 x) \frac{d^{\mu+2} z}{dx^{\mu+2}} + [a_2 \mu + a_1 + 2a_2 k + x(2b_2 \mu + b_1 + 2k b_2)] \frac{d^{\mu+1} z}{dx^{\mu+1}} = 0,$$

welche Gleichung bezüglich $\frac{d^{\mu+1} z}{dx^{\mu+1}}$ von der ersten Ordnung, somit sehr leicht zu integriren ist.

Da die Integration der vorgelegten Gleichung von der Auflösung der beiden Gleichungen

2) $$a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 = 0$$

3) $$b_2(\mu + k)(\mu + k - 1) + b_1(\mu + k) + b_0 = 0$$

abhängt, die erste der beiden Gleichungen aber für

$$a_2 = a_1 = 0, \quad a_0 \gtrless 0,$$

hingegen die zweite für

$$b_2 = b_1 = 0, \quad b_0 \gtrless 0$$

einen Widerspruch in sich enthält, so ist das eben vorgetragene, von Malmsten herrührende Integrationsverfahren unzulässig

erstens, wenn

$$a_2 = a_1 = 0, \quad a_0 \lessgtr 0 \text{ und}$$

zweitens, wenn

$$b_2 = b_1 = 0, \quad b_0 \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Wir müssen daher folgende zwei Gleichungen, welche specielle Fälle der vorgelegten Gleichung sind, einer eigenen Untersuchung unterziehen:

$$4) \qquad b_2 x^2 y'' + b_2 x^2 y' + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

$$5) \qquad a_2 x^2 y'' + a_1\, x\, y' + (a_0 + b_0 x)\, y = 0.$$

Betrachten wir vorerst die Gleichung 5). Die Substitution

$$y = x^k z,$$

wo k eine Wurzel der Gleichung 2) ist, in dieselbe vorgenommen, giebt:

$$a_2\, x \frac{d^2 z}{dx^2} + (a_1 + 2 k a_2) \frac{dz}{dx} + b_0 z = 0,$$

deren Integral ist:

$$z = \frac{d^{2k + \frac{a_1}{a_2} - \frac{1}{2}}}{dx^{2k + \frac{a_1}{a_2} - \frac{1}{2}}} \left[C_1\, e^{2\sqrt{-\frac{b_0}{a_2} x}} + C_2\, e^{-2\sqrt{-\frac{b_0}{a_2} x}} \right].$$

Was nun die Gleichung 4) anlangt, so geht dieselbe durch Einführung einer neuen unabhängigen Variabelen u, mittelst der Substitution

$$x = \frac{1}{u}$$

in folgende über:

$$b_2\, u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + b_2\, u \frac{dy}{du} + (b_0 + a_0 u)\, y = 0$$

und hat somit die Form der eben integrirten Gleichung 5).

V. Integration der linearen Differentialgleichung:

$$6) \quad x^3 (a_3 + b_3 x)\, y''' + x^2 (a_2 + b_2 x)\, y'' + x (a_1 + b_1 x)\, y' + (a_0 + b_0 x)\, y = 0.$$

Verfahren wir mit dieser, ebenfalls von Malmsten betrachteten Gleichung genau so, wie mit der vorhergehenden, so haben wir,

$$y = x^k z$$

setzend,

$$\begin{aligned} 7) \quad & x^3 (a_3 + b_3 x)\, z''' + x^2 [3k (a_3 + b_3 x) + a_2 + b_2 x]\, z'' \\ & + x\, [3k (k-1)(a_3 + b_3 x) + 2k (a_2 + b_2 x) + a_1 + b_1 x]\, z' \\ & + [k (k-1)(k-2)(a_3 + b_3 x) + k (k-1)(a_2 + b_2 x) + k (a_1 + b_1 x) + a_0 + b_0 x]\, z \\ & = 0. \end{aligned}$$

Wählt man nun k so, dass

$$8) \qquad a_3\, k\, (k-1)(k-2) + a_2 k\, (k-1) + a_1\, k + a_0 = 0$$

wird, und dividirt alsdann die Gleichung 7) durch x, so erhält man:

$$\begin{aligned} & x^2 (a_3 + b_3 x)\, z''' + x\, [3k (a_3 + b_3 x) + a_2 + b_2 x]\, z'' \\ & + [3k (k-1)(a_3 + b_3 x) + 2k (a_2 + b_2 x) + a_1 + b_1 x]\, z' \\ & + [b_3 k (k-1)(k-2) + b_2 k (k-1) + b_1 k + b_0]\, z = 0, \end{aligned}$$

und diese giebt, μ mal differenzirt, folgende Gleichung:

$$9)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2(a_3+b_3x)\,z^{(\mu+3)}+x\,[a_2+2a_3\mu+3a_3k \\ & \qquad\qquad +x(b_2+3b_3\mu+3b_3k)]\,z^{(\mu+2)} \\ & +[a_3\mu^2+\mu(a_2-a_3-3a_3k)+3a_3k^2-3a_3k+2a_2k+a_1 \\ & \quad +x\{3b_3(\mu+k)(\mu+k-1)+2b_2(\mu+k)+b_1\}]\,z^{(\mu+1)} \\ & +[b_3(\mu+k)(\mu+k-1)(\mu+k-2)+b_2(\mu+k)(\mu+k-1) \\ & \qquad\qquad +b_1(\mu+k)+b_0]\,z^{(\mu)}=0. \end{aligned}\right.$$

Wählt man nun μ dermaassen, dass

$$10)\quad b_3(\mu+k)(\mu+k-1)(\mu+k-2)+b_2(\mu+k)(\mu+k-1) + b_1(\mu+k)+b_0=0$$

wird, so vereinfacht sich die Gleichung 9), und nimmt, da sie durch x abkürzbar ist, genau die Form der Gleichung 1) an, lässt sich daher auch ganz so behandeln.

Wir haben nun wieder die beiden Ausnahmefälle zu discutiren erstens wenn

$$a_3=a_2=a_1=0,\quad a_0\lesseqgtr 0,\ \text{und}$$

zweitens wenn

$$b_3=b_2=b_1=0,\quad b_0\gtrless 0\ \text{ist.}$$

Die Gleichung 6) nimmt in diesen Fällen die Formen an:

$$11)\quad b_3x^4y'''+b_2x^3y''+b_1x^2y'+(a_0+b_0x)\,y=0$$

$$12)\quad a_3x^3y'''+a_2x^2y''+a_1xy'+(a_0+b_0x)\,y=0.$$

Setzt man in 11) für x eine neue unabhängige Variable u mittelst der Substitution

$$x=\frac{1}{u},$$

so hat man

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^3}\frac{dy}{du}+\frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{du^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{6}{x^4}\frac{dy}{du}-\frac{6}{x^5}\frac{d^2y}{du^2}-\frac{1}{x^6}\frac{d^3y}{du^3}$$

und man erhält

$$-b_3u^3\frac{d^3y}{du^3}+(b_2-6b_3)\,u^2\frac{d^2y}{du^2}+(2b_2-6b_3-b_1)\,u\frac{dy}{du} + (b_0+a_0u)\,y=0,$$

welche genau die Form der Gleichung 12) hat; somit bleibt uns blos übrig, diese zu integriren.

Setzt man in 12)

$$y=x^k z$$

unter k eine Wurzel der Gleichung

$$8)\quad a_3k(k-1)(k-2)+a_2k(k-1)+a_1k+a_0=0$$

verstanden, so erhält man nach vollbrachter Reduction

$$a_3 x^2 z''' + (a_2 + 3a_3 k)\, x\, z'' + [a_1 + 2a_2 k + 3a_3 k(k-1)]\, z' + b_0 z = 0$$

eine Gleichung, mit deren Integration wir uns demnächst befassen wollen.

Bemerkenswerth ist die auffallende Analogie, welche zwischen dem Integrale der Gleichung

$$(a_n + b_n x)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

und dem Integrale der Gleichung

$$x^n (a_n + b_n x)\, y^{(n)} + x^{n-1} (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

stattfindet. Ersterer genügt man, abgesehen von den Ausnahmsfällen durch einen Ausdruck folgender Form:

$$y = \ldots e^{\alpha x} \frac{d^{m_3}}{dx^{m_3}} \left\{ e^{\gamma x} \frac{d^{m_2}}{dx^{m_2}} \left[e^{\beta x} \frac{d^{m_1}}{dx^{m_1}} \left(\frac{e^{\alpha x}}{(m+x)^{\lambda}} \right) \right] \right\} \ldots$$

hingegen letzterer durch einen Ausdruck, der die Form hat:

$$y = \ldots x^k \frac{d^{n_3}}{dx^{n_3}} \left\{ x^c \frac{d^{n_2}}{dx^{n_2}} \left[x^b \frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}} \left(\frac{x^a}{(m_1+x)^{\lambda_1}} \right) \right] \right\} \ldots$$

VI. Kleine Beiträge zur Undulationstheorie der Wärme. Von Friedrich Mann. (Fortsetzung von XXXIII. 4. Heft. 2. Jahrg. S. 280.)

V.

Erweiterung des Früheren.

1) Man wird sich leicht überzeugen, dass alle Schlüsse, welche zu den Formeln 1 — 4 geführt haben, auch dann noch gelten, wenn man nicht Grundstoffe, sondern chemische Verbindungen von ähnlicher Constitution mischt. Formel 3) gilt also auch noch dann, wenn G_1 und G_2 die Gewichte von verschiedenen Stücken eines zusammengesetzten Körpers bedeuten.

2) Werden drei Stoffe (Grundstoffe oder chemisch ähnliche Verbindungen) im Verhältniss ihrer Aequivalentzahlen gemischt, und bezeichnet man die specifischen Wärmen der Gemengtheile durch s_1, s_2, s_3 und die des Gemisches durch s_4, so findet man:

$$6)\qquad s_4 = \frac{3\, s_1\, s_2\, s_3}{s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3}.$$

Allgemein, für ein Gemisch aus n solchen Stoffen gilt die Gleichung:

$$7)\qquad s_{n+1} = \frac{n\, s_1\, s_2\, s_3 \ldots s_n}{C_{n+1}}.$$

Hierbei verstehe man unter C_{n+1} den Ausdruck, der sich ergiebt, wenn die $n-1^{\text{te}}$ Combinationsklasse der Elemente $s_1\, s_2 \ldots s_n$ gebildet wird in der Weise, dass man alle Elemente einer und derselben Complexion durch Multiplication, die einzelnen Complexionen selbst aber durch Addition verbindet.

VI.

Relation zwischen wirklicher und empirischer Temperatur.

1) Unter **wirklicher** (rationeller) Temperatur verstehen wir die Quantität der Bewegung eines schwingenden Atoms. Ein genauer Ausdruck für dieselbe ist demnach $m.v$ oder $\frac{g}{\mathfrak{g}}.v$, wenn v die Geschwindigkeit, g das Gewicht, m die Masse des Atoms und $\mathfrak{g}$ die Beschleunigung der Schwere bedeutet.

2) Die durch Thermometergrade angezeigten Temperaturen wollen wir **empirische** nennen, und zwar **absolute** oder **relative**, je nachdem sie vom absoluten Nullpunkt oder vom Nullpunkte eines hunderttheiligen Thermometers aus gezählt sind. Wir wollen in der Folge immer die wirkliche Temperatur durch t, die ihr entsprechende absolute empirische durch T und die zugehörige relative empirische durch ϑ bezeichnen.

3) Zwischen T und ϑ ergiebt sich sofort eine sehr einfache Relation. Bezeichnet man nämlich durch β die Zahl von Thermometergraden, welche den Temperaturunterschied zwischen absolutem und relativem Nullpunkte ausdrückt, so ist offenbar:

$$T = \vartheta + \beta. \tag{8}$$

4) Es handelt sich nun noch um eine Relation zwischen t und T. Nimmt man an, irgend ein Körper A, auf den sich obige Temperaturbezeichnungen beziehen mögen, enthalte n Atome und (falls man das Gewicht eines Wasserstoffatoms als Gewichtseinheit annimmt) G Gewichtseinheiten; drückt man ferner durch s seine, auf die genannte Gewichtseinheit bezogene, specifische Wärme aus: so ist offenbar sowohl $n\,t$ als auch $s\,G\,T$ ein Ausdruck für die gesammte Wärmemenge, welche A in sich trägt.*) Wir haben daher die Gleichung:

$$nt = sGT,$$

oder

$$\frac{G}{g}t = sGT,$$

wenn g das Gewicht eines Atoms von A bedeutet. Diese Gleichung geht über in:

$$t = gsT.$$

Das Product gs ist nun aber nach dem Dulong'schen Gesetz für chemisch ähnlich beschaffene Stoffe eine und dieselbe Constante. Bezeichnen wir dieselbe durch α, so ist

*) Wir machen hier von dem Satze Gebrauch: „Bei Temperaturerhöhungen ist für die nämliche Gewichtsmenge des zu erwärmenden Stoffes der Bedarf an Wärme der Zahl der Thermometergrade proportional" — auf dessen Begründung aus der Undulationstheorie wir zurückkommen werden.

$$9) \qquad t = \alpha\, T,$$

oder

$$10) \qquad \frac{t}{T} = \alpha.$$

D. h. Die nämliche Zahl, welche bei allen chemisch ähnlich beschaffenen Stoffen als Product aus specifischer Wärme und Atomgewicht erscheint, ist auch das geometrische Verhältniss aus wirklicher und absoluter empirischer Temperatur für die ganze Reihe solcher Stoffe.

Durch Verbindung der Formeln 8) und 9) gewinnen wir:

$$11) \qquad t = \alpha\,(\vartheta + \beta).$$

VII.

Zur Richmann'schen Formel.

1) In Formel 3) bedeuten t_3, t_1 und t_2 wirkliche Temperaturen; durch Herleitung jener Formel ist somit die Gültigkeit des Richmann'schen Gesetzes nur für rationelle Temperaturen dargethan. Nun kann aber offenbar

$$t_1 = T_1\,\alpha, \quad t_2 = T_2\,\alpha \text{ und } t_3 = T_3\,\alpha$$

gesetzt werden, wodurch man, wenn auf beiden Seiten der Gleichung durch α dividirt wird, sofort:

$$12) \qquad T_3 = \frac{G_1\,T_1 + G_2\,T_2}{G_1 + G_2}$$

erhält. D. h.

Das Richmann'sche Gesetz gilt auch für absolute, empirische Temperaturen.

2) Setzt man in die zuletzt erhaltene Formel:

$$T_3 = \vartheta_3 + \beta, \quad T_1 = \vartheta_1 + \beta \text{ und } T_2 = \vartheta_1 + \beta,$$

so lässt sich dieselbe auf die Form:

$$\vartheta_3 + \beta = \frac{G_1\,\vartheta_1 + G_2\,\vartheta_2}{G_1 + G_2} + \frac{\beta\,G_1 + \beta\,G_2}{G_1 + G_2}$$

bringen, woraus man, wenn man den Werth von β auf beiden Seiten subtrahirt, sofort gewinnt:

$$13) \qquad \vartheta_3 = \frac{G_1\,\vartheta_1 + G_2\,\vartheta_2}{G_1 + G_2}.$$

D. h. Das Richmann'sche Gesetz gilt auch für relative empirische Temperaturen. Formel 13) stellt erst dieses Gesetz ganz in der Weise dar, wie es aus der Erfahrung hervorgegangen ist; denn ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3 sind wirkliche Thermometerstände.

VII.

Das Mariotte'sche Gesetz.

1) In Bezug auf die Bewegungen, welche die Atome eingesperrter Luftarten ausführen, theilen wir ganz die Vorstellungsweise von Clausius

und Krönig. (Vergl. 2. Jahrgang, 3. Heft dieser Zeitschrift.) Bedeutet v die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung und m die Masse eines Atoms, so kann mv oder t (unseren bisherigen Entwickelungen gemäss) als Stärke des Einzelstosses gelten, den das betreffende Atom gegen die Wand ausübt. Gehen bei dem vorhandenen Dichtigkeitszustande n Atome auf die Flächeneinheit der Hülle und bezeichnet man durch a die Zahl der Stösse, welche je ein Atom in einer Zeiteinheit ausführt, so ist

$$t\,n\,a$$

offenbar ein Maass für den Gesammtdruck, welchen jede Flächeneinheit der Wand während einer Sekunde erleidet. Durch diese Druckstärke misst man aber bekanntlich die Expansivkraft eines Gases. Bezeichnet man daher die Expansivkraft der in Rede stehenden Luftart durch e, so hat man

$$e = n\,a\,t = n\,a\,\alpha\,T = n\,a\,\alpha\,(\vartheta + \beta).$$

2) Da m für eine und dieselbe Luftart sich niemals ändert, so bleibt das v das gleiche, so lange t seinen Werth behält. Wird nun aber bei gleichbleibender Temperatur und gleichbleibendem Gesammtgewichte das Volumen ein anderes, so ändern sich die Werthe von n und a. Denn wird unter den bezeichneten Umständen das Volumen z. B. grösser, so kommen weniger stossende Atome auf eine Flächeneinheit der Hülle und zugleich wird das einzelne Atom in der Zeiteinheit weniger Stösse ausüben können, da es von einem Stosse zum nächstfolgenden mit gleichem v einen grösseren Weg beschreiben muss. Ein kleineres n und a zieht aber bei gleichbleibendem t ein kleineres e nach sich. Beziehen sich e_1, n_1, a_1, t auf eine gewisse Gewichtsmenge eines Gases beim Volumen R_1 und e_2, n_2, a_2 und t auf die nämliche Gewichtsmenge des nämlichen Gases beim Volumen R_2, so ist

$$e_1 = n_1\,a_1\,t = n_1\,a_1\,\alpha\,(\vartheta + \beta)$$

und

$$e_2 = n_2\,a_2\,t = n_2\,a_2\,\alpha\,(\vartheta + \beta);$$

mithin:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{n_1\,a_1}{n_2\,a_2}.$$

Nun ist aber $\frac{n_1\,a_1}{n_2\,a_2}$ offenbar nichts anderes, als das umgekehrte Verhältniss der Rauminhalte R_1 und R_2. Denn müssen je zwei benachbarte Atome, damit aus R_1 der Raum R_2 entstehen könne, in jeder der drei Dimensionen r mal weiter auseinanderrücken, so ist R_2 genau r^3 mal grösser als R_1; dafür wird aber n_2 gerade r^2 mal kleiner als n_1 und a_2 gerade r mal kleiner als a_1. Setzen wir aber in obiger Gleichung $\frac{n_1\,a_1}{n_2\,a_2} = \frac{R_2}{R_1}$, so haben wir das Mariotte'sche Gesetz.

IX.

Ueber das Gay-Lussac'sche Gesetz und den Begriff der rationellen Temperatur.

1) Dem bisher Entwickelten gemäss ist:

$$e_1 = n_1 a_1 m_1 v_1$$

und

$$e_2 = n_2 a_2 m_2 v_2.$$

Führen wir die dem Gay-Lussac'schen Gesetze zu Grunde liegende Bedingung

$$e_1 = e_2$$

ein, so gewinnen wir:

$$m_1 n_1 a_1 v_1 = m_2 n_2 a_2 v_2.$$

Lassen wir ferner die in der letzten Gleichung auftretenden Grössen auf zwei verschiedene Zustände der nämlichen Gewichtsmenge eines und desselben Gases sich beziehen, in der Weise, dass m_1, n_1, v_1 und a_1 dem Volumen R_1, dagegen m_2, n_2, v_2 und a_2 dem Volumen R_2 entsprechen, so ist offenbar:

$$m_1 = m_2, \quad a_1 = \frac{v_1}{2 l_1} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{v_2}{2 l_2};$$

wenn nämlich l_1 und l_2 die Längen derjenigen Würfel bedeuten, deren Cubikinhalte R_1 und R_2 sind. Durch Substitution gewinnen wir:

$$n_1 \cdot \frac{v_1^2}{l_1} = n_2 \cdot \frac{v_2^2}{l_2};$$

oder

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{n_2 \, l_1}{n_1 \, l_2}.$$

Ist nun l_2 z. B. das $k$fache von l_1, so ist $n_2 = \frac{n_1}{k^2}$, also

$$n_2 l_1 : n_1 l_2 = 1 : k^3;$$

dann ist aber auch

$$R_1 : R_2 = 1 : k^3,$$

also

$$\frac{n_2 \, l_1}{n_1 \, l_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

mithin

$$\text{14)} \qquad \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Nehmen wir weiter (abweichend von unserer bisherigen Definition) mit Clausius

$$t_1 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 \text{ und } t_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2$$

an, so erhalten wir:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{R_2}{R_1},$$



oder

$$\frac{\vartheta_2+\beta}{\vartheta_1+\beta}=\frac{R_2}{R_1}$$

mithin

$$R_2=R_1\left(\frac{\vartheta_2+\beta}{\vartheta_1+\beta}\right).$$

Setzen wir noch fest, der Unterschied in der Thermometerständen ϑ_2 und ϑ_1 sei γ, so ist

$$R_2=R_1\left(1+\frac{\gamma}{\vartheta_1+\beta}\right)$$

15) $$=R_1+R_1\frac{\gamma}{\vartheta_1+\beta},$$

so dass wir in der That bei dem Gesetz angelangt sind:

Soll irgend eine Gewichtsmenge eines Gases trotz einer Erhöhung der Temperatur seine Spannkraft behalten, so müssen die Volumenzunahmen den Zuwachsen der relativen empirischen Temperatur proportional sein.

2) Setzen wir $\vartheta_1=0$, so dass R_1 das Volumen der vorhandenen Luftmenge bei 0° Celsius bedeutet, so ist:

16) $$R_2=R_1+R_1\frac{\gamma}{\beta}.$$

Und lassen wir auch $\gamma=1$ sein, so bedeutet $R_1\frac{1}{\beta}$ den Volumenzuwachs, welcher der Temperaturerhöhung von 0 auf 1 Grad entspricht. Diesen Zuwachs hat man aber durch das Experiment $=0{,}00364=\frac{1}{273}$ des R_1 (nämlich des Volumens bei 0 Grad) gefunden. Es ist demnach

17) $$\beta=273.$$

D. h. Der absolute Nullpunkt liegt für ein ideelles Gas 273 Grade unter dem Gefrierpunkt des hunderttheiligen Thermometers.

3) In den Entwickelungen I. bis VII. haben wir die „Temperatur" eines Atoms als die Quantität seiner Bewegung (als das mv) und die „Wärmemenge" entsprechend als die Kraftgrösse aufgefasst, welche der Masse m mitgetheilt werden muss, um die Geschwindigkeit v hervorzurufen. Auch das Mariotte'sche Gesetz, für welches sich in Heft 3 dieser Zeitschrift ein Beweis unter der Voraussetzung $t=\frac{1}{2}mv^2$ befindet, hat sich (in VIII.) noch ganz ungezwungen aus unserer ersten Auffassung über Temperatur ergeben. Bei Begründung des Gay-Lussac'schen Gesetzes mussten wir aber mit Clausius annehmen, dass die Temperatur eines Atoms der lebendigen Kraft desselben proportional sei. Es drängt sich daher ganz von selbst die Frage auf, sollten die Resultate unserer früheren Entwickelungen nicht auch aus der Voraussetzung $t=\frac{1}{2}mv^2$ hervorgeholt werden können? Dies kann nun allerdings geschehen, wenn man nur gleichzeitig auch den Begriff

der „Wärmemenge" entsprechend abändert. Alle unsere Entwickelungen bleiben auch unter der Voraussetzung $t = \frac{1}{2} m v^2$ in Kraft, wenn man nur unter Wärmemenge die Arbeitsgrösse versteht, welche aufgeboten werden muss, um die Masse m in die Geschwindigkeit v zu versetzen. Der Beweis des Dulong'schen Satzes z. B. gestaltet sich unter diesen Annahmen folgendermaassen.

Mittelst der Arbeitsgrösse A kann man einer Masse M_1 mit dem Gewichte G_1 die Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{2Ag}{G_1}} = v_1$ beibringen, und eine Masse M_2 mit dem Gewichte G_2 wird durch die nämliche Arbeitsgrösse in die Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{2Ag}{G_2}} = v_2$ versetzt. Besitzt aber die Masse M_1 die Geschwindigkeit v_1 und die Masse M_2 die Geschwindigkeit v_2, so ist die halbe lebendige Kraft der Masse M_1 nichts anderes als die Grösse A und die halbe lebendige Kraft der Masse M_2 ist dann ebenfalls $= A$.

Diese allgemeine Betrachtung trägt aber offenbar den Satz:

„Es bedarf der **nämlichen** Wärmemenge, um je ein Atom der verschiedensten Stoffe in ihrer Temperatur um **gleichviel** zu erhöhen"

als speciellen Fall in sich.

Es ist begreiflich, dass das Mariotte'sche Gesetz sich ergeben muss, ob man $t = mv$ oder $t = \frac{1}{2} m v^2$ annimmt, da ja dieses Gesetz nur unter der Bedingung gilt, dass den beiden Gaszuständen, auf die es sich bezieht, die nämliche Temperatur zukommt. Auch das Dulong'sche Gesetz ergab sich, wir mochten die Wärmemenge als einfache Kraftgrösse oder als Arbeitsgrösse hinstellen, d. h. wir mochten die Wärme selbst als Momentankraft oder als stetig wirkende Kraft auffassen. Nun kommen in der Wirklichkeit zweierlei Temperaturerhöhungen vor: 1) allmälige, 2) plötzliche. Dass bei ersteren (wo es sich um ein allmäliges Beschleunigen der Masse der Atome handelt) Wärmemenge gleich Arbeitsgrösse und dann entsprechend Temperatur proportional der lebendigen Kraft gesetzt werden muss, ist unbestritten. Dagegen fragt es sich, ob bei Temperaturerhöhungen der zweiten Art, bei Explosionen z. B. (wo die Kraft plötzlich in die Massen der Atome tritt und ihnen eine gewisse Geschwindigkeit verleiht) nicht diejenige Anschauungsweise am Platze sei, welche in Bezug auf Momentankräfte gilt. Wir wollen diese Frage nicht stricte beantworten, sondern begnügen uns vorläufig mit der Aufstellung derselben.

VII. Ueber die Bewegung eines schweren Körpers auf einer Schraubenlinie. In keinem der mir bekannten Lehrbücher der analytischen Mechanik finde ich ein Beispiel für die allgemeinen Regeln, wornach die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer doppelt gekrümmten Linie zu behandeln ist; es mag daher die Bemerkung nicht überflüssig sein, dass die Bewegung eines nur von der Schwere afficirten Punktes auf der Schraubenlinie ein für den Unterricht sehr brauchbares Beispiel abgiebt. Legt man die z-Achse vertikal abwärts, die x- und y-Achsen senkrecht auf einander in eine Horizontalebene, so sind bekanntlich die Gleichungen der Schraubenlinie

$$1.)\qquad x = r\cos\frac{z}{p},\quad y = r\sin\frac{z}{p},\quad (p = r\tan\alpha),$$

wobei r den Halbmesser und α den Steigungswinkel der Curve bezeichnet. Die Tangente im Punkte xyz bildet mit der z-Achse den constanten Winkel $90^0 - \alpha$, und es ist daher die beschleunigende Kraft in der Bahn oder längs der Tangente

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\cos(90^0 - \alpha) = g\sin\alpha.$$

Wegen $s = z\operatorname{cosec}\alpha$ wird hieraus

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g\sin^2\alpha,$$

folglich nach einander

$$2)\qquad \frac{dz}{dt} = gt\sin^2\alpha,$$

$$3)\qquad z = \tfrac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha,$$

wobei vorausgesetzt wurde, dass die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$, und für $t = 0$ auch $z = 0$ ist. Die Gleichungen 3) und 1) bestimmen für jede Zeit t den Ort des beweglichen Punktes; die Formel 2) giebt für die Geschwindigkeit in der Bahn

$$4)\qquad v = gt\sin\alpha = \sqrt{2gz},$$

wie man auch mittelst des Satze von der lebendigen Kraft findet.

Schlömilch.

V.

Zur Theorie der höheren Differentialquotienten.

Von O. SCHLÖMILCH.

(Aus den Sitzungsberichten der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 7. November 1857.)

In der Theorie der höheren Differentialquotienten kommt es hauptsächlich auf zwei Fundamentalprobleme an, von denen das eine die Umkehrung des anderen ist. Setzt man nämlich $y=\varphi(x)$ und bezeichnet $F(y)=F[\varphi(x)]$ kurz mit $f(x)$, so kann man entweder die Aufgabe stellen, $f^{(n)}(x)$ durch $F'(y)$ $F''(y)$, $F'''(y)$ etc. auszudrücken, oder umgekehrt verlangen, dass $F^{(n)}(y)$ durch $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. ausgedrückt werde, wobei sich von selbst versteht, dass in beiden Fällen auch $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ etc. in die Rechnung eingehen müssen. Zufolge der identischen Gleichung $f^{(n)}(x) = D_x^n f(x) = D_x^n F[\varphi(x)]$ ist die erste jener Aufgaben einerlei mit dem Probleme der mehrfachen Differentiation einer zusammengesetzten Function, welchem man in neuerer Zeit eine erhöhte Aufmerksamkeit geschenkt und zu dessen Lösung auch der Verfasser einige Beiträge geliefert hat; die zweite Aufgabe ist unter dem Namen der Vertauschung der unabhängigen Variabelen gleichfalls bekannt aber nicht genauer untersucht worden. Denkt man sich nämlich y zunächst als unabhängige Variabele und führt später eine neue unabhängige Variabele x ein, welche mit y durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ verbunden ist, so entsteht die Frage nach der neuen, durch diese Substitution hervorgerufenen Form von $D_y^n F(y) = F^{(n)}(y)$. Wegen

$$D_y^n F(y)=\frac{d^n F(y)}{dy^n}=\frac{d^n F[\varphi(x)]}{[d\varphi(x)]^n}=\frac{d^n f(x)}{[d\varphi(x)]^n}$$

kann man auch sagen, dass es sich im vorliegenden Falle darum handelt, eine gegebene Function von x in Beziehung auf eine andere Function, letztere als unabhängige Variabele betrachtet, zu differenziren. — Für beide Hauptaufgaben werden wir im Folgenden die Lösungen geben und daran einige Anwendungen knüpfen.

Die Differentiation der zusammengesetzten Functionen.

Durch mehrmalige Differentiation der Gleichungen

$$1) \qquad f(x) = F(y), \; y = \varphi(x)$$

gelangt man zu den Formeln

$$f'(x) = F'(y)\,\varphi'(x)$$
$$f''(x) = F'(y)\,\varphi''(x) + F''(y)\,\varphi'(x)^2,$$
$$f'''(x) = F'(y)\,\varphi'''(x) + 3\,F''(y)\,\varphi'(x)\,\varphi''(x) + F'''(y)\,\varphi'(x)^3,$$

u. s. w.

und hieraus schliesst man auf folgendes allgemeine Bildungsgesetz

$$2) \qquad f^{(n)}(x) = F'(y)\,X_1 + F''(y)\,X_2 + \ldots + F^{(n)}(y)\,X_n,$$

worin X_1, $X_2 \ldots . X_n$ gewisse, vorläufig unbekannte variabele Factoren bedeuten, welche nur von der Function φ, nicht aber von F abhängen. Ebendesswegen kann irgend eine passende Specialisirung der letzteren Function zur Bestimmung der Coefficienten X dienen; am besten eignet sich zu diesem Zwecke die Substitution $F(y) = y^n$, welche giebt

$$D_x^n\, y^n = ny^{n-1} X_1 + n(n-1)\,y^{n-2} X_2 + n(n-1)(n-2)\,y^{n-3} X_3 + \ldots .$$

Um die linker Hand angedeutete Differentiation auszuführen erinnern wir an den Satz, dass überhaupt

$$D_x^n\,\psi(x+\varrho) = D_\varrho^n\,\psi(x+\varrho) \text{ mithin } D_x^n\psi(x) = [D_\varrho^n\,\psi(x+\varrho)]_{(\varrho=0)}$$

ist, dass also im vorliegenden Falle

$$D_x^n y^n = D_x^n \varphi(x)^n = D_\varrho\,[\varphi(x+\varrho)]^n$$

sein muss, wenn nach geschehener Differentiation $\varrho = 0$ gesetzt wird. Bei Benutzung des Abkürzungszeichen

$$3) \qquad \Theta = \varphi(x+\varrho) - \varphi(x)$$

ist weiter $\varphi(x+\varrho) = \varphi(x) + \Theta = y + \Theta$ mithin nach dem Vorigen

$$D_x^n\, y^n = [D_\varrho^n\,(y+\Theta)^n]_{(0)}$$

und unter Anwendung des binomischen Satzes

$$D_x^n y^n = \frac{n}{1} y^{n-1}\,[D_\varrho^n\,\Theta]_{(0)} \frac{n(n-1)}{1,2} y^{n-2} [D_\varrho^n \Theta^2]_{(0)}$$
$$+ \frac{n(n-1)\,n-2)}{1.2.3} y^{n-3}\,[D_\varrho^n\,\Theta^3]_{(0)} + \ldots .$$

Aus der Vergleichung der beiden auf verschiedenen Wegen erhaltenen Werthe von $D_x^n\, y^n$ folgt nun augenblicklich

$$X_k = \frac{1}{1.2.3\ldots k}\,[D_\varrho^n\,\Theta^k]_{(0)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$4) \qquad U_k = [D_\varrho^n\,\Theta^k]_{(0)} = [D_\varrho^n\,\{\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)\}^k]_{(0)},$$

so hat man statt der Gleichung 2) die folgende:

$$5) \left\{ \begin{array}{l} f^{(n)}(x) = D_x^n\,F(y) \\ = \dfrac{U_1}{1} F'(y) + \dfrac{U_2}{1.2} F''(y) + \dfrac{U_3}{1.2.3} F'''(y) + \ldots + \dfrac{U_n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(y). \end{array} \right.$$

Dieses Resultat könnte man auch durch Induction aus den drei ersten Formeln für $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ableiten und nachher mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ beweisen. Hinsichtlich dee Werthes von U_k ist noch zu bemerken, dass er in entwickelterer Form dargestellt werden kann, wenn man

$$\{\varphi(x+\varrho)-\varphi(x)\}^k$$

mittelst des binomischen Satzes in eine Reihe verwandelt, die einzelnen Glieder differenzirt und dabei von dem Satze

$$[D_\varrho^n \psi(x+\varrho)]_{(0)}=D_x^n \psi(x)$$

Gebrauch macht; man erhält auf diesem Wege

$$6)\qquad U_k=(k)_0 D_x^n y^k - (k)_1 y D_x^n y^{k-1} + (k)_2 y^2 D_x^n y^{k-2} - \ldots$$

In dieser Gestalt ist U_k zuerst von R. Hoppe (Theorie der höheren Diffeentialquotienten, Leipzig 1845) angegeben worden; die kürzere Formel (4) rührt von U. Meyer her (Grunert's Archiv Bd. 9) der sie mittelst des Taylor'schen Satzes gefunden hat. Da aber bei einer systematischen Darstellung der Differentialrechnung das Taylor'sche Theorem erst nach der Lehre von den höheren Differentialquotienten vorkommen kann, so haben wir den Meyer'schen Beweis durch einen anderen ersetzt, welcher nur elementare Hülfsmittel in Anspruch nimmt. Einige häufig vorkommende specielle Fälle der Formel (5) sind folgende

a. Für $y=\varphi(x)=\frac{1}{x}$ hat man nach nr. 4)

$$U_k=\left[D_\varrho^n\left(-\frac{\varrho}{x(x+\varrho)}\right)^k\right]_{(0)}=\frac{(-1)^k}{x^k}\left[D_\varrho^n\{\varrho^k(x+\varrho)^{-k}\}\right]_{(0)}$$

und unter Anwendung der bekannten Regel für die Differentiation der Producte

$$U_k=\frac{(-1)^k}{x^k}(n)_k\,1.2\ldots k\,[D_\varrho^{n-k}(x+\varrho)^{-k}]_{(0)}$$

$$=\frac{(-1)^k(n)_k 1.2\ldots k}{x^k}\cdot\frac{(-1)^{n-k}k(k+1)\ldots(n-1)}{x^n},$$

$$\frac{U_k}{1.2\ldots k}=\frac{(-1)^n(n-1)(n-2)\ldots.k.(n)_k}{x^{n+k}}.$$

Ordnet man die Glieder in umgekehrter Folge, so gelangt man zu der Formel

$$7)\quad\left\{\begin{aligned}(-1)^n D_x^n F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^{2n}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1)(n)_1}{x^{2n-1}}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\\+\frac{(n-1)(n-2)(n)_2}{x^{2n-2}}F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)+\ldots\end{aligned}\right.$$

b. Die Specialisirung $y=\varphi(x)=x^2$ giebt

$$U_k=[D_\varrho^n\{\varrho^k(2x+\varrho)^k\}]_{(0)}=(n)_k\,1.2\ldots k\,[D_\varrho^{n-k}(2x+\varrho)^k]_{(0)},$$

$$\frac{U_k}{1.2\ldots k}=(n)_k\,k(k-1)(k-2)\ldots(2k-n+1)(2x)^{2k-n},$$

und bei umgekehrter Anordnung der Summanden:

$$8)\quad D_x^n F(x^2) = (2x)^n F^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} F^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} F^{(n-2)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2.3}(2x)^{n-6} F^{(n-3)}(x^2) + \ldots\ldots$$

c. Ein dritter bemerkenswerther Fall ist $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$ also

$$U_k = [D_\varrho^n(\sqrt{x+\varrho} - \sqrt{x})^k]_{(0)},$$

oder für $\varrho = x\tau$, $d\varrho = x d\tau$,

$$U_k = x^{\frac{1}{2}k-n}[D_\tau^n\,(\sqrt{1+\tau}-1)^k]_{(0)}.$$

Um die angedeutete, auf τ bezügliche Differentiation auszuführen setzen wir zur Abkürzung

$$T = \sqrt{1+\tau} - 1 = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau}+1}$$

und bemerken, dass

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\tau}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\tau}{T}-1} = \frac{1}{2}\frac{T}{\tau - T},$$

mithin

$$\tfrac{1}{2}T = (\tau - T)\,T'$$

ist. Diese Gleichung multipliciren wir mit T^{k-2} und differenziren das Product $(n-1)$ mal; diess giebt

$$\tfrac{1}{2}D^{n-1}T^{k-1} = D^{n-1}(\tau.\,T^{k-2}T') - D^{n-1}(T^{k-1}T')$$
$$= \tau D^{n-1}(T^{k-2}T') + (n-1)D^{n-2}(T^{k-2}T') - D^{n-1}(T^{k-1}T').$$

Für $\tau = 0$ wird hieraus

$$\tfrac{1}{2}[D^{n-1}T^{k-1}]_{(0)} = (n-1)[D^{n-2}(T^{k-2}T')]_{(0)} - [D^{n-1}(T^{k-1}T')]_{(0)}$$
$$= \frac{n-1}{k-1}[D^{n-1}T^{k-1}]_{(0)} - \frac{1}{k}[D^n T^k]_{(0)},$$

und da diese Gleichung nur die beiden Differentialquotienten $D^n T^k$ und $D^{n-1}T^{k-1}$ enthält, so kann sie dienen um den ersten dieser Differentialquotienten auf den zweiten zurückzuführen, nämlich

$$[D^n T^k]_{(0)} = \frac{k(2n-k-1)}{2(k-1)}[D^{n-1}T^{k-1}]_{(0)}.$$

Durch $(k-1)$ malige Anwendung dieser Formel erhält man

$$[D^n T^k]_{(0)} = k\frac{(2n-k-1)(2n-k-2)\ldots(2n-2k+1)}{2^{k-1}}[D^{n-k+1}T]_{(0)}$$

d. i., weil der letzte Differentialquotient unmittelbar entwickelt werden kann

$$[D^n T^k]_{(0)} = k\frac{(2n-k-1)(2n-k-2)\ldots(2n-2k+1)}{2^{k-1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}1.3.5\ldots(2n-2k-1)}{2^{n-k+1}}.$$

Zufolge dieses Werthes ist weiter

$$\frac{U_k}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,k}$$
$$=\frac{(-1)^{n-k}}{2^n x^{n-\frac{1}{2}k}}\,\frac{(2n-k-1)\,(2n-k-2)\ldots.(2n-2k+1).1.3.5\ldots(2n-2k-1)}{1.2.3\ldots.(k-1)}$$

und wenn man, behufs umgekehrter Anordnung der Summanden, $k=n-i$ setzt, so wird

$$\frac{U_{n-i}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-i)}$$
$$=\frac{(-1)^i}{2^n(\sqrt{x})^{n+i}}\,\frac{(n+i-1)\,(n+i-2)\ldots(2i+1)\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,\ldots.\,(2i-1)}{1\,.\,3\,.\,3\,\ldots.\,(n-i-1)}$$
$$=\frac{(-1)^i}{(2\sqrt{x})^{n+i}}\,\frac{(n+i-1)\,(n+i-2)\,\ldots.\,(n+1)\,n\,(n-1)\,\ldots\,(n-i)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,i}.$$

Hiernach ergiebt sich folgende Formel

$$9)\quad D_x^n F(\sqrt{x})=\frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n}-\frac{n\,(n-1)}{1}\,\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}}+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}\,\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}}-\ldots.$$

welche der Verfasser zuerst in Crelle's Journal (Bd. 32) mitgetheilt hat.

d. Will man den allgemeinen Fall $y=\varphi(x)=x^\lambda$ betrachten, so ist es am besten die Formel 6) zu benutzen und dabei die Vandermonde'sche Bezeichnung

$$\overset{n}{[\mu]}=\mu\,(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots.(\mu-n+1)$$

einzuführen; man erhält

$$10)\qquad D_x^n F(x^\lambda)=\frac{1}{x^n}\left\{\frac{U_1\,x^\lambda}{1}\,F'(x^\lambda)+\frac{U_2\,x^{2\lambda}}{1.2}\,F''(x^\lambda)+\ldots.\right\}$$

wobei U_k durch folgende Formel gegeben ist:

$$11)\qquad U_k=(k)_0\,\overset{n}{[k\lambda]}-(k)_1\,\overset{n}{[(k-1)\,\lambda]}+(k)_2\,\overset{n}{[(k-2)\,\lambda]}-\ldots.$$

e. Für $y=\varphi(x)=e^x$ findet man nach nr. 5)

$$12)\qquad D_x^n F(e^x)=\frac{U_1\,e^x}{1}\,F'(e^x)+\frac{U_2\,e^{2x}}{1.2}\,F''(e^x)+\ldots.$$

und nach nr. 6)

$$13)\qquad U_k=(k)_0\,k^n-(k)_1\,(k-1)^n+(k)_2\,(k-2)^n-\ldots\ldots$$

f. Der Fall $y=\varphi(x)=lx$ verlangt eine etwas andere Behandlung weil die höheren Differentialquotienten der Potenzen von lx nicht unmittelbar bekannt sind. Man bemerkt aber sehr leicht, dass $D_x^n F(lx)$ auf folgende Weise gebildet ist

$$14)\quad D_x^n F(lx)=\frac{1}{x^n}\left\{\overset{n}{C_0}F^{(n)}(lx)-\overset{n}{C_1}F^{(n-1)}(lx)+\overset{n}{C_2}F^{(n-2)}(lx)-\ldots\right\}$$

worin $\overset{n}{C_0}$, $\overset{n}{C_1}$, $\overset{n}{C_2}$ etc. gewisse, vorläufig noch unbekannte Zahlen bedeuten. Zu ihrer Bestimmung dient die specielle Annahme $F(y)=e^{-\lambda y}$, bei wel-

cher alle angedeuteten Differentiationen ausführbar werden. Die übrig bleibende Gleichung

$$15)\quad \begin{cases} \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\ldots(\lambda+n-1) \\ = \overset{n}{C}_0\lambda^n + \overset{n}{C}_1\lambda^{n-1} + \overset{n}{C}_2\lambda^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\lambda \end{cases}$$

giebt zu erkennen, dass die fraglichen Coefficienten mit den sogenannten Facultätencoefficienten identisch sind. Wie sich letztere independent bestimmen lassen, werden wir später zeigen.

g. Die bisherigen Fälle hatten das Gemeinsame, dass die Function $\varphi(x) = y$ specialisirt wurde und $F(y)$ willkührlich blieb; das Gegenstück hierzu bilden die Fälle, bei denen $F(y)$ specialisirt und y allgemein gelassen wird. Ein derartiger, für unsere späteren Untersuchungen wichtiger Fall ist $F(y) = y^p$, wenn gleichzeitig p als ganz beliebige Zahl vorausgesetzt wird. Die Formeln (5) und (6) geben jetzt

$$D_x^n y^p = (p)_1 U_1 y^{p-1} + (p)_2 U_2 y^{p-2} + \ldots + (p)_n U_n y^{p-n}$$

$$U_k = (k)_0 V_k - (k)_1 V_{k-1} y + (k)_2 V_{k-2} y^2 - \ldots \pm (k)_{k-1} V_1 y^{k-1},$$

wobei zur Abkürzung

$$V_i = D_x^n y^i$$

gesetzt worden und folglich $V_0 = 0$ ist. Substituirt man die aus der zweiten Formel gewonnenen Werthe von $U_1, U_2, \ldots U_n$ in die erste Formel, so kann man letztere leicht nach Potenzen von y ordnen und das Resultat in folgender Gestalt darstellen

$$D_x^n y^p = A_1 V_1 y^{p-1} + A_2 V_2 y^{p-2} + \ldots + A_n V_n y^{p-2};$$

irgend einer der Coefficienten A ist

$$A_k = (k)_0 (p)_k - (k+1)_1 (p)_{k+1} + (k+2)_2 (p)_{k+2} - \ldots \pm (n)_{n-k} (p)_n.$$

Setzt man für $(k)_0, (k+1)_1, (k+2)_2$ etc. ihre Werthe und drückt $(p)_{k+1}$ $(p)_{k+2}$ etc. durch $(p)_k$ aus, so erhält man

$$A_k = (p)_k \{1 - (p-k)_1 + (p-k)_2 - \ldots \pm (p-k)_{n-k}\},$$

und kann die in Parenthesen stehenden Glieder leicht zusammenziehen, indem man die Formel

$$(\alpha)_m (\beta)_0 + (\alpha)_{m-1} (\beta)_1 + (\alpha)_{m-2} (\beta)_2 + \ldots + (\alpha)_0 (\beta)_m = (\alpha+\beta)_m$$

für $\alpha = -1$, $\beta = p - k$ und $m = n - k$ in Anwendung bringt. Diess giebt

$$A_k = (-1)^{n-k} (p)_k (p-k-1)_{n-k} = (p)_k (n-p)_{n-k}$$

oder auch, wenn $(n-p)_{n-k}$ durch $(n-p)_n$ ausgedrückt wird,

$$A_k = p \cdot (n-p)_n \frac{(-1)^k (n)_k}{p-k}.$$

Vermöge der Werthe von A_k und V_k hat man jetzt nach nr. (10)

$$17)\quad D_x^n y^p = p\,(n-p)_n \left\{-\frac{(n)_1}{p-1} y^{p-1} D_x^n y + \frac{(n)_2}{p-2} y^{p-2} D_x^n y^2 - \ldots\right\}$$

und es liegt hierin der bemerkenswerthe Satz, dass die Differentiation jeder beliebigen Potenz einer Function auf die Differentiation der ganzen positiven Potenzen derselben Function zurückkommt.

h. Aus dem Vorigen ergiebt sich noch eine Formel für $D_x^n ly$, wenn man der Gleichung (17) folgende Gestalt ertheilt

$$D_x^n \frac{y^p-1}{p} = (n-p)_n \left\{ -\frac{(n)_1}{p-1} y^{p-1} D_x^n y + \frac{(n)_2}{p-2} y^{p-2} D_x^n y^2 - \dots \right\}$$

und p in Null übergehen lässt; es wird

$$18) \qquad D_x^n\, l y = \frac{(n)_1}{1\, y} D_x^n y - \frac{(n)_2}{2 y^2} D_x^n y^2 + \frac{(n)_3}{3 y^3} D_x^n y^3 - \dots$$

Die meisten der angeführten Fälle behandelt auch R. Hoppe (in der genannten Schrift) zum Theil auf weniger einfache Weise.

Die Vertauschung der unabhängigen Variabelen.

Aus den im Anfange des vorigen Abschnittes aufgestellten Formeln sind $F'(y)$ $F''(y)$, $F'''(y)$ etc. der Reihe nach leicht herzuleiten nämlich

$$F'(y) = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

$$F''(y) = \frac{\varphi'(x)\, f''(x) - \varphi''(x)\, f'(x)}{\varphi'(x)^3},$$

$$F'''(y) = \frac{\varphi'(x)^2 f'''(x) - 3\varphi'(x)\,\varphi''(x)\, f''(x) + [3\varphi''(x)^2 - \varphi'(x)\,\varphi'''(x)]\, f'(x)}{\varphi'(x)^5}$$

u. s. w.

wie man auch durch successive Differentiationen und Divisionen mit $\varphi'(x)$ finden kann. Um allgemein $F^{(n)}(y)$ zu entwickeln, nehmen wir die Gleichung (5) für die Werthe $n=1, 2, 3, \dots n$ in Anspruch und eliminiren aus den n erhaltenen Gleichungen die $n-1$ Functionen $F'(y)$, $F''(y)$, ... $F^{(n-1)}(y)$. Dies hat auf dem folgenden Wege nicht die mindeste Schwierigkeit.

Vermöge der Bedeutung von U_k sind die erwähnten n Gleichungen:

$$f'(x) = \frac{D\Theta}{1} F'(x),$$

$$f''(x) = \frac{D^2\Theta}{1} F'(y) + \frac{D^2\Theta^2}{1\,.\,2} F''(y),$$

$$f'''(x) = \frac{D^3\Theta}{1} F'(y) + \frac{D^3\Theta^2}{1\,.\,2} F'''(y) + \frac{D^3\Theta^3}{1.2.3} F'''(y),$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \frac{D^n\Theta}{1} F'(y) + \frac{D^n\Theta^2}{1\,.\,2} F''(y) + \dots\dots + \frac{D^n\Theta^n}{1.2\dots n} F^{(n)}(y),$$

worin sich alle mit D bezeichneten Differentiationen auf die Variabele ϱ beziehen, die nach Ausführung jener Differentiationen der Null gleich zu nehmen ist. Wir setzen nun abkürzend

$$19) \qquad \Omega = \frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)} = \frac{\varrho}{\Theta},$$

multipliciren die obigen Gleichungen der Reihe nach mit den Ausdrücken

$$(n-1)_0\, [D_\varrho^{n-1}\Omega^n]_{(0)},\ (n-1)_1 [D_\varrho^{n-2}\Omega^n]_{(0)},\ (n-1)_2 [D_\varrho^{n-3}\Omega^n]_{(0)},\ \dots$$
$$(n-1)_{n-1}\, [\Omega_n]_{(0)}$$

und addiren die Producte. Die entstehende Summe bringen wir auf die Form

$$20)\quad (n-1)_0 [D_\varrho^{n-1} \Omega^n]_{(0)} f'(x) + (n-1)_1 [D_\varrho^{n-2} \Omega^n]_{(0)} f''(x) + \ldots + (n-1)_{n-1} [\Omega^n]_{(0)} f^{(n)}(x)$$

$$= \frac{a_n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(y) + \frac{a_{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(y) + \ldots + \frac{a_1}{1} F'(y),$$

wobei wir zur Abkürzung setzen

$$a_k = (n-1)_{n-1} [\Omega^n] [D^n \Theta^k] + (n-1)_{n-2} [D\,\Omega^n] [D^{n-1} \Theta^k] + (n-1)_{n-3} [D^2 \Omega^n] [D^{n-2} \Theta^k] + \ldots,\ \varrho = 0,$$

oder auch

$$a_k = (n-1)_0 [\Omega^n] [D^n \Theta^k] + (n-1)_1 [D\,\Omega^n] [D^{n-1} \Theta^k] + (n-1)_2 [D^2 \Omega^n] [D^{n-2} \Theta^k] + \ldots,\ \varrho = 0.$$

Man bemerkt augenblicklich, dass dieser Ausdruck unter der kürzeren Form

$$a_k = [D^{n-1} (\Omega^k . D\Theta^k)]_{(0)} = k [D^{n-1} (\Omega^n \Theta^{k-1} D\Theta)]_{(0)}$$

dargestellt werden kann, die zu Folge der Beziehung $\Omega\Theta = \varrho$ in

$$a_k = k [D^{n-1} (\varrho^{k-1} . \Omega^{n-k+1} D\Theta)]_{(0)}$$

übergeht. Durch Anwendung der Regel für die Differentiation der Producte wird hieraus.

$$a_k = k . (n-1)_{k-1} . 1.2\ldots(k-1) [D^{n-k} (\Omega^{n-k+1} D\Theta)]_{(0)}$$

und für $n - k = i$

$$21)\quad \frac{a_{n-i}}{1.2\ldots(n-i)} = (n-1)_{n-i-1} [D^i (\Omega^{i+1} D\Theta)]_{(0)}.$$

Vermöge der Bedeutungen von Θ und Ω ist weiter

$$\Theta = \frac{\varrho}{\Omega},\quad D\Theta = \frac{1}{\Omega} - \frac{\varrho}{\Omega^2} D\Omega$$

mithin durch Substitution dieses Werthes von $D\Theta$

$$D^i (\Omega^{i+1} D\Theta) = D^i \Omega^i - D^i (\varrho . \Omega^{i-1} D\Omega)$$
$$= D^i \Omega^i - \varrho D^i (\Omega^{i-1} D\Omega) - i D^{i-1} (\Omega^{i-1} D\Omega)$$
$$= \quad - \frac{\varrho}{i} D^{i+1} \Omega^i$$

und folglich

$$\frac{a_n}{1.2\ldots(n-i)} = -(n-1)_{n-i-1} \left[\frac{\varrho}{i} D^{i+1} \Omega^i \right]_{(0)}.$$

Der Ausdruck rechter Hand verschwindet wenn i nicht selber $= 0$ ist; für $i = 0$ dagegen hat man nach nr. (21)

$$\frac{a_n}{1.2\ldots n} = [\Omega D\Theta]_{(0)} = \left[\frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)} \varphi'(x+\varrho) \right]_{(0)} = 1.$$

Die rechte Seite der Gleichung (20) reducirt sich jetzt auf $F^{(n)}(y)$, und so ist nun

$$22)\quad F^{(n)}(y) = (n-1)_0 [D_\varrho^{n-1} \Omega^n]_{(0)} f'(x) + (n-1)_1 [D_\varrho^{n-2} \Omega^n]_{(0)} f''(x) + (n-1)_2 [D_\varrho^{n-3} \Omega^n]_{(0)} f'''(x) + \ldots$$

Die vorstehende Gleichung, welche die vollständige Lösung des gestellten Problemes enthält, kann auch inductorisch aus den Formeln für $F'(y)$, $F''(y)$, $F'''(y)$ abgeleitet und nachher mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ verificirt werden. Wir wollen diesen Beweis mittheilen, weil er auf einem wenigstens nicht gradezu in die Augen fallenden Hülfsatze beruht.

Der Bedeutung von Ω zufolge ist

$$\varphi(x+\varrho)=\varphi(x)+\frac{\varrho}{\Omega};$$

die linke Seite besitzt die Eigenschaft, dass die Differentiation in Beziehung auf x dasselbe Resultat giebt wie die Differentiation in Beziehung auf ϱ, mithin muss der rechten Seite die nämliche Eigenschaft zukommen, woraus folgt

$$\varphi'(x)-\frac{\varrho}{\Omega^2}D_x\Omega=\frac{1}{\Omega}-\frac{\varrho}{\Omega^2}D_\varrho\Omega,$$

oder

$$\frac{\varrho}{\Omega^2}D_x\Omega-\frac{\varrho}{\Omega^2}D_\varrho\Omega+\frac{1}{\Omega}=\varphi'(x).$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit Ω^{n+1}, differenziren k-mal in Beziehung auf ϱ und benutzen im ersten und zweiten Gliede linker Hand die bekannte Formel $D^k(\varrho S)=\varrho D^k S+k D^{k-1}S$; diess giebt

$$\varrho D_\varrho^k(\Omega^{n-1}D_x\Omega)+kD_\varrho^{k-1}(\Omega^{n-1}D_x\Omega)$$
$$-\varrho D_\varrho^k(\Omega^{n-1}D_\varrho\Omega)-kD_\varrho^{k-1}(\Omega^{n-1}D_\varrho\Omega)+D_\varrho^k\Omega^n=\varphi'(x)D_\varrho^k\Omega^{n+1}.$$

Für $\varrho=0$ reducirt sich diese Gleichung auf

$$k\,[D_\varrho^{k-1}(\Omega^{n-1}D_x\Omega)]_{(0)}-k\,[D_\varrho^{k-1}(\Omega^{n-1}D_\varrho\Omega)]_{(0)}+[D_\varrho^k\Omega^n]_{(0)}$$
$$=\varphi'(x)[D_\varrho^k\Omega^{n+1}]_{(0)},$$

d. i.

$$\frac{k}{n}[D_\varrho^{k-1}D_x\Omega^n]_{(0)}-\frac{k}{n}[D_\varrho^k\Omega^n]_{(0)}+[D_\varrho^k\Omega^n]_{(0)}=\varphi'(x)\,[D_\varrho^k\Omega^{n+1}]_{(0)};$$

vereinigt man das zweite mit dem dritten Gliede und multiplicirt nachher durchgängig mit $(n)_k$, so gelangt man zu der Relation

$$23)\qquad (n-1)_{k-1}[D_\varrho^{k-1}D_x\Omega^n]_{(0)}+(n-1)_k[D_\varrho^k\Omega^n]_{(0)}$$
$$=(n)_k\varphi'(x)\,[D_\varrho^k\Omega^{n+1}]_{(0)}.$$

Nach dieser Vorbereitung ist die Gleichung (22) sehr leicht zu beweisen. Bei umgekehrter Anordnung der Glieder rechter Hand hat man nämlich

$$24)\qquad F^{(n)}(y)=[\Omega^n]_{(0)}f^{(n)}(x)+(n-1)_1[D_\varrho\Omega^n]_{(0)}f^{(n-1)}(x)$$
$$+(n-1)_2[D_\varrho^2\Omega^n]_{(0)}f^{(n-2)}(x)+\ldots$$

und durch Differentiation in Beziehung auf x

$$F^{(n+1)}(y) \,.\, y' = [\Omega^n]_{(0)} f^{(n+1)}(x)$$
$$+ \{[D_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_1 [D_\varrho \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n)}(x)$$
$$+ \{(n-1)_1 [D_\varrho D_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_2 [D_\varrho^2 \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n-1)}(x)$$
$$+ \{(n-1)_2 [D_\varrho^2 D_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_3 [D_\varrho^3 \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n-2)}(x)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ersetzt man hier $[\Omega^n]_{(0)}$ durch das gleiche $[\Omega^{n+1}]_{(0)}\, \varphi'(x)$ und wendet im Uebrigen die Formel (23) für $k=1, 2, 3$ etc. an, so hebt sich $\varphi'(x)$ gegen y', und die übrig bleibende Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (23) nur dadurch, dass $n+1$ an der Stelle von n steht.

Die Formel (24) kann auf doppelte Weise umgestaltet werden, jenachdem eine Zusammenziehung oder eine weitere Entwickelung derselben wünschenswerth ist. Für den ersten Fall dient die Bemerkung, dass

$$f^{(k)}(x) = [D_\varrho^k f(x+\varrho)]_{(0)} = [D_\varrho^{k-1} f'(x+\varrho)]_{(0)}$$

gesetzt werden darf; es folgt dann

$$F^{(n)}(y) = [D_\varrho^{n-1} \{\Omega^n f'(x+\varrho)\}]_{(0)}.$$

Ohne Abkürzungen ausgedrückt, hat man also den Satz

$$25)\quad F[\varphi(x)] = f(x),\; F^{(n)}[\varphi(x)] = D_\varrho^{n-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho)-\varphi(x)}\right)^n f'(x+\varrho)\right\}_{(0)},$$

oder auch, wenn $x+\varrho=\xi$ gesetzt wird

$$26)\quad F^{(n)}[\varphi(x)] = D_\xi^{n-1}\left\{\left(\frac{\xi - x}{\varphi(\xi)-\varphi(x)}\right)^n f'(\xi)\right\}_{(\xi=x)},$$

von welchem später einige Anwendungen gemacht werden sollen.

Um ferner die Formel (24) weiter zu entwickeln schreiben wir

$$27)\quad F^{(n)}(y) = P_0 f^{(n)}(x) + (n-1)_1 P_1 f^{(n-1)}(x) + (n-1)_2 P_2 f^{(n-2)}(x) + \ldots$$

und bemerken, dass der Ausdruck

$$P_k = [D_\varrho^k \Omega^n]_{(0)} = \left[D_\varrho^k \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{-n}\right]_{(0)}$$

mittelst der Formel (17) umgestaltet werden kann, wenn die in letzterer vorkommenden Grössen x, y, n, p der Reihe nach durch $\varrho, \frac{\Theta}{\varrho}, k, -n$ ersetzt werden. Wir erhalten zunächst

$$D_\varrho^k \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{-n} =$$
$$-n(k+n)_k \left\{\frac{(k)_1}{n+1}\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{-n-1} D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right) - \frac{(k)_2}{n+2}\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{-n-2} D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2 + \ldots\right\}$$

mithin für $\varrho=0$

$$P_k = -n(n+k)_k \left\{\frac{(k)_1}{(n+1)y'^{n+1}}\left[D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)\right]_{(0)} - \frac{(k)_2}{(n+2)y'^{n+2}}\left[D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2\right]_{(0)} + \ldots\right\}.$$

Die Differentialquotienten rechter Hand gestatten eine weitere Transformation; man findet nämlich, wenn die identische Gleichung

$$\varrho^i \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^i = \Theta^i$$

$(k+i)$mal differenzirt und nachher $\varrho=0$ genommen wird,

$$(k+i)_i.1.2.3\ldots i\left[D^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^i\right]_{(0)}=[D^{k+i}\Theta^i]_{(0)}$$

mithin

$$\left[D^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^i\right]_{(0)}=\frac{[D_\varrho^{k+i}\Theta^i]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+i)}.$$

Die für P_k angegebene Formel lässt sich daher in folgender Weise darstellen:

$$28)\qquad P_k=-n\frac{(n+k)_k}{y'^n}\left\{\frac{(k)_1}{n+1}\frac{Q_1}{y'}-\frac{(k)_2}{n+2}\frac{Q_2}{y'^2}+\ldots\right\}$$

wobei zur Abkürzung

$$29)\qquad Q_i=\frac{[D_\varrho^{k+i}\Theta^i]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+i)}$$

gesetzt worden ist. Wie man hieraus ersieht, haben die beiden in der Einleitung erwähnten Fundamentalprobleme mit einander die Eigenthümlichkeit gemein, dass ihre Lösungen zuletzt auf die mehrfachen Differentiationen der Potenzen von Θ zurückkommen.

Die Differentiation unentwickelter Functionen.

Wenn zwischen den Variabelen x und y die Gleichung

$$30)\qquad x=\varphi(y)$$

statt findet, so würde daraus ein Resultat von der Form

$$y=\psi(x)$$

folgen und irgend eine Function von y, etwa $f(y)$, wäre dann auch eine Function von x, was durch die Gleichung

$$f(y)=F(x)$$

ausgedrückt werden möge. Nach dem Vorigen hat es nun keine Schwierigkeit, die nach x genommenen Differentialquotienten von $f(y)=F(x)$ aus der ursprünglich gegebenen Gleichung herzuleiten; es ist nämlich

$$f(y)=F(x)=F[\varphi(y)],$$

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n}=\frac{d^n F(x)}{dx^n}=\frac{d^n F[\varphi(y)]}{[d\varphi(y)]^n}=F^{(n)}[\varphi(y)].$$

Man erhält folglich den gesuchten Differentialquotienten wenn man in nr. (25) y für x schreibt, also

$$31)\qquad \frac{d^n f(y)}{dx^n}=D_\varrho^{n-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(y+\varrho)-\varphi(y)}\right)^n f'(y+\varrho)\right\}_{(0)}.$$

Am einfachsten gestaltet sich die Sache in dem häufig vorkommenden Falle $f(y)=y$ d. h. da, wo die Differentialquotienten der inversen Function $y=\psi(x)$ gesucht werden; es ist dann

$$32)\qquad \frac{d^n y}{dx^n}=D_\varrho^{n-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(y+\varrho)-\varphi(y)}\right)^n\right\}_{(0)}.$$

Selbstverständlich könnte man auch diese Ausdrücke mittelst der Formeln (27) und (28) weiter entwickeln, wenn man in letzteren y durch $x = \varphi(y)$ ersetzt.

Die Burmann'sche Reihe.

Als weitere Anwendung der im zweiten Abschnitte aufgestellten Formeln diene die Entwickelung irgend einer Function in eine Reihe, die nach Potenzen einer anderen Function derselben Variabelen fortschreitet. Um das hierauf bezügliche allgemeine Theorem zu erhalten, bedarf es nur einer Transformation des Maclaurin'schen Satzes

$$F(y) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} y + \frac{F''(0)}{1.2} y^2 + \frac{F'''(0)}{1.2.3} y^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{F^{(n)}(0)}{1.2\dots n} y^n + R_n,$$

wobei wir dem Reste die bekannte Form

$$R_n = \frac{1}{1.2\dots n} \int_0^y (y-\omega)^n\, F^{(n+1)}(\omega)\, d\omega$$

ertheilen. Mittelst der Substitutionen

$$y = \varphi(x), \quad F[\varphi(x)] = f(x)$$

erhalten wir zunächst nach nr. (26)

$$F^{(m)}[\varphi(x)] = D_\varrho^{m-1} \left\{ \left(\frac{\xi - x}{\varphi(\xi) - \varphi(x)} \right)^m f'(\xi) \right\}_{(\xi = x)}$$

und damit nun linker Hand $F^{(m)}(0)$ zum Vorschein komme, müssen wir dem x einen solchen Werth geben, dass $\varphi(x)$ verschwindet. Bezeichnen wir mit a irgend eine reelle oder complexe Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$, so haben wir

$$F^{(m)}(0) = D_\xi^{m-1} \left\{ \left(\frac{\xi - a}{\varphi(\xi)} \right)^m f'(\xi) \right\}_{(\xi = a)}$$

und können jetz die obige Entwickelung in folgender Form darstellen.:

$$33)\quad f(x) = f(a) + \frac{A_1}{1} \varphi(x) + \frac{A_2}{1.2} \varphi(x)^2 + \frac{A_3}{1.2.3} \varphi(x)^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{A_n}{1.2\dots n} \varphi(x)^n + R_n,$$

$$34)\quad A_m = D_x^{m-1} \left\{ \left(\frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^m f'(x) \right\}_{(x=a)}.$$

Was den Rest R_n betrifft, so ist zunächst

$$R_n = \frac{1}{1.2\dots n} \int_0^{\varphi(x)} [\varphi(x) - \omega]^n F^{(n+1)}(\omega)\, d\omega,$$

durch Einführung einer neuen Variabelen t von der Art, dass $\omega = \varphi(t)$, wird hieraus

$$R_n = \frac{1}{1.2..,n} \int_a^x [\varphi(x) - \varphi(t)]^n F^{(n+1)}[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

doch ist zu bemerken, dass den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \varphi(x)$ nur in dem Falle die Grenzen $t = a$ und $t = x$ entsprechen, wo $\varphi(t)$ von $t = a$ bis $t = x$ entweder nur wächst oder nur abnimmt, weil diese Eigenschaft bei der früheren Variabelen ω von selbst statt findet. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir

$$35)\quad R_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \int_a^x [\varphi(x) - \varphi(t)]^n \varphi'(t)\,dt\, D_\varrho^n \left\{ \left(\frac{\varrho}{\varphi(t+\varrho) - \varphi(t)} \right)^{n+1} f'(t+\varrho) \right\}_{(0)}.$$

Das in den Gleichungen (33) und (34) ausgesprochene Theorem ist bereits im Jahre 1796 von **Burmann** auf anderem Wege entwickelt und durch **Legendre** der französischen Akademie mitgetheilt worden (*Lacroix*, *Traité du calcul différentiel etc. Tome III pag.* 623); die obige Ableitung desselben dürfte jedenfalls die natürlichste und auch in so fern die vollständigste sein, als sie gleichzeitig den Rest der Reihe kennen lehrt.

Als ein in mancher Hinsicht bemerkenswerthes Beispiel mag die Annahme

$$f(x) = x^p, \quad \varphi(x) = e^x - 1$$

dienen, wo p eine ganze positive Zahl bezeichnen soll. Man findet sehr leicht

$$x^p = \frac{A_p}{1.2\ldots p}(e^x - 1)^p + \frac{A_{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}(e^x-1)^{p+1} + \frac{A_{p+2}}{1.2\ldots(p+2)}(e^x-1)^{p+2} + \ldots.$$

$$A_m = D^{m-1}\left\{ \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^m p x^{p-1} \right\}_{(0)},$$

und da man dieser Gleichung auch die Form

$$[l(1+z)]^p = \frac{A_p}{1.2\ldots p} z^p + \frac{A_{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} z^{p+1} + \frac{A_{p+2}}{1.2\ldots(p+2)} z^{p+2} + \ldots$$

ertheilen kann, so erhellt augenblicklich, dass ihre Gültigkeit an die Bedingung $1 > z > -1$ oder $l2 > x > -\infty$ gebunden ist. Zu derselben Reihenentwickelung führt auch ein anderer Weg. Die Formel (14) giebt nämlich für $F(y) = y^p$ und wenn nachher $x = 1 + z$ gesetzt wird.

$$D_z^n [l(1+z)]^p$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(1+z)^n} \left\{ \overset{n}{C}_{n-1} p\, [l(1+z)]^{p-1} - \overset{n}{C}_{n-2}\, p(p-1)\, [l(1+z)]^{p-2} + \ldots \right\}$$

und hieraus zieht man mittelst des **Maclaurin**'schen Satzes

$$[l(1+z)]^p$$

$$= \overset{p}{C}_0 z^p - \overset{p+1}{C}_1 \frac{z^{p+1}}{p+1} + \overset{p+2}{C}_2 \frac{z^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - \ldots$$

Vergleicht man diese Entwickelung von $[l(1+z)]^p$ mit der vorhergehenden, so gelangt man zu einer neuen Ausdrucksweise der Facultätencoefficienten; es ist nämlich

$$\overset{p+k}{C_k} = \frac{(-1)^k A_{p+k}}{1.2.3\ldots p} = \frac{(-1)^k}{1.2\ldots(p-1)} D^{p+k-1} \left\{ \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{p+k} x^{p-1} \right\}_{(0)}$$

oder auch nach der Regel für die Differentiation der Producte

$$\overset{p+k}{C_k} = (-1)^k (p+k-1)_{p-1} D^k \left\{ \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{p+k} \right\}_{(0)}.$$

d. i., wenn n für $p+k$ und ϱ für x geschrieben wird.

$$36)\qquad \overset{n}{C_k} = (-1)^k (n-1)_k \left[D^k \left(\frac{\varrho}{e^\varrho-1}\right)^n \right]_{(0)}.$$

Der in Klammern befindliche Differentialquotient gehört der früher betrachteten Form

$$P_k = [D_\varrho^k \Omega^n]_{(0)} = \left[D_\varrho^k \left(\frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho)-\varphi(x)}\right)^n \right]_{(0)}$$

an und kann daher nach nr. (28) entwickelt werden sobald man $y=\varphi(x)=e^x$ und nachher $x=0$ setzt, wodurch y' den Werth 1 annimmt; es ist demgemäss

$$37)\qquad \left[D^k \left(\frac{\varrho}{e^\varrho-1}\right)^n \right]_{(0)}$$

$$= -n.(n+k)_k \left\{ \frac{(k)_1}{n+1} Q_1 - \frac{(k)_2}{n+2} Q_2 + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{(k)_k}{n+k} Q_k \right\},$$

und darin

$$Q_i = \frac{[D^{k+i}(e^\varrho-1)^i]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots.(k+i)}$$

d. i. bei Ausführung der angedeuteten Differentiation

$$38)\qquad Q_i = \frac{(i)_0 i^{k+i} - (i)_1 (i-1)^{k+i} + (i)_2 (i-2)^{k+i} - \ldots}{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+i)}.$$

Dieser Ausdruck hat gleichfalls eine Beziehung zur Theorie der Facultäten. Versteht man nämlich nach Crelle's Bezeichnung unter $(\mu, +1)^n$ die Facultät

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1),$$

so bedeutet $(\mu, +1)^{-n}$ den Bruch

$$\frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-n)},$$

welcher für $\mu > n$ in eine nach absteigenden Potenzen fortgehende Reihe entwickelt werden kann nämlich

$$\overset{-n}{C_0}\mu^{-n} + \overset{-n}{C_1}\mu^{-n-1} + \overset{-n}{C_2}\mu^{-n-2} + \ldots$$

Durch Einführung von $\lambda = \frac{1}{\mu}$ folgt hieraus

$$\frac{1}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)\ldots(1-n\lambda)}$$

$$=\overset{-n}{C}_0+\overset{-n}{C}_1\lambda+\overset{-n}{C}_2\lambda^2+\overset{-n}{C}_3\lambda^3+\ldots$$

und es kommt nun darauf an, die Grössen $\overset{-n}{C}_0$, $\overset{-n}{C}_1$ etc. zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass man von der leicht erweisbaren identischen Gleichung

$$\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots n.\lambda^n}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)\ldots(1-n\lambda)}$$
$$=(n)_0-(n)_1\frac{1}{1-\lambda}+(n)_2\frac{1}{1-2\lambda}-(n)_3\frac{1}{1-3\lambda}+\ldots$$

ausgeht, die rechte Seite in eine nach steigenden Potenzen von λ fortschreitende Reihe umsetzt und diese Entwickelung mit der vorigen vergleicht; man findet

$$39)\qquad \overset{-n}{C}_k=\frac{(n)_0 n^{n+k}-(n)_1(n-1)^{n+k}+(n)_2(n-2)^{n+k}-\ldots}{1.2.3\ldots n}$$

Die Formel (38) wird hiernach sehr einfach

$$Q_i=\frac{1}{(k+i)_i}\overset{-i}{C}_k,$$

und durch Substitution der Werthe von Q_1, Q_2, $\ldots Q_k$ in 37) und 36) ergiebt sich

$$\overset{n}{C}_k=(-1)^{k+1}(n-1)_k n(n+k)_k\left\{\frac{(k)_1}{(k+1_1)}\,\frac{\overset{-1}{C}_k}{n+1}-\frac{(k)_2}{(k+2)_2}\,\frac{\overset{-2}{C}_k}{n+2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{k+1}\frac{(k)_k}{(2k)_k}\,\frac{\overset{-k}{C}_k}{n+k}\right\}.$$

Nimmt man die eingeklammerten Summanden in umgekehrter Ordnung und beachtet die Relation

$$(n+k)_k n(n-1)_k=(n-k)\,\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots(2k)}\cdot\frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}$$
$$=(n-k)(n+k)_{2k}(2k)_k=(n-k)(n+k)_{n-k}(2k)_k,$$

so erhält man schliesslich

$$40)\quad \overset{n}{C}_k=(n-k)(n+k)_{n-k}\left\{\frac{(2k)_0}{n+k}\overset{-k}{C}_k-\frac{(2k)_1}{n+k-1}\overset{-(k-1)}{C}_k+\frac{(2k)_2}{n+k-2}\overset{-(k-2)}{C}_k-\ldots\right\}.$$

Hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass die Facultätencoefficienten positiver Exponenten durch die Facultätencoefficienten negativer Exponenten ausgedrückt werden können. Diese Beziehung hat der Verf. schon füher in Crelle's Journal Bd. 44 in weniger einfacher Form mitgetheilt.

Die Umkehrungsformel von Lagrange.

In der Gleichung 33) schreiben wir y statt x und setzen

$$\varphi(y)=\frac{y-a}{\psi(y)};$$

die Function $\varphi(y)$ verschwindet dann für $y=a$, wofern nicht $\psi(a)=0$ ist,

ein Fall, den wir durch Voraussetzung ausschliessen. Die nunmehrige Gleichung

$$41)\qquad f(y)=f(a)+\frac{A_1}{1}\,\frac{y-a}{\psi(y)}+\frac{A_2}{1.2}\left(\frac{y-a}{\psi(y)}\right)^2+\dots$$
$$\dots+\frac{A_n}{1.2\dots n}\left(\frac{y-a}{\psi(y)}\right)^n+R_n,$$
$$A_m=D_y^{m-1}\{\psi(y)^m f'(y)\}_{(y=a)},$$

ist der Hauptsache nach identisch mit der Umkehrungsformel von Lagrange, denn für

$$42)\qquad \frac{y-a}{\psi(y)}=x \text{ oder } y=x\psi(y)+a$$

hat man

$$43)\qquad f(y)=f(a)+\frac{A_1}{1}x+\frac{A_2}{1.2}x^2+\dots+\frac{A_n}{1.2\dots n}x^n+R_n,$$

und hier bedeutet y eine Wurzel der Gleichung $y=x\psi(y)+a$ wie in dem genannten Theoreme von Lagrange. Auch würden sich aus den Gleichungen (41) und (42) die Grenzen bestimmen lassen, innerhalb deren die Formel (43) gilt. Durch Untersuchung des Restes R_n in nr. (41) erfährt man nämlich dass Intervall, auf welches y beschränkt werden muss, wenn bei unendlich wachsenden n der Rest verschwinden soll, und mittelst der Gleichung (42) bestimmt man nachher das entsprechende Intervall für die neu eingeführte Variabele x. Wir halten es übrigens nicht für nöthig diese Andeutung weiter auszuführen, da bereits von Cauchy gezeigt worden ist, dass man die Gültigkeitsbedingungen für die Gleichung (43) auf sehr kurze von jeder Restbetrachtung unabhängige Weise a priori ermitteln kann.

VI.

Ueber die Reduction der Attraktionskräfte zweier Massen.

Von Prof. Dr. W. Schell in Marburg.

Der allbekannte Satz der Statik, dass zwei aus concentrischen Schichten gebildete Kugeln, die sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, aufeinander dieselbe Wirkung ausüben, als wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären, fordert zu der Untersuchung auf, in welcher Form die gegenseitige Wirkung zweier Massen von endlichen Dimensionen überhaupt reducirt werden kann auf die Wirkung zweier Punkte,

in welchen man diese Massen concentrirt denkt und in wie weit diese Reduction von dem zum Grunde gelegten Attraktionsgesetze unabhängig ist. Die folgenden Entwickelungen haben die Beantwortung dieser Fragen zum Gegenstande.

I.

Es seien M und M' irgend zwei starre Massen, welche gegenseitig auf einander wirken, jedoch so, dass die Wirkung je zweier ihrer Elemente proportional dem Produkte deren Massen und einer Function ihrer Entfernung ist. Jedes Element der Masse M wird alsdann von Kräften afficirt, welche von den Elementen der Masse M' ausgehen, und umgekehrt greifen an jedem Elemente von M' Kräfte an, welche von den Elementen der Masse M herrühren; diese Kräfte sind einander paarweise gleich und entgegengesetzt.

Um die sämmtlichen an M angreifenden Elementarkräfte auf eine Resultante und ein resultirendes Paar zu reduciren, legen wir durch irgend einen Punkt O des Raumes, den wir für einen Augenblick mit der Masse M in fester Verbindung denken wollen, drei zu einander rechtwinklige Axen und die drei durch diese bestimmten zu ihnen und unter einander rechtwinkligen Ebenen. Die Summen der Projectionen der Kräfte auf diese Axen geben die Componenten X, Y, Z der im Punkte O angreifenden Resultanten R des Systems und die Summen der Projectionen der Kräfte auf die drei Ebenen, jede Projection mit ihrem Abstand von der zur Ebene senkrechten Axe multiplicirt, geben die Componenten L, M, N des resultirenden Kräftepaares G, welches in Verbindung mit R die sämmtlichen an der Masse M angreifenden Kräfte zu ersetzen im Stande ist. Die Momente L, M, N denken wir resp. auf die Axen, längs welchen die Kräfte X, Y, Z wirken, als Längen aufgetragen und mit Hülfe des Parallelepipeds, welches über ihnen construirt werden kann, die Richtung und Grösse von G bestimmt. Die Richtung der Axe des Paares G wird mit der Richtung von R einen Winkel bilden, der φ heissen mag; der Punkt O, in welchem R angreift, ist ein beliebiger Punkt des Raumes; wie man ihn auch immer wählen mag, so bleibt stets die Intensität und die Richtung der Kraft R dieselbe. Man kann also die Resultante parallel mit sich verlegen, ohne sie an Intensität zu verändern, aber eine Aenderung ihrer Lage hat eine Aenderung des Momentes und der Axenrichtung des resultirenden Paares zur Folge. Unter allen Lagen, welche die Resultante R erhalten kann, giebt es eine, welcher das kleinste resultirende Paar zugehört. Die Axe dieses kleinsten Paares ist parallel der Resultanten, oder was dasselbe ist, die Ebene des Paares steht auf ihr senkrecht. Die Grade, längs welcher in diesem Falle die Resultante R wirkt, heisst nach Poinsot die Centralaxe des Systems, weil sich die Axen aller übrigen resultirenden Paare symmetrisch um sie gruppiren. Sie kann leicht construirt werden, sobald für irgend eine Lage der Resultanten R die Axe G des zugehörigen Paares nach Grösse und Rich-

tung gegeben gefunden ist. Man hat zu dem Ende nur nöthig, die Resultante R um eine solche Grösse p parallel mit sich zu verlegen, dass das aus dieser Verlegung entspringende Paar Rp mit G zusammengesetzt ein Paar liefert, dessen Axe parallel R wird. Es muss also die Richtung von R die Diagonale eines Parallelogramms werden, dessen Seiten G und Rp sind und da die Axe von Rp senkrecht auf R steht, so folgt (s. Taf. I, Fig. 1), dass die Grösse des kleinsten Paares K, welches der längs der Centralaxe wirkenden Resultanten entspricht

$$K = G \cos \varphi,$$

sowie dass

$$Rp = G \sin \varphi$$

ist. Letztere Gleichung liefert die Strecke p, um welche die Centralaxe von der anfänglichen Lage von R absteht und die Richtung der Axe des Paares Rp entscheidet, ob die Verschiebung von R nach der einen oder nach der andern Seite von der durch R und G gelegten Ebene vorzunehmen ist. Ob hierbei die Axe des Paares K auch dem Sinne nach mit R übereinstimmt oder entgegengesetzt ist, hängt von der Beschaffenheit von φ ab.

Durch die Grösse und Lage der Linie R, G, p und den Winkel φ ist die Centralaxe des Systems der Kräfte, welche an der Masse M wirken, vollständig bestimmt und es kann dieselbe durch die Resultante R, welche längs derselben wirkt und das kleinste resultirende Paar K, dessen Axe ihr parallel ist, vertreten werden.

Betrachten wir jetzt den Punkt O als mit der Masse M' fest verbunden und bestimmen auf dieselbe Weise die Resultante R' und das resultirende Paar G', welche zusammen die an M' angreifenden Kräfte vertreten. Diese Kräfte sind einzeln den an M wirkenden gleich an Intensität und entgegengesetzt an Richtung; sie liefern daher auf den in O sich rechtwinklig kreuzenden Axen drei Proportionssummen X', Y', Z', welche den Proportionssummen X, Y, Z gleich und entgegengesetzt sind. Es ist daher die Resultante R' ebenfalls gleich und entgegengesetzt R. Ebenso sind die Proportionen dieser Kräfte auf die drei in O sich rechtwinklig schneidenden Ebenen den obigen entgegengesetzt und daher werden die Componenten L', M', N' des resultirenden Paares G' gleich und entgegengesetzt L, M, N und mithin wird auch G' selbst gleich G, aber von entgegengesetzter Axenrichtung und bildet mit R' wiederum den Winkel φ. Um nun die Centralaxe für das System M' zu finden, hat man R' um eine Strecke p' parallel mit sich selbst zu verlegen, dass die Axe des aus G' und $R'p'$ entspringende Paar K' parallel wird mit R'. Aus Fig. 2 ersieht man, dass die Axe von $R'p'$ der von Rp entgegengesetzt und $p = p'$ ist. Es hat folglich das Paar $R'p'$ mit Rp gleiches Moment aber entgegengesetzte Drehungsrichtung. Daraus ergiebt sich aber wieder, dass man die Resultante R' nach derselben Seite um p' verlegen muss, nach welcher dann R um p verlegt wurde. Es fällt daher die Centralaxe des Systemes M' mit der Centralaxe des

Systemes M zusammen und das kleinste Paar K', welches in Verbindung mit R' die Kräfte, welche am Systeme M' wirken, zu ersetzen vermag, hat gleiches Moment mit K, aber entgegengesetzte Drehungsrichtung.

Taf. I, Fig. 2. Aus diesen Entwickelungen ergiebt sich der Satz:

Die Kräfte, mit welchen zwei starre Massen, deren Elemente sich proportional dem Producte ihrer Massen und irgend einer Function ihrer Entfernung anziehen oder abstossen, auf einander wirken, lassen sich durch zwei Resultanten R, R' und zwei Kräftepaare K, K' ersetzen und zwar sind die beiden Resultanten gleich an Intensität, von entgegengesetzten Richtungen und fallen in eine und dieselbe Grade, **die gemeinschaftliche Centralaxe der beiden Massen** und haben die Kräftepaare gleiche Momente aber entgegengesetzte, der Centralaxe parallele Axen.

II.

Auf der gemeinschaftlichen Centralaxe beider Massen M, M' kann nun ein Punkt A' von der Eigenschaft gefunden werden, dass, wenn man in ihm die Masse M' vereinigen würde, die Wirkung zwischen ihm und der Masse M gleich der an M' angreifenden Kraft R' ist. Um diesen Punkt zu finden, sei s seine Entfernung von irgend einem auf der Centralaxe als Anfangspunkt beliebig angenommenen Punkte O und $U = c$ die Gleichung der Niveauflächen der Massen M, wo c einen Parameter bedeutet. Dann ist nach bekannten Sätzen die Kraft, mit welcher M auf jenen Punkt wirkt

$$-M' \frac{dU}{ds}$$

und man hat also zur Bestimmung von s die Gleichung

$$R' - M' \frac{dU}{ds} = 0.$$

Ganz auf dieselbe Art kann man auf der gemeinschaftlichen Centralaxe einen zweiten Punkt A so finden, dass wenn man in ihm die Masse M vereinigt, die Kraft, mit welcher M' auf ihn wirkt, gleich R ist. Sein Abstand s von O folgt aus der Gleichung

$$R - M \frac{dU}{ds} = 0,$$

wenn $U' = c$ die Gleichung der Niveauflächen der Masse M' ist. Die Wirkung der Kräfte R, R' an den Massen M, M' lässt sich also immer ersetzen durch die Wirkung zweier Punkte A, A' auf einander, in denen man die Massen M, M' concentrirt denkt. Der Abstand s beider Punkte auf der Centralaxe ergiebt sich leicht, wenn man bedenkt, dass

$$M M' \varphi(\varrho) = R$$

sein muss, wenn $\varphi(\varrho)$ die Funktion der Entfernung ist, welche als Wirkungsgesetz zweier Elemente von der Masse 1 ausdrückt. Für die Newton'sche Attraktion ist $\varphi(\varrho) = \frac{1}{\varrho^2}$, also

$$\varrho = \sqrt{\frac{MM'}{R}}$$

Die beiden Punkte A, A' mögen die **Wirkungscentra** der beiden Massen heissen. Mit ihrer Hülfe kann man jetzt den unter Nr. I. ausgesprochenen Satz auch in folgende Form einkleiden:

Die gegenseitige Wirkung zweier starrer Massen, deren Elemente sich proportional dem Produkte ihrer Massen und einer Function der Entfernung anziehen oder abstossen, kann ersetzt werden durch die Wirkung zweier Punkte auf der gemeinschaftlichen Centralaxe beider Massen, der Wirkungscentra derselben, in welchem man diese Massen vereinigt denkt in Verbindung mit zwei gleichen und entgegengesetzten Kräftepaaren, deren Axen der Centralaxe parallel sind.

Die beiden Centra A, A' wirken nun auf einander ebenso, wie zwei aus concentrischen Schichten gebildete Kugeln von den Massen M, M', deren Mittelpunkte A, A' sind, daher kann man auch sagen:

Die gegenseitige Wirkung zweier starrer Massen M, M' kann ersetzt werden durch die Wirkung zweier aus concentrischen Schichten gebildeter Kugeln von denselben Massen M, M' deren Mittelpunkte in die Wirkungscentra von M, M' fallen, und an welchen zwei gleiche und entgegengesetzte Kräftepaare drehen, deren Axen der Centrallinie der Kugeln parallel sind.

III.

In gewissen Fällen können die beiden Paare K und K' sich auf Null reduciren, so dass die beiden Massen bloss anziehend oder abstossend, aber nicht drehend auf einander einwirken und diese Wirkung dieselbe ist, als ob sie selbst in den Wirkungscentris vereinigt wären. Da die Paare K und K' einander gleich sind, so verschwinden beide zugleich, sobald eins von ihnen verschwindet. Die Bedingung, damit dies eintrete, ist also die, dass die Kräfte, welche an der einen Masse, z. B. an M wirken, sich auf eine blosse Resultante reduciren, d. h. dass die Ebene des Paares G parallel R oder was dasselbe ist $\varphi = 90^0$ sei. Findet sich für irgend eine Lage von R, dass $G = 0$ wird, so kann diese Bedingung, immer als erfüllt angesehen werden, denn durch Verlegung von R ergiebt sich immer ein G, dessen Ebene parallel R ist. Wir wollen jetzt einige Fälle der ebenerwähnten Art untersuchen.

1) Reducirt sich die eine Masse auf einen Punkt, so sind

die beiden Paare Null. Denn man kann diesen Punkt zu dem obenerwähnten Punkt O wählen, in welchem die Kraft R angriff; die Abstände der an ihm wirkenden Kräfte an den drei in O sich rechtwinklig schneidenden Axen, also auch die ihrer Projectionen sind sämmtlich Null, mithin auch die Componenten von G und folglich G selbst. Bei der Wirkung einer Masse auf einen Punkt ist also von einer drehenden Wirkung nicht die Rede. Die Centralaxe geht durch den Punkt und das Wirkungscentrum der Masse wird nach II. mit Hülfe der Gleichung $MM'\varphi(\varrho)=R$ bestimmt, da das Wirkungscentrum des Punktes dieser selbst ist.

2. Ist eine der Massen eine aus centrischen Schichten gebildete Kugel, so sind K und K' gleichfalls Null, d. h. zwei Massen, von denen die eine eine Kugel von dieser Beschaffenheit ist, üben blos eine anziehende oder abstossende, aber keine drehende Wirkung auf einander aus. Die Wirkungen der einzelnen Elemente der nicht kugelförmigen Masse auf die Kugel können nämlich ersetzt werden durch Kräfte, welche alle durch den Mittelpunkt der Kugel gehen und wenn man diesen zum Punkte O wählte, so sind wieder die Abstände ihrer Projectionen von den durch O gehenden Axen Null. Die Centralaxe geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

3) Sind beide Massen solche Kugeln, so gilt natürlich dasselbe; die Centralaxe fällt mit den Centralen der Kugeln zusammen und die Wirkungscentra fallen die beiden Mittelpunkte, wenn die Kugeln sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen. Es ist nämlich in diesem Falle

$$R = F\,\frac{MM'}{\varrho^2},$$

wenn ϱ die Centraldistanz bedeutet und $U = -\frac{M}{s}$, mithin besteht, nach II, die Gleichung:

$$R - \frac{M\,M'}{s^2} = 0$$

und folglich, wenn man die s am Mittelpunkte der Kugel M an rechnet, $s=\varrho$. Für die andere Kugel M' ist $U' = -\frac{M'}{(s+\varrho)}$, mithin

$$R - \frac{M\,M'}{(s+\varrho)^2} = 0$$

und folglich $s+\varrho=\varrho$, also $s=0$.

4) Wir wollen jetzt annehmen, es wirken zwei Massen M, M' von irgend welcher Beschaffenheit aus sehr grossen Entfernungen aufeinander. Je weiter M' von M sich entfernt, desto mehr nähern sich die Richtungen der an M wirkenden Kräfte dem Parallelismus und reduciren sich also immer mehr auf eine blose Resultante R, welche durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte (den Schwerpunkt von M) geht, um so mehr nähert sich

also das Paar K der Null. Ganz Aehnliches gilt von der Masse M'. Daher der Satz:

Je weiter sich zwei Massen von einander entfernen, desto weniger üben sie eine drehende Wirkung auf einander aus und um so genauer fällt die Richtung ihrer anziehenden oder abstossenden Wirkung in die Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte.

IV.

1) Wir wollen in Kürze noch zeigen, wie man den in Nr. I. entwickelten Satz analytisch verificiren kann. Zu dem Ende seien dm, dm' irgend zwei Elemente der Massen M, M', r ihre Entfernung und α, β, γ die Determinantenwinkel, welche die Richtung der in dm angreifenden, von dm' ausgehenden Kraft mit drei festen sich in einem beliebigen Punkt O rechtwinklig schneidenden Axe bildet, dann sind, wenn $\varphi(r)$ das Wirkungsgesetz ausdrückt, die Componenten dieser Kraft längs zwei Axen

$$\varphi(r) \cos\alpha \, dm \, dm', \quad \varphi(r) \cos\beta \, dm \, dm', \quad \varphi(r) \cos\gamma \, dm \, dm'$$

und wenn man diese Ausdrücke über die beiden Massen hinweg integrirt, die Componenten der Resultanten R

$$X = \int\int \varphi(r) \cos\alpha \, dm \, dm',$$

$$Y = \int\int \varphi(r) \cos\beta \, dm \, dm'$$

$$Z = \int\int \varphi(r) \cos\gamma \, dm \, dm'$$

und die Richtung von R wird bestimmt durch die drei Winkel λ, μ, ν, für welche die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\cos\lambda}{X} = \frac{\cos\mu}{Y} = \frac{\cos\nu}{Z} = \frac{1}{R}.$$

Die Componenten des der Resultanten R zugehörigen Paares G sind

$$L = \int\int \varphi(r) (y \cos\gamma - z \cos\beta) \, dm \, dm'$$

$$M = \int\int \varphi(r) (z \cos\alpha - x \cos\gamma) \, dm \, dm'$$

$$N = \int\int \varphi(r) (x \cos\beta - y \cos\alpha) \, dm \, dm',$$

wo die Integrationen gleichfalls über beide Massen zu erstrecken sind. Hieraus ergiebt sich das Moment des kleinsten Paares K, welches mit R zusammen die Kräfte der Masse M vertritt, wenn man die Momente L, M, N auf die Richtung der Resultante projicirt und die Summe der Projectionen nimmt, nämlich

$$K = L \cos\lambda + M \cos\mu + N \cos\nu,$$

oder mit Hülfe der obigen Werthe für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$:

$$KR = LX + MY + NZ.$$

Die in den Ausdrücken für X, Y, Z, L, M, N auftretenden Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sind Functionen der Coordinaten x, y, z des Elementes dm und der Coordinaten x', y', z' von dm', nämlich

$$\cos\alpha = \frac{x-x'}{r},\ \cos\beta = \frac{y-y'}{r},\ \cos\gamma = \frac{z-z'}{r}.$$

Um endlich die Gleichungen der Resultanten R zu finden, welcher das kleinste Paar K zugehört, oder was dasselbe ist, die Gleichungen der Centralaxe des Systems M_1 genügt eine Verlegung des Coordinatenursprungs O. Seien also ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes auf der Centralaxe, so findet man die Componenten des ihr entsprechenden Paares K aus obigen Ausdrücken für L, M, N, wenn man darin an die Stelle von x, y, z die Differenzen $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$ setzt. Diese Grössen sind aber auch $K\cos\lambda$, $K\cos\mu$, $K\cos\nu$, mithin bestehen als Gleichungen für die Centralaxe:

$$K\cos\lambda = \iint \varphi(r).[(y-\eta)\cos\gamma-(z-\zeta)\cos\beta]\,dm\,dm',$$

$$K\cos\mu = \iint \varphi(r).[(z-\zeta)\cos\alpha-(x-\xi)\cos\gamma]\,dm\,dm',$$

$$K\cos\nu = \iint \varphi(r).[(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha]\,dm\,dm'.$$

Dieselben reduciren sich aber, wie man durch Zerlegung der Klammer unter dem Integralzeichen leicht findet, auf die folgenden:

$$K\cos\lambda = L-(Z\eta-Y\zeta),$$
$$K\cos\mu = M-(X\zeta-Z\xi),$$
$$K\cos\nu = N-(Y\xi-X\eta).$$

2. Nimmt man nun dieselben Operationen am Systeme M' vor, so ergiebt sich zuerst, dass die Componenten der Elementarkraft, welche an dm angreift, sich bloss durch das Vorzeichen von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ von den Componenten der an dm angreifenden unterscheiden. Daraus folgt, dass die Componenten X', Y', Z' der Resultanten R' unseres Systems gleich und entgegengesetzt den Grössen X, Y, Z sind, dass also auch R' gleich und entgegengesetzt ist.

Durch Vertauschung von x, y, z; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ mit x', y', z'; $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$ erhält man ferner aus den Ausdrücken für L, M, N die Componenten L', M', N' des Paares G', welches mit R' zusammen die Kräfte des Systems M' ersetzt, nämlich:

$$L' = -\iint \varphi(r)[y'\cos\gamma - z'\cos\beta]\,dm\,dm',$$

$$M' = -\iint \varphi(r)[z'\cos\alpha - x'\cos\gamma]\,dm\,dm',$$

$$N' = -\iint \varphi(r)[x'\cos\beta - y'\cos\alpha]\,dm\,dm'.$$

sowie

$$G'R' = L'X' + M'Y' + N'Z'.$$

Nun ist aber leicht zu sehen, dass

$$L' = -L,\ M' = -M,\ N' = -N$$

ist. Man hat nämlich

$$y\cos\gamma - z\cos\beta = y\frac{z-z'}{r} - z\frac{y-y'}{r} = -\frac{yz'-zy'}{r}$$

und

$$y'\cos\gamma - z'\cos\beta = y'.\frac{z-z'}{r} - z'\frac{y-y'}{r} = -\frac{yz'-zy'}{r}$$

und ähnlich für die beiden andern Paare von analogen Ausdrücken. Daher sind also die Elemente der Integrale L', M', N' den Elementen von L, M, N gleich, mithin, da die Grenzen dieselben sind, auch die absoluten Werthe dieser Grössen selbst gleich. Da ferner $R' = R$ ist, so geht die letzte Gleichung jetzt über in

$$G'R' = (-L).(-X) + (-M)(-Y) + (-N)(-Z),$$

oder

$$G'R' = LX + MY + NZ$$

und hieraus folgt

$$G' = G.$$

Es sind also auch die beiden an M und M' wirkenden Kräftepaare gleich. Dass ihre Axenrichtungen entgegengesetzt sind, sieht man sofort, denn ihre Determinanten sind

$$\frac{L}{R},\ \frac{M}{R},\ \frac{N}{R} \text{ und } \frac{L'}{R},\ \frac{M'}{R},\ \frac{N'}{R}.$$

Die Gleichungen der Centralaxe des Systems M' ergeben sich aus den Gleichungen der Centralaxe des Systems M durch Vertauschung von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ mit $-\cos\lambda$, $-\cos\mu$, $-\cos\nu$, X, Y, Z mit $-X$, $-Y$, $-Z$; L, M, N, mit $-L$, $-M$, $-N$. Sie sind also, wenn jetzt ξ, η, ζ laufende Coordinaten auf dieser Centralaxe bedeuten:

$$\begin{aligned}
-K\cos\lambda &= -L - (-Z\eta + Y\zeta)\\
-K\cos\mu &= -M - (-X\zeta + Z\xi)\\
-K\cos\nu &= -N - (-Y\xi + X\eta)
\end{aligned}$$

oder also:

$$\begin{aligned}
K\cos\lambda &= L - (Z\eta - Y\zeta),\\
K\cos\mu &= M - (X\zeta - Z\xi),\\
K\cos\nu &= N - (Y\xi - X\eta).
\end{aligned}$$

Da diese Gleichungen mit den oben für die Centralaxe des Systems M gefundenen vollständig übereinstimmen, so folgt, dass die beiden Centralaxen der Systeme M, M' zusammenfallen.

VII.

Resultate einer Untersuchung über die Vertheilung der Elektricität auf Kugeln.

Von Dr. GUSTAV LOBECK in Dresden.

Gleich wichtig für Physik und Mathematik ist die mathematische Untersuchung über die Vertheilung der Elektricität auf leitenden Körpern, welche, von Poisson („*Mémoires de la classe des scienses math. et phys. de l'Institut de France, année* 1811“) angebahnt, neuerdings durch Herrn Professor Hankel („elektrische Untersuchungen“, in den Abhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften Bd. 5, 1856) eine neue Aufnahme gefunden hat. Ueberzeugt daher, dass ein, wenn auch kleiner, Beitrag zu diesen Untersuchungen willkommen ist, erlaube ich mir, wenigstens die Resultate einer von mir nach dieser Richtung hin unternommenen Arbeit mitzutheilen.

In den genannten „elektrischen Untersuchungen“ leitet der Herr Professor Hankel auf sehr einfache und leichte Weise u. A. zwei Formeln her, die erste für die Vertheilung, welche auf einer Kugel von leitender Substanz infolge der Annäherung einer dergleichen elektrischen nichtleitenden entsteht, die zweite für die Vertheilung auf zwei leitenden elektrischen Kugeln, welche in gegenseitige Einwirkung auf einander gebracht werden.

Es sei (A) (s. Taf. I, Fig. 3) eine nicht leitende elektrische Kugel, (C) eine dergleichen leitende vor der Annäherung an (A) unelektrische und es bezeichne:

ϱ den Radius von (A)
r „ „ „ (B)
c die Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln,
η die (constante) Dicke der elektrischen Schicht auf (A),
y „ (variable) „ „ „ „ „ (B).

Dann ist (s. Hankel, „elektr. Unters.“ S. 455 und 462):

$$\text{I)} \qquad y = -\eta \frac{\varrho^2}{c^2} \psi z,$$

wenn $z = \frac{r}{c}$ und ψ die Function

$$\psi x = \frac{1}{x} \left\{ \frac{1 - x^2}{(1 - 2\mu x + x^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right\} = 3\, T_1 + 5\, T_2\, x + 7\, T_3\, x^2 + \text{etc.}$$

bedeutet. Dabei ist $\mu = \cos\vartheta$ und ϑ bezeichnet den Winkel, welchen der Radius für irgend einen Punkt der Kugel (C) mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kugeln bildet, denselben von der Seite an gerechnet, auf welcher die Kugel (A) liegt. Ferner sind T_1, T_2, T_3 etc. die Coefficienten der Entwicklung von $(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von x (unter Voraussetzung, dass x ein ächter Bruch), nämlich:

$$(1-2\mu x+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+T_1x+T_2x^2+T_3x^3+\text{etc.}$$

$$T_1=\mu,\ T_2=\frac{3\mu^2-1}{2},\ T_3=\frac{5\mu^3-3\mu}{2},\ T_4=\frac{35\mu^4-3\mu+3}{8},\ \text{etc.}$$

Die Formel I) giebt also die Dicke der elektrischen Schicht auf der Kugel (C) für jeden beliebigen Punkt derselben an, dessen Coordinaten r und ϑ sind. Sie bestimmt zugleich die Art der Elektricität (ob positiv oder negativ), indem man η positiv oder negativ annimmt, jenachdem die Kugel (A) mit positiver oder negativer Elektricität geladen ist. Angenommen, η sei positiv, so folgt aus Formel I:

1) Die elektrische Schicht ist auf der der Kugel (A) zugewandten Seite negativ, auf der entgegengesetzten positiv.

2) Für $\vartheta=0$ (also im Punkte B) erreicht die negative Elektricität ihr Maximum, nämlich:

$$y=-\eta\,\frac{\varrho^2}{c^2}\,\frac{3-z}{(1-z)^2},$$

für $\vartheta=180^0$ dagegen (also im Punkte B') die positive Elektricität, nämlich:

$$y=+\eta\,\frac{\varrho^2}{c^2}\,\frac{3+z}{(1+z)^2},$$

sodass also die Differenz zwischen beiden Dicken (ohne Rücksicht auf das Zeichen):

$$=-\eta\,\frac{\varrho^2}{c^2}\cdot\frac{2(3+z^2)}{(1-z^2)^2}.$$

3) Die Grenze der positiven und negativen Elektricität (wo also $y=0$) liegt in der Nähe des Poles ($\vartheta=90^0$ oder $\mu=0$), nämlich bei:

$$\mu=\frac{1+z^2-(1-z^2)^{\frac{2}{3}}}{2z},$$

oder, für den Fall, dass z ein kleiner Bruch:

$$\mu=\tfrac{2}{3}z+\frac{1}{18}z^3+\frac{2}{81}z^5+\frac{7}{486}z^7+\text{etc.}$$

Diese Grenze liegt im Allgemeinen stets auf der (A) zugewandten Hälfte von (C); sie rückt mit wachsender Entfernung nach dem Aequator der Kugel hin, entfernt sich dagegen von demselben mit wachsendem Radius.

4) Elektricitätsmenge:

$$-\frac{r^2}{4\pi}\int\!\!\int y\,d\mu\,d\psi\text{ *)}=\frac{\eta\varrho^2}{c^2z}\left\{\frac{1-z^2}{z\sqrt{1-2\mu z+z^2}}-\mu\right\}+\mathit{Const.}$$

Dies Integral wird im Punkte B und $B'=\frac{\eta\varrho^2}{2}$, also unabhängig von c und

*) Herr Professor Hankel versteht, abweichend von Poisson, unter Einheit der Dicke der elektrischen Schicht die Dicke der auf einer Kugel vom Radius 1 vertheilten Einheit der Elektricitätsmenge, welche Annahme auch in der folgenden Entwicklung beibehalten werden soll.

r. Es ergiebt sich daraus:

$$\text{Menge der negativen Electricität} = -\frac{\eta\varrho^2 z}{2}(3\nu - z),$$

wenn ν den *cos.* des Winkels an der Grenze bedeutet.

$$\text{Menge der positiven Elektricität} = +\frac{\eta\varrho^2 z}{2}(3\nu - z),$$

also dem absoluten Werthe nach ebensogross.

Menge der positiven Elektricität auf der hintern Halbkugel:

$$\frac{\eta\varrho^2}{2}\left(1 - \frac{1 - z^2}{\sqrt{1 + z^2}}\right) = \frac{3}{4}\eta\varrho^2 z^2 \left\{1 - \frac{7}{12}z^2 + \frac{11}{24}z^4 - \frac{25}{24}z^6 + \text{etc.}\right\},$$

folglich die Menge der positiven Elektricität auf der vordern Halbkugel:

$$\frac{75}{144}\eta\varrho^2 z^4 \left\{1 - \frac{53}{90}z^2 + \text{etc.}\right\}, \text{ nahe} = \tfrac{1}{2}\eta\varrho^2 z^4.$$

Ueber die Formel für die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden elektrischen Kugeln s. die Anmerkung zum 1. Beispiel in Nr. 3 S. 96.

Ich habe nun die Entwicklung ausgedehnt auf eine beliebige Anzahl leitender Kugeln, welche durch die Annäherung einer elektrischen nichtleitenden Kugel elektrisch werden, unter der Voraussetzung, dass die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln auf einer geraden Linie liegen. Die Resultate dieser Untersuchung sind folgende.

1. Es bezeichne V das Potenzial einer elektrischen Schicht von der (variablen) Dicke y in Bezug auf einen äusseren, V' dasselbe in Bezug auf einen inneren Punkt, ferner r, ϑ, ψ die gewöhnlichen Polarcoordinaten des Punktes, in welchem das Potenzial genommen wird, und r', ϑ', ψ' dieselben des Punktes, auf welchen sich das Potenzial bezieht. Dann lassen sich bekanntlich die beiden Potenziale in folgende Reihe entwickeln:

$$V = \frac{r^3}{r'^2}P_1 + \frac{r^4}{r'^3}P_2 + \frac{r^5}{r'^4}P_3 + \text{etc.}$$

$$V' = r' P_1 + \frac{r'^2}{r}P_2 + \frac{r'^3}{r^2}P_3 + \text{etc.},$$

wobei P_1, P_2, P_3 etc. im Allgemeinen ganze und rationale Functionen von ϑ und ψ bedeuten, welche, wenn $\cos\vartheta$ wieder $= \mu$ gesetzt wird, der Gleichung in partiellen Differenzialen genügen:

$$\frac{d\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right\}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2 P_n}{d\psi^2} + n(n+1)P_n = 0.$$

Für den Fall, dass der Punkt, in Beziehung auf welchen das Potenzial genommen ist, auf der Abscissenachse selbst liegt (wo also $\mu' = \cos\vartheta' = \pm 1$), hören die Coefficienten P auf, Functionen von μ' zu sein; es sollen die Werthe, welche sie für diesen speciellen Fall annehmen, entsprechend p_1, p_2, p_3 etc. heissen.

Wenn nun drei leitende Kugeln (C), (C'), (C''), oder eine nichtleitende Kugel (C) und zwei leitende (C') und (C''), dergestalt auf einander wirken, dass (C) auf (C') eine elektrische Schicht hervorruft, diese wiederum eine auf (C'') und man die Coefficienten p_1, p_2, p_3 etc. des Potenzials für die Vertheilung auf der Kugel (C') (das Potenzial auf einen in der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte liegenden Punkt bezogen) kennt — sie heissen resp. α_1, α_2, α_3 etc. —, so erhält man die entsprechenden Coefficienten p_1, p_2, p_3 etc. für das Potenzial der Vertheilung auf (C'') durch die Formel:

$$\text{II)} \qquad p_{m-1} = \frac{r^3}{d^3}\left(\pm m + m' \frac{r}{d}\alpha_2 \pm m'' \frac{r^2}{d^2}\alpha_3 + \text{etc.}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^{m-2}.$$

Hierin bedeutet:

r den Radius der Kugel (C'),

R „ „ „ „ (C''),

d die Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln,

m, m', m'' etc. die sogenannten figurirten Zahlen der m—1ten Ordnung,

$$\text{nämlich } m = m,\ m' = \frac{m(m+1)}{1.2},\ m'' = \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}, \text{ etc.,}$$

so dass also hiernach:

$$p_1 = -\frac{r^3}{d^3}\left(\pm 2\alpha_1 + 3\frac{r}{d}\alpha_2 \pm 4\frac{r^2}{d^2}\alpha_3 + \text{etc.}\right),$$

$$p_2 = -\frac{r^3}{d^3}\left(\pm 3\alpha_1 + 6\frac{r}{d}\alpha_2 \pm 10\frac{r^2}{d^2}\alpha_3 + \text{etc.}\right)\frac{R}{d},$$

$$p_3 = -\frac{r^3}{d^3}\left(\pm 4\alpha_1 + 10\frac{r}{d}\alpha_2 + 20\frac{r^2}{d^2}\alpha_3 + \text{etc.}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^2,$$

$$p_4 = \text{etc.}$$

Das obere oder untere Zeichen ist zu nehmen, jenachdem (C''), die dritte von den drei in Frage kommenden Kugeln, mit (C), der Kugel, von welcher die Wirkung ausgeht, auf derselben oder entgegengesetzten Seite von (C) liegt.

2. Nach einem bekannten Satze findet man aus den Coefficienten p die entsprechenden P durch Multiplication mit dem Coefficienten T des entsprechenden Gliedes aus der oben angeführten Entwickelung von $(1 - 2\mu z + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ und aus diesen y (die Dicke der elektrischen Schicht) selbst nach der gleichfalls bekannten Gleichung:

$$y = -\{3P_1 + 5P_2 + 7P_3 + \text{etc.}\}.$$

Das in der vorigen Nummer angeführte Resultat II. kann somit dazu dienen, die Vertheilung zu berechnen, welche eine elektrische Schicht von bekannter (constanter oder variabler) Dicke auf einer anderen leitenden Kugel, deren Mittelpunkt auf derselben geraden Linie liegt, hervorruft.

Es werde eine Vertheilung, welche durch eine nichtleitende elektrische Kugel auf einer ihr genäherten leitenden Kugel hervorgerufen wird, eine Vertheilung erster Art genannt; dann die Vertheilung, welche eine solche auf einer zweiten leitenden Kugel hervorruft, eine Vertheilung

zweiter Art, die Wirkung dieser letztern auf eine dritte leitende Kugel eine Vertheilung **dritter Art** u. s. f. Die Formel I. stellt hiernach eine Vertheilung erster Art dar und aus dieser lassen sich mit Hülfe von II. die Vertheilungen zweiter, dritter u. s. w. Art finden. Bezeichnet:

$y_{\rm I}, y_{\rm II}, y_{\rm III}, y_{\rm IV}$ etc. resp. eine Vertheilung erster, zweiter, dritter, vierter u. s. w. Art; ferner:

ϱ wie vorher den Radius der nichtleitenden elektrischen Kugel,

$r_{\rm I}, r_{\rm II}, r_{\rm III}, r_{\rm IV}$ etc. resp. die Radien der ersten, zweiten, dritten, vierten u. s. w. leitenden Kugel,

c die Entfernung der Mittelpunkte der ersten leitenden Kugel von der nichtleitenden,

d die Entfernung der Mittelpunkte der zweiten leitenden Kugel von der ersten leitenden,

e die Entfernung der Mittelpunkte der dritten leitenden Kugel von der zweiten leitenden,

f die Entfernung der Mittelpunkte der vierten leitenden Kugel von der dritten leitenden, u. s. f.

so ergiebt sich:

$$\text{III a.}\quad \begin{cases} y_{\rm I} = -\eta\zeta^2\{3T_1 + 5T_2 z + 7T_3 z^2 + \text{etc.}\} \text{ (s. Formel I.)} \\ y_{\rm II} = +\eta\zeta^2\{3T_1\mathfrak{A}_1 + 5T_2\mathfrak{A}_2 z_1' + 7T_3\mathfrak{A}_3 z_1'^2 + \text{etc.}\}\, z_1^3 \\ y_{\rm III} = -\eta\zeta^2\{3T_1\mathfrak{B}_1 + 5T_2\mathfrak{B}_2 z_2' + 7T_3\mathfrak{B}_3 z_2'^2 + \text{etc.}\}\, z_1^3 z_2^3 \\ y_{\rm IV} = +\eta\zeta^2\{3T_1\mathfrak{C}_1 + 5T_2\mathfrak{C}_2 z_3' + 7T_3\mathfrak{C}_3 z_3' + \text{etc.}\}\, z_1^3 z_2^3 z_3^3 \\ y_{\rm V} = - \text{ etc. etc.} \end{cases}$$

Hierin bedeutet:

$$1)\quad \begin{cases} \zeta = \dfrac{\varrho}{c}, \quad z_1 = \dfrac{r_{\rm I}}{d}, \quad z_2 = \dfrac{r_{\rm II}}{e}, \quad z_3 = \dfrac{r_{\rm III}}{f}, \text{ etc.} \\ z = \dfrac{r_{\rm I}}{c}, \quad z_1' = \dfrac{r_{\rm II}}{d}, \quad z_2' = \dfrac{r_{\rm III}}{e}, \quad z_3' = \dfrac{r_{\rm IV}}{f}, \text{ etc.} \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_{m-1} = \pm m + m' z z_1 \pm m'' z^2 z_1^2 + \text{etc.} \\ \mathfrak{B}_{m-1} = \pm m\mathfrak{A}_1 + m'\mathfrak{A}_2 z_1' z_2 \pm m''\mathfrak{A}_3 z_1'^2 z_2^2 + \text{etc.} \\ \mathfrak{C}_{m-1} = \pm m\mathfrak{B}_1 + m'\mathfrak{B}_2 z_2' z_3 \pm m''\mathfrak{B}_3 z_2'^2 z_3^2 + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Diese Reihen lassen sich in geschlossene Ausdrücke verwandeln. Bezeichnet ψ wieder die frühere Funktion, so ist:

$$\text{III b.}\quad \begin{cases} y_{\rm I} = -\eta\zeta^2\psi z \text{ (s. Formel I.)} \\ y_{\rm II} = +\eta\zeta^2\dfrac{z_1^2}{z}[A^2\psi(Az_1') - \psi z_1'] \\ y_{\rm III} = -\eta\zeta^2\dfrac{z_1^2 z_2^2}{z z_1'}\{A[B^2\psi(Bz_2') - \psi z_2'] - [B'^2\psi(B'z_2') - \psi z_2']\} \\ y_{\rm IV} = +\eta\zeta^2\dfrac{z_1^2 z_2^2 z_3^2}{z z_1' z_2'}\left[\begin{matrix} A\{B[C^2\psi(Cz_3') - \psi z_3'] - [C''^2\psi(C''z_3') - \psi z_3']\} \\ -\{B'[C'^2\psi(C'z_3') - \psi z_3'] - [C''^2\psi(C''z_3') - \psi z_3']\} \end{matrix}\right] \\ y_{\rm V} = - \text{ etc. etc.} \end{cases}$$

Hierin bedeutet:

$$A = \frac{1}{1 \mp z z_1} \quad \Bigg| \quad B = \frac{1}{1 \mp A z_1' z_2} \quad B' = \frac{1}{1 \mp z_1' z_2} \quad \Bigg| \quad C = \frac{1}{1 \mp B z_2' z_3} \quad C' = \frac{1}{1 \mp B' z_2' z_3} \quad C'' = \frac{1}{1 \mp z_2' z_3} \quad \Bigg| \quad \text{etc.}$$

Anmerk. 1. Bezeichnet man die Entfernungen der Mittelpunkte der leitenden Kugeln (diese in der Ordnung genommen, wie sie auf einander wirken) von dem Mittelpunkte der elektrischen nichtleitenden Kugel resp. mit c, c', c'' etc., so ist bei Anwendung vorstehender Formeln zu nehmen:

in $\mathfrak{A}_m$ oder A das $\left.\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, wenn $c - 0$ und $c - c'$ $\left\{\begin{matrix}\text{gleiches}\\\text{entgegengesetztes}\end{matrix}\right.$ Zeichen haben,

in $\mathfrak{B}_m$ oder B und B' das $\left.\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, wenn $c' - c$ und $c' - c''$ $\left.\begin{matrix}\text{gleiches}\\\text{entgegengesetztes}\end{matrix}\right\}$ Zeichen haben,

in $\mathfrak{C}_m$ oder C, C' und C'' das $\left.\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, wenn $c'' - c'$ und $c'' - c'''$ $\left.\begin{matrix}\text{gleiches}\\\text{entgegengesetztes}\end{matrix}\right\}$ Zeichen haben,

u. s. w.

Anmerk. 2. Will man, was für die weitere Anwendung bequem, den Winkel ϑ stets von derselben Seite aus rechnen, etwa überall von links nach rechts, so ist in den Werthen für y_{I}, y_{II}, y_{III} etc. $\mu\,(= \cos\vartheta)$ mit $-\mu$ zu vertauschen, wenn resp. die Differenzen $c - 0$, $c' - c$, $c'' - c'$, $c''' - c''$ etc. negativ sind; oder ψ mit ψ', wenn man den Werth, den die Funktion ψ für ein negatives μ erhält, ψ' nennt.

Anmerk. 3. Die in den vorigen beiden Anmerkungen genannten Bedingungen gelten auch für den Fall, dass einige der leitenden Kugeln auf entgegengesetzter Seite der nichtleitenden liegen, sofern man unter c, c', c'' etc. die relativen Werthe versteht (d. h. diese Entfernungen negativ nimmt, wenn die betreffende Kugel links von der nichtleitenden liegt).

3. Beispiele.

Mit Hilfe der vorstehenden Formeln kann man sofort die Ausdrücke für die vollständige Vertheilung, welche auf zwei, drei und mehr leitenden Kugeln, entweder durch Annäherung einer elektrischen nichtleitenden Kugel, oder durch Elektrisirung einer oder mehrerer der leitenden Kugeln entsteht, hinschreiben.

Man erhält die Dicke der elektrischen Schicht, welche durch Vertheilung auf einer zuvor schon elektrischen Kugel hervorgerufen wird, durch Addition der ursprünglichen Dicke zu der Dicke der durch Vertheilung neu hinzugekommenen elektrischen Schicht. Hiernach hat man bei der

gegenseitigen Einwirkung mehrerer Kugeln auf einander die Wirkung einer **jeden** Kugel auf **jede** andere zu berechnen und diese einzelnen Wirkungen zu summiren. So ergiebt sich:

1. **Beispiel: Zwei elektrische leitende Kugeln wirken auf einander** (der einfachste Fall bei der Vertheilung auf mehreren leitenden Kugeln).

Die beiden Kugeln heissen (A) und (C),
Radius von (A) sei ϱ, Radius von $(C) = r$, Entfernung ihrer Mittelpunkte $= c$,
die (constante) Dicke der elektrischen Schicht auf (A) vor der Annäherung an (C) sei η,
die (constante) Dicke der elektrischen Schicht auf (C) vor der Annäherung an (A) sei y,

ferner werde gesetzt: $\frac{r}{c} = z$, $\frac{\varrho}{c} = \zeta$;

so ist, wenn beide Kugeln einander auf die Entfernung c genähert werden:

$a)$ die Dicke der elektrischen Schicht auf (A):

$$\text{IVa.}\quad \left\{\begin{aligned}
Y_a = &+ \eta \\
&- y z^2 \psi \zeta \\
&+ \eta \zeta^2 z \left[\left(\frac{1}{1-z^2}\right)^2 \psi \frac{\zeta}{1-z^2} - \psi \zeta\right] \\
&- y z^2 \zeta z \left\{\frac{1}{1-\zeta^2}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}\right)^2 \psi \frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}} - \psi \zeta\right] - \left[\left(\frac{1}{1-z^2}\right)^2 \psi \frac{\zeta}{1-z^2} - \psi \zeta\right]\right\} \\
&+ \eta \zeta^2 z \zeta z \left[\frac{1}{1-z^2}\left\{\frac{1}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{z^2}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}}\right)^2 \psi \frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}} - \psi \zeta\right] - \left[\left(\frac{1}{1-z^2}\right)^2 \psi \frac{\zeta}{1-z^2} - \psi \zeta\right]\right\}\right. \\
&\qquad \left. - \left\{\frac{1}{1-\zeta^2}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}\right)^2 \psi \frac{\zeta}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}} - \psi \zeta\right] - \left[\left(\frac{1}{1-z^2}\right)^2 \psi \frac{\zeta}{1-z^2} - \psi \zeta\right]\right\}\right] \\
&- \text{etc. etc.}
\end{aligned}\right.$$

b) die Dicke der elektrischen Schicht auf (C):

$$
\text{IVb.}\quad \left\{\begin{aligned}
Y_c = &+ y \\
&- \eta \zeta^2 \psi z \\
&+ y z^2 \zeta \left[\left(\frac{1}{1-\zeta^2}\right)^2 \psi \frac{z}{1-\zeta^2} - \psi z\right] \\
&- \eta \zeta^2 z \zeta \left\{\frac{1}{1-z^2}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\right)^2 \psi \frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}} - \psi z\right] - \left[\left(\frac{1}{1-\zeta^2}\right)^2 \psi \frac{z}{1-\zeta^2} - \psi z\right]\right\} \\
&+ y z^2 \zeta z \zeta \left[\frac{1}{1-\zeta^2}\left\{\frac{1}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{\zeta^2}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}}\right)^2 \psi \frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-\frac{z^2}{1-\zeta^2}}} - \psi z\right] - \left[\left(\frac{1}{1-\zeta^2}\right)^2 \psi \frac{z}{1-\zeta^2} - \psi z\right]\right\}\right. \\
&\qquad \left. - \left\{\frac{1}{1-z^2}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}}\right)^2 \psi \frac{z}{1-\frac{\zeta^2}{1-z^2}} - \psi z\right] - \left[\left(\frac{1}{1-\zeta^2}\right)^2 \psi \frac{z}{1-\zeta^2} - \psi z\right]\right\}\right] \\
&- \text{etc. etc.}
\end{aligned}\right.
$$

In beiden Formeln ist der Winkel ϑ von der Seite aus zu rechnen, nach welcher die andere Kugel liegt.

Anmerk. Dieselbe Formel hat Herr Prof. Hankel (s. „elektrische Untersuchungen" S. 473 ff.) auf directem Wege erhalten.

2. Beispiel: Zwei vorher unelektrische leitende Kugeln (C_1) und (C_2) werden dem Einflusse einer elektrischen nichtleitenden (A) ausgesetzt.

Radius von $(C_1) = r_1$, Radius von $(C_2) = r_2$, Radius von $(A) = \varrho$,

die (constante) Dicke der elektrischen Schicht auf $(A) = \eta$,

Entfernung der Mittelpunkte von (A) und $(C_1) = c_1$,

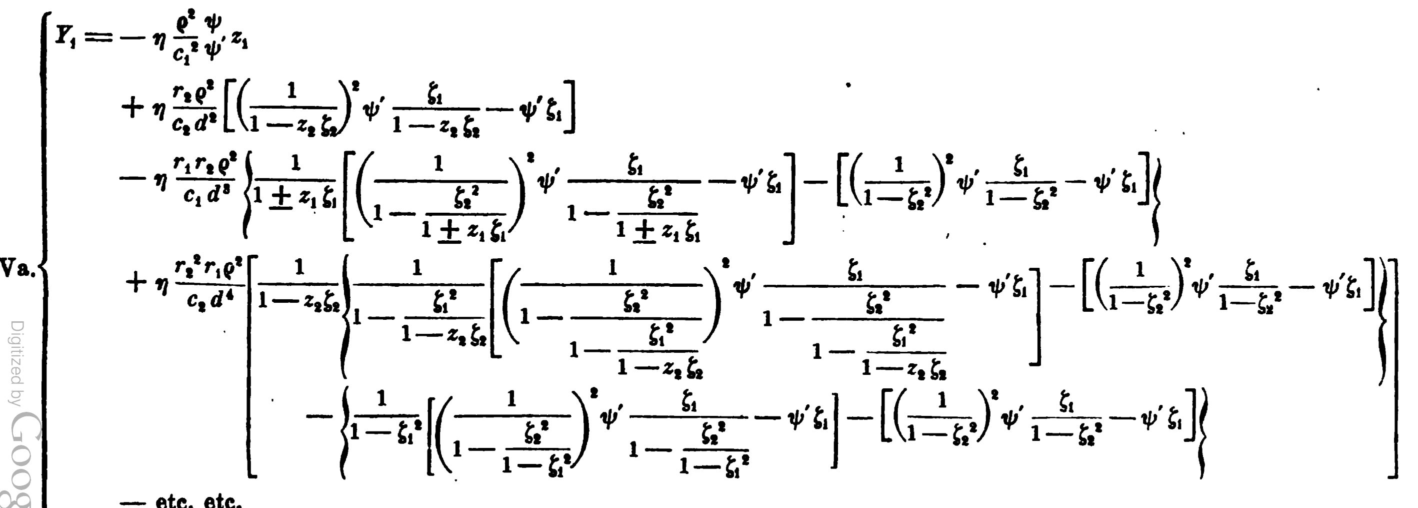
" " " " (A) " $(C_2) = c_2$,

" " " " (C_1) " $(C_2) = d$,

ferner werde gesetzt: $\frac{r_1}{c_1} = z_1, \quad \frac{r_2}{c_2} = z_2, \quad \frac{r_1}{d} = \zeta_1, \quad \frac{r_2}{d} = \zeta_2.$

Die drei Kugeln können zwei verschiedene Lagen gegen einander haben (s. Tafel I, Fig. 4); es soll das obere Zeichen oder das obere ψ für die erste Lage, das untere Zeichen oder das untere ψ für die zweite Lage gelten. Dann ist:

a) die Dicke der elektrischen Schicht auf (C_1):



$$\text{Va.}\quad \begin{cases} Y_1 = -\eta \frac{\varrho^2}{c_1^2} \frac{\psi}{\psi'} z_1 \\ \quad + \eta \frac{r_2 \varrho^2}{c_2 d^2} \left[\left(\frac{1}{1 - z_2 \zeta_2} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - z_2 \zeta_2} - \psi' \zeta_1 \right] \\ \quad - \eta \frac{r_1 r_2 \varrho^2}{c_1 d^3} \left\{ \frac{1}{1 \pm z_1 \zeta_1} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 \pm z_1 \zeta_1}} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 \pm z_1 \zeta_1}} - \psi' \zeta_1 \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_2^2} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - \zeta_2^2} - \psi' \zeta_1 \right] \right\} \\ \quad + \eta \frac{r_2^2 r_1 \varrho^2}{c_2 d^4} \left[\frac{1}{1 - z_2 \zeta_2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - z_2 \zeta_2}} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - z_2 \zeta_2}}} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - z_2 \zeta_2}}} - \psi' \zeta_1 \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_2^2} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - \zeta_2^2} - \psi' \zeta_1 \right] \right\} \right. \\ \qquad \left. - \left\{ \frac{1}{1 - \zeta_1^2} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 - \zeta_1^2}} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 - \zeta_1^2}} - \psi' \zeta_1 \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_2^2} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - \zeta_2^2} - \psi' \zeta_1 \right] \right\} \right] \\ \quad - \text{etc. etc.} \end{cases}$$

b) Dicke der elektrischen Schicht auf (C_2):

$$
\text{Vb.}\left\{
\begin{aligned}
Y_2 = & -\eta \frac{\varrho^2}{c_2^2}\psi z_2 \\
& + \eta \frac{r_1 \varrho^2}{c_1 d^2}\left[\left(\frac{1}{1 \pm z_1 \zeta_1}\right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 \pm z_1 \zeta_1} - \psi \zeta_2\right] \\
& - \eta \frac{r_2 r_1 \varrho^2}{c_2 d^3}\left\{\frac{1}{1 - z_2 \zeta_2}\left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - z_2 \zeta_2}}\right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - z_2 \zeta_2}} - \psi \zeta_2\right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_1^2}\right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 - \zeta_1^2} - \psi \zeta_2\right]\right\} \\
& + \eta \frac{r_1^2 r_2 \varrho^2}{c_1 d^4}\left[\frac{1}{1 \pm z_1 \zeta_1}\left\{\frac{1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 \pm z_1 \zeta_1}}\left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 \pm z_1 \zeta_1}}}\right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 \pm z_1 \zeta_1}}} - \psi \zeta_2\right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_1^2}\right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 - \zeta_1^2} - \psi \zeta_2\right]\right\}\right. \\
& \qquad \left. - \left\{\frac{1}{1 - \zeta_2^2}\left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - \zeta_2^2}}\right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - \zeta_2^2}} - \psi \zeta_2\right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_1^2}\right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 - \zeta_1^2} - \psi \zeta_2\right]\right\}\right] \\
& - \text{etc. etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Setzt man z. B. $\varrho = r_1 = r_2 = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 6$, so erhält man für $\vartheta = 0^0, 30^0, 60^0$ etc. 180^0 nach den vorstehenden zwei Formeln die in der folgenden Tabelle enthaltenen Zahlenwerthe für die Vertheilung auf den beiden leitenden Kugeln (C_1) und (C_2):

ϑ	Vertheilung auf (C_1)	Vertheilung auf (C_2)
0°	$-0{,}671\ \eta$	$-0{,}172\ \eta$
30°	$-0{,}430\ \eta$	$-0{,}120\ \eta$
60°	$-0{,}102\ \eta$	$-0{,}039\ \eta$
90°	$+0{,}078\ \eta$	$+0{,}018\ \eta$
120°	$+0{,}164\ \eta$	$+0{,}029\ \eta$
150°	$+0{,}202\ \eta$	$+0{,}040\ \eta$
180°	$+0{,}236\ \eta$	$+0{,}076\ \eta$

3. **Beispiel.** Vertheilung auf drei leitenden vorher unelektrischen Kugeln (C_1), (C_2), (C_3) infolge der Annäherung einer elektrischen nichtleitenden Kugel (A).

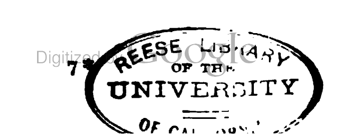
Dicke der elektrischen Schicht auf $(A) = \eta$
Radius von $(C_1) = r_1$, Radius von $(C_2) = r_2$, Radius von $(C_3) = r_3$,
Entfernung der Mittelpunkte von (C_1) und $(A) = c_1$,
" " " " (C_2) " $(A) = c_2$,
" " " " (C_3) " $(A) = c_3$,
" " " " (C_1) " $(C_2) = c_{1,2}$,
" " " " (C_2) " $(C_3) = c_{2,3}$,
" " " " (C_1) " $(C_3) = c_{1,3}$;

ferner werde gesetzt:

$$\frac{r_1}{c_{1,2}} = \zeta_1 \qquad \frac{r_2}{c_{1,2}} = \zeta_2 \qquad \frac{r_3}{c_{1,3}} = \zeta_3$$

$$\frac{r_1}{c_{1,3}} = \zeta_1' \qquad \frac{r_2}{c_{2,3}} = \zeta_2' \qquad \frac{r_3}{c_{2,3}} = \zeta_3'.$$

Es sind vier Lagen (s. Taf. I, Fig. 5) der vier Kugeln zu unterscheiden. Davon sind jedoch 3) und 4) nur die umgekehrte Ordnung von 2) und 1) und man kann daher, unter der Voraussetzung, ϑ stets von derselben Seite aus zu rechnen, die Formeln für die erstgenannten zwei Fälle leicht aus denen für die letztgenannten durch blose Vertauschung von ψ und ψ' erhalten. Es soll daher das obere Zeichen oder das obere ψ für die Lage 1), das untere Zeichen oder das untere ψ für die Lage 2) gelten. So ist:



a) die Dicke der elektrischen Schicht auf (C_1):

$$
\text{VIa.}\left\{
\begin{aligned}
Y_1 = & -\eta \frac{\varrho^2}{c_1^2} \psi z_1 \\
& + \eta \frac{r_2 \varrho^2}{c_2 c_{1,2}^2} \left[\left(\frac{1}{1 - z_2 \zeta_2} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - z_2 \zeta_2} - \psi' \zeta_1 \right] \\
& + \eta \frac{r_3 \varrho^2}{c_3 c_{1,3}^2} \left[\left(\frac{1}{1 - z_3 \zeta_3} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_1'}{1 - z_3 \zeta_3} - \frac{\psi'}{\psi} \zeta_1' \right] \\
& - \eta \frac{r_1 r_2 \varrho^2}{c_1 c_{1,2}^3} \left\{ \frac{1}{1 + z_1 \zeta_1} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 + z_1 \zeta_1}} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - \frac{\zeta_2^2}{1 + z_1 \zeta_1}} - \psi' \zeta_1 \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_2^2} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 - \zeta_2^2} - \psi' \zeta_1 \right] \right\} \\
& - \eta \frac{r_3 r_2 \varrho^2}{c_3 c_{2,3} c_{1,2}^2} \left\{ \frac{1}{1 - z_3 \zeta_3'} \left[\left(\frac{1}{1 \pm \frac{\zeta_2 \zeta_2'}{1 - z_3 \zeta_3'}} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 \pm \frac{\zeta_2 \zeta_2'}{1 - z_3 \zeta_3'}} - \psi' \zeta_1 \right] - \left[\left(\frac{1}{1 \pm \zeta_2 \zeta_2'} \right)^2 \psi' \frac{\zeta_1}{1 \pm \zeta_2 \zeta_2'} - \psi' \zeta_1 \right] \right\} \\
& - \eta \frac{r_1 r_3 \varrho^2}{c_1 c_{1,3}^3} \left\{ \frac{1}{1 \pm z_1 \zeta_1'} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_3^2}{1 \pm z_1 \zeta_1'}} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_1'}{1 - \frac{\zeta_3^2}{1 \pm z_1 \zeta_1'}} - \frac{\psi'}{\psi} \zeta_1' \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_3^2} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_1'}{1 - \zeta_3^2} - \frac{\psi'}{\psi} \zeta_1' \right] \right\} \\
& - \eta \frac{r_2 r_3 \varrho^2}{c_2 c_{2,3} c_{1,3}^2} \left\{ \frac{1}{1 \pm z_2 \zeta_2'} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_3 \zeta_3'}{1 \pm z_2 \zeta_2'}} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_1'}{1 - \frac{\zeta_3 \zeta_3'}{1 \pm z_2 \zeta_2'}} - \frac{\psi'}{\psi} \zeta_1' \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_3 \zeta_3'} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_1'}{1 - \zeta_3 \zeta_3'} - \frac{\psi'}{\psi} \zeta_1' \right] \right\} \\
& + \text{etc. etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

b) die Dicke der elektrischen Schicht auf (C_2):

$$
\text{VIb.}\left\{
\begin{aligned}
Y_2 = & - \eta \frac{\varrho^2}{c^2} \psi z_2 \\
& + \eta \frac{r_1 \varrho^2}{c_1 c_{1,2}^{\,2}} \left[\left(\frac{1}{1 + z_1 \zeta_1} \right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 + z_1 \zeta_1} - \psi \zeta_2 \right] \\
& + \eta \frac{r_3^{\,2} \varrho^2}{c_3 c_{2,3}^{\,2}} \left[\left(\frac{1}{1 - z_3 \zeta_3'} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_2'}{1 - z_3 \zeta_3'} - \frac{\psi' \zeta_2'}{\psi} \right] \\
& - \eta \frac{r_2 r_1 \varrho^2}{c_2 c_{1,2}^{\,3}} \left\{ \frac{1}{1 - z_2 \zeta_2} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - z_2 \zeta_2}} \right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 - \frac{\zeta_1^2}{1 - z_2 \zeta_2}} - \psi \zeta_2 \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_1^2} \right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 - \zeta_1^2} - \psi \zeta_2 \right] \right\} \\
& - \eta \frac{r_3 r_1 \varrho^2}{c_3 c_{1,3} c_{1,2}^{\,2}} \left\{ \frac{1}{1 - z_3 \zeta_3} \left[\left(\frac{1}{1 \mp \frac{\zeta_1 \zeta_1'}{1 - z_3 \zeta_3}} \right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 \mp \frac{\zeta_1 \zeta_1'}{1 - z_3 \zeta_3}} - \psi \zeta_2 \right] - \left[\left(\frac{1}{1 \mp \zeta_1 \zeta_1'} \right)^2 \psi \frac{\zeta_2}{1 \mp \zeta_1 \zeta_1'} - \psi \zeta_2 \right] \right\} \\
& - \eta \frac{r_1 r_3 \varrho^2}{c_1 c_{1,3} c_{2,3}^{\,2}} \left\{ \frac{1}{1 \pm z_1 \zeta_1'} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_3 \zeta_3'}{1 \pm z_1 \zeta_1'}} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_2'}{1 - \frac{\zeta_3 \zeta_3'}{1 \pm z_1 \zeta_1'}} - \frac{\psi' \zeta_2'}{\psi} \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_3 \zeta_3'} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_2'}{1 - \zeta_3 \zeta_3'} - \frac{\psi' \zeta_2'}{\psi} \right] \right\} \\
& - \eta \frac{r_2 r_3 \varrho^2}{c_2 c_{2,3}^{\,3}} \left\{ \frac{1}{1 \pm z_2 \zeta_2'} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta_3'^2}{1 \pm z_2 \zeta_2'}} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_2'}{1 - \frac{\zeta_3'^2}{1 \pm z_2 \zeta_2'}} - \frac{\psi' \zeta_2'}{\psi} \right] - \left[\left(\frac{1}{1 - \zeta_3'^2} \right)^2 \frac{\psi'}{\psi} \frac{\zeta_2'}{1 - \zeta_3'^2} - \frac{\psi' \zeta_2'}{\psi} \right] \right\} \\
& + \text{etc. etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

c) die Dicke der elektrischen Schicht auf (C_3):

$$
\text{VI c.}\left\{
\begin{aligned}
Y_3 = & -\eta\frac{\varrho^2}{c_3^2}\frac{\psi}{\psi'}z_3 \\
& + \eta\frac{r_1\varrho^2}{c_1 c_{1,3}^2}\left[\left(\frac{1}{1\pm z_1\zeta_1'}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3}{1\pm z_1\zeta_1'}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3\right] \\
& + \eta\frac{r_2\varrho^2}{c_2 c_{2,3}^2}\left[\left(\frac{1}{1\pm z_2\zeta_2'}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3'}{1\pm z_2\zeta_2'}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3'\right] \\
& - \eta\frac{r_2 r_1\varrho^2}{c_2 c_{1,2} c_{1,3}^2}\left\{\frac{1}{1-z_2\zeta_2}\left[\left(\frac{1}{1\mp\frac{\zeta_1\zeta_1'}{1-z_2\zeta_2}}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3}{1\mp\frac{\zeta_1\zeta_1'}{1-z_2\zeta_2}}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3\right]-\left[\left(\frac{1}{1\mp\zeta_1\zeta_1'}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3}{1\mp\zeta_1\zeta_1'}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3\right]\right\} \\
& - \eta\frac{r_3 r_1\varrho^2}{c_3 c_{1,3}^3}\left\{\frac{1}{1-z_3\zeta_3}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{\zeta_1'^2}{1-z_3\zeta_3}}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3}{1-\frac{\zeta_1'^2}{1-z_3\zeta_3}}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3\right]-\left[\left(\frac{1}{1-\zeta_1'^2}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3}{1-\zeta_1'^2}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3\right]\right\} \\
& - \eta\frac{r_1 r_2\varrho^2}{c_1 c_{1,2} c_{2,3}^2}\left\{\frac{1}{1+z_1\zeta_1}\left[\left(\frac{1}{1\pm\frac{\zeta_2\zeta_2'}{1+z_1\zeta_1}}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3'}{1\pm\frac{\zeta_2\zeta_2'}{1+z_1\zeta_1}}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3'\right]-\left[\left(\frac{1}{1\pm\zeta_2\zeta_2'}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3'}{1\pm\zeta_2\zeta_2'}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3'\right]\right\} \\
& - \eta\frac{r_3 r_2\varrho^2}{c_3 c_{2,3}^3}\left\{\frac{1}{1-z_3\zeta_3'}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{\zeta_2'^2}{1-z_3\zeta_3'}}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3'}{1-\frac{\zeta_2'^2}{1-z_3\zeta_3'}}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3'\right]-\left[\left(\frac{1}{1-\zeta_2'^2}\right)^2\frac{\psi}{\psi'}\frac{\zeta_3'}{1-\zeta_2'^2}-\frac{\psi}{\psi'}\zeta_3'\right]\right\} \\
& + \text{etc. etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

In den vorstehenden Formeln VI. ist der Winkel ϑ gleichfalls bei allen Kugeln von links nach rechts zu rechnen.

Ebenso leicht lassen sich Formeln aufstellen für die Vertheilung auf vier und mehr leitenden Kugeln. Allgemein würde man bei n leitenden Kugeln, um die Dicke der elektrischen Schicht auf einer dieser Kugeln zu erhalten, zu summiren haben:

1) eine Vertheilung erster Art,
2) $n-1$ Vertheilungen zweiter Art,
3) $(n-1)^2$ „ dritter „
4) $(n-1)^3$ „ vierter „
u. s. f.

4. Eine wesentliche Vereinfachung lassen diese Vertheilungsformeln zu unter der Voraussetzung, dass die Radien und Entfernungen der leitenden Kugeln gleich gross und verschwindend klein gegen die Entfernungen von der elektrischen nichtleitenden Kugel sind.

Es sei also eine elektrische nichtleitende Kugel (A) (s. Taf. I, Fig. 6) gegeben und n nichtleitende Kugeln, welche in der Ordnung, wie sie von (A) auf einander folgen, (C_1), (C_2), (C_3), ... (C_n) heissen sollen. Die Radien der letztern seien sämmtlich $= r$, die Entfernungen der Mittelpunkte zweier benachbarten derselben $= \delta$; der Radius von (A) sei wieder ϱ, die (constante) Dicke der elektrischen Schicht auf (A) wieder η, die Entfernung ihres Mittelpunktes von der ersten leitenden Kugel (C_1) sei c_1 oder c, von der zweiten c_2, dann $c_3, c_4, \dots c_n$, so dass allgemein $c_x = c + (x-1)\delta$. Voraussetzung ist ausserdem: $\frac{r}{c_x}$ und $\frac{\delta}{c_x}$ verschwindend klein.

Dann ergiebt sich als Ausdruck für die Dicke der elektrischen Schicht auf irgend einer der leitenden Kugeln (C_x):

$$\text{VII.}\quad Y_x = -\eta\zeta_x^2 \left\{ \begin{aligned} & 3T_1 \left[\begin{aligned} & 1 \\ & + \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 . 2 . S_3 \\ & + \left(\frac{r}{\delta}\right)^6 \left\{ 2.2.\overline{S_3S_3} + 3.3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 . \overline{S_4S_4} + \text{etc.} \right\} \\ & + \left(\frac{r}{\delta}\right)^9 \left\{ \begin{aligned} & 2\left\{ 2.2.\overline{S_3S_3S_3} + 3.3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 . \overline{S_3S_4S_4} + \text{etc.} \right\} \\ & + 3\left\{ 2.3.\overline{S_4S_4S_3} + 3.6\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 . \overline{S_4S_5S_4} + \text{etc.} \right\} \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right] \\ & + 5T_2\frac{r}{\delta} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 . 3 . S_4 \\ & + \left(\frac{r}{\delta}\right)^6 \left\{ 2.3.\overline{S_4S_3} + 3.6\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 . \overline{S_5S_4} + \text{etc.} \right\} \\ & + \left(\frac{r}{\delta}\right)^9 \left\{ \begin{aligned} & 3\left\{ 2.2.\overline{S_4S_3S_3} + 3.3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 . \overline{S_4S_4S_4} + \text{etc.} \right\} \\ & + 6\left\{ 2.3.\overline{S_5S_4S_3} + 3.6\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 . \overline{S_5S_5S_4} + \text{etc.} \right\} \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right] \\ & + \text{etc. etc.} \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet:

$$\zeta_x = \frac{\varrho}{c_x} = \frac{\varrho}{c + (x-1)\delta}$$

und T_1, T_2, etc. sind wieder die Coefficienten der Entwicklung

$$(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

nach Potenzen von x. Ferner bezeichnet:

$$1) \qquad S_u = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=x-1} \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^u - \sum_{\alpha=x+1}^{\alpha=n} \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^u$$

$$2) \qquad \overline{S_u S_v} = \sum_{\beta=1}^{\beta=x-1} \frac{A}{(x-\beta)^u} - \sum_{\beta=x+1}^{\beta=n} \frac{A}{(x-\beta)^u}$$

$$\text{wobei: } A = \sum_{\alpha=\beta+1}^{\alpha=n} \left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)^v - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)^v$$

$$3) \qquad \overline{S_u S_v S_w} = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=x-1} \frac{A}{(x-\gamma)^u} - \sum_{\gamma=x+1}^{\gamma=n} \frac{A}{(x-\gamma)^u}$$

$$\text{wobei: } A = \sum_{\beta=\gamma+1}^{\beta=n} \frac{B}{(\beta-\gamma)^v} - \sum_{\beta=1}^{\beta=\gamma-1} \frac{B}{(\beta-\gamma)^v}$$

$$\text{und: } B = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\beta-1} \left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)^w - \sum_{\alpha=\beta+1}^{\alpha=n} \left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)^w$$

etc. etc.

5. **Beispiele** zur letzten Formel.

Man erhält zunächst folgende Tabelle:

Für $n=$	2		3		
Für $x=$	1	2	1	2	3
S_3	+ 1	+ 1	+ 1,125	+ 2	+ 1,125
S_4	− 1	+ 1	− 1,0625	0	+ 1,0625
S_5	+ 1	+ 1	+ 1,03125	+ 2	+ 1,03125
$\overline{S_3 S_3}$	+ 1	+ 1	+ 2,14062	+ 2,25	+ 2,14062
$\overline{S_4 S_4}$	+ 1	+ 1	+ 0,06641	0	+ 0,06641
$\overline{S_5 S_5}$	+ 1	+ 1	+ 2,03223	+ 2,0625	+ 2,03223
$\overline{S_4 S_3}$	− 1	+ 1	− 2,07031	0	+ 2,07031
$\overline{S_5 S_4}$	− 1	+ 1	− 0,03320	0	+ 0,03320
$\overline{S_6 S_5}$	− 1	+ 1	− 2,01611	0	+ 2,01611
$\overline{S_5 S_3}$	+ 1	+ 1	+ 2,03516	+ 2,25	+ 2,03516
$\overline{S_6 S_4}$	+ 1	+ 1	+ 0,01660	0	+ 0,01660
$\overline{S_7 S_5}$	+ 1	+ 1	+ 2,00805	+ 2,0625	+ 2,00805
etc.	etc.		etc.		

Diese Werthe in die Formel VII. eingesetzt, ergiebt sich, wenn resp. Y_1, Y_2, Y_3, etc. die Dicke der elektrischen Schicht auf den Kugeln (C_1), (C_2), (C_3), etc. bezeichnen, z. B. für $\frac{r}{\delta} = \frac{1}{4}$:

1) Für zwei leitende Kugeln ($n = 2$):

$$Y_1 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c}\right)^2 \left\{3{,}097\, T_1 - 0{,}061\, T_2 + 0{,}028\, T_3\right\}$$

$$Y_2 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c+\delta}\right)^2 \left\{3{,}097\, T_1 + 0{,}061\, T_2 + 0{,}028\, T_3\right\}.$$

Also z. B. für $\mu = 1$, wo $T_1 = T_2 = T_3 = \text{etc.} = +1$:

$$Y_1 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c}\right)^2 . 3{,}065$$

$$Y_2 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c+\delta}\right)^2 . 3{,}185$$

und für $\mu = -1$, wo $T_1 = T_3 = \text{etc.} = -1$ und $T_2 = T_4 = \text{etc.} = +1$:

$$Y_1 = +\eta \left(\frac{\varrho}{c}\right)^2 . 3{,}185$$

$$Y_2 = +\eta \left(\frac{\varrho}{c+\delta}\right)^2 . 3{,}065.$$

2) Für drei leitende Kugeln ($n = 3$):

$$Y_1 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c}\right)^2 \left\{3{,}112\, T_1 - 0{,}066\, T_2 + 0{,}030\, T_3\right\}$$

$$Y_2 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c+\delta}\right)^2 \left\{3{,}194\, T_1 + 0{,}056\, T_3\right\}$$

$$Y_3 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c+2\delta}\right)^2 \left\{3{,}112\, T_1 + 0{,}066\, T_2 + 0{,}030\, T_3\right\}$$

also für $\mu = +1$:

$$Y_1 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c}\right)^2 . 3{,}076$$

$$Y_2 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c+\delta}\right)^2 . 3{,}251$$

$$Y_3 = -\eta \left(\frac{\varrho}{c+2\delta}\right)^2 . 3{,}208$$

und für $\mu = -1$:

$$Y_1 = +\eta \left(\frac{\varrho}{c}\right)^2 . 3{,}208$$

$$Y_2 = +\eta \left(\frac{\varrho}{c+\delta}\right)^2 . 3{,}251$$

$$Y_3 = +\eta \left(\frac{\varrho}{c+2\delta}\right)^2 . 3{,}076.$$

Kleinere Mittheilungen.

VIII. Integration verschiedener Differentialgleichungen. Von Prof. Simon Spitzer in Wien.

I. Integration der Gleichung

$$1)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=F(x).$$

Differenzirt man die Gleichung 1) μ mal, so erhält man

$$2)\qquad x\frac{d^{\mu+2}y}{dx^{\mu+2}}+(\mu+a)\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}}+b\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}}=\frac{d^{\mu}F(x)}{dx^{\mu}}$$

und setzt man in dieselbe

$$\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}}=z,$$

führt ferner statt x eine neue, unabhängige Variable ξ ein, so dass

$$\xi=\sqrt{x}$$

ist, so hat man

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\xi}\frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{4\xi^3}\frac{dz}{d\xi}+\frac{1}{4\xi^2}\frac{d^2z}{d\xi^2}$$

und die Gleichung 2) nimmt nach Einführung dieser Werthe die Form an:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2}+\frac{2}{\xi}(\mu+a-\tfrac{1}{2})\frac{dz}{d\xi}+4bz=\varphi(\xi),$$

wenn man das Resultat der Substitution von $x=\xi^2$ in $4\dfrac{d^{\mu}F(x)}{dx^{\mu}}$ durch $\varphi(\xi)$ bezeichnet. Eine Vereinfachung ergiebt sich für

$$\mu+a=\tfrac{1}{2},$$

man hat nämlich dann

$$3)\qquad \frac{d^2z}{d\xi^2}+4bz=\varphi(\xi).$$

Um nun diese zu integriren, betrachtet man in der Regel zuerst die reducirte Gleichung

$$4)\qquad \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 4bz = 0$$

und erhebt sich dann, mittelst der Methode der Variation der willkührlichen Constanten von dem Integrale der reducirten Gleichung zum Integrale der completen.

Der reducirten Gleichung 4) genügt man für

$$z = Ae^{2\xi\sqrt{-b}} + Be^{-2\xi\sqrt{-b}}$$

unter A und B willkührliche Constanten verstanden, der completen 3) genügt man durch denselben Ausdruck, nur sind dann A und B nicht mehr Constanten, sondern Functionen von ξ, die aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\frac{dA}{d\xi} e^{2\xi\sqrt{-b}} + \frac{dB}{d\xi} e^{-2\xi\sqrt{-b}} = 0,$$

$$\frac{dA}{d\xi} e^{2\xi\sqrt{-b}} - \frac{dB}{d\xi} e^{-2\xi\sqrt{-b}} = \frac{1}{2\sqrt{-b}} \varphi(\xi)$$

und für y ergiebt sich somit

$$5)\qquad y = \frac{d^{\alpha-\frac{1}{2}}}{dx^{\alpha-\frac{1}{2}}} \left[Ae^{+2\sqrt{-bx}} + Be^{-2\sqrt{-bx}} \right].$$

Wir wollen nun einige Anwendungen dieses Satzes auf partielle Differentialgleichungen zeigen.

II. Integration der partiellen Differentialgleichung.

$$6)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right).$$

Man kommt zu dieser Gleichung bei den Untersuchungen über die Ausbreitung des Schalles in einer Ebene, bei der Theorie der Wasserwellen etc.

Setzt man

$$\varphi = e^{\alpha t} f(u)$$

und

$$u = x^2 + y^2,$$

unter α eine constante Zahl verstanden, so hat man

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t} f(u)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2e^{\alpha t} [f'(u) + 2x^2 f''(u)]$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = 2e^{\alpha t} [f'(u) + 2y^2 f''(u)]$$

und somit geht die Gleichung 6) über in

$$7)\qquad u f''(u) + f'(u) - \frac{\alpha^2}{4a^2} f(u) = 0.$$

Diese Gleichung ist ein specieller Fall der Gleichung 1), ihr Integral ist daher

$$f(u)=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[A_\alpha e^{\frac{\alpha\sqrt{u}}{a}}+B_\alpha e^{-\frac{\alpha\sqrt{u}}{a}}\right],$$

somit hat man:

$$\varphi=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[A_\alpha e^{\alpha\left(t+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)}+B_\alpha e^{\alpha\left(t-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)}\right],$$

unter A_α und B_α willkührliche Constanten verstanden, und da eine Summe solcher Ausdrücke, der linearen Form der vorgelegten Gleichung halber, ebenfalls genügt, so kann man auch

$$8)\qquad \varphi=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[\psi_1\left(t+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)+\psi_2\left(t-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right]$$

setzen und diess ist das vollständige mit zwei willkührlichen Functionen versehene Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung.

Ist der initiale Zustand gegeben, d. h. kennt man für $t=0$ die Werthe von φ und $\frac{d\varphi}{dt}$, so lassen sich sehr leicht die willkührlichen Functionen bestimmen.

Sei nämlich für

$$t=0,\quad \varphi=F_1(u),\quad \frac{d\varphi}{dt}=F_2(u),$$

so hat man

$$F_1(u)=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[\psi_1\left(+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)+\psi_2\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right]$$

$$F_2(u)=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[\psi_1'\left(+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)+\psi_2'\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right]$$

und somit

$$9)\qquad \begin{cases}\psi_1\left(+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)+\psi_2\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)=\frac{d^{-\frac{1}{2}}F_1(u)}{du^{-\frac{1}{2}}},\\[2mm] \psi_1'\left(+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)+\psi_2'\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)=\frac{d^{-\frac{1}{2}}F_2(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}.\end{cases}$$

Nun ist

$$\frac{d\psi_1\left(+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)}{du}=\psi_1\left(+\frac{\sqrt{u}}{a}\right).\frac{1}{2a\sqrt{u}},$$

folglich erhält man, wenn man die letzte der Gleichungen (9) mit $\frac{du}{2a\sqrt{u}}$ multiplicirt, und alsdann integrirt

$$\psi_1\left(+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)-\psi_2\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)=\frac{1}{2a}\int\frac{d^{-\frac{1}{2}}F_2(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}.\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der ersten der Gleichungen (9) giebt

$$\psi_1\left(+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^{-\frac{1}{2}}F_1(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4a}\int\frac{d^{-\frac{1}{2}}F_2(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}},$$

$$\psi_2\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)=\tfrac{1}{2}\,\frac{d^{-\frac{1}{2}}F_1(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{4a}\int\frac{d^{-\frac{1}{2}}F_2(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}},$$

und diese Gleichungen bestimmen die Form der willkührlichen Functionen ψ_1 und ψ_2.

III. Integration der partiellen Differentialgleichung

$$10)\qquad a^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=(m+x)\,\frac{d^2\varphi}{dx^2}+n\,\frac{d\varphi}{dx},$$

unter a, m und n constante Zahlen verstanden.

Man kommt zu einer solchen Differentialgleichung, wenn man die Gesetze der kleinen Schwingungen einer, an einem Ende aufgehängten, am andern Ende belasteten schweren Kette, die homogen und von gleichmässiger Dicke ist, untersucht. (Siehe *Journal de l'école polytechnique*, *tome XII.*, *pag.* 228.)

Setzt man

$$\varphi=e^{\alpha t}f(x),$$

so erhält man

$$(m+x)\,f''(x)+n\,f'(x)-a^2\alpha^2 f(x)=0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$f(x)=\frac{d^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-\frac{1}{2}}}\left(C_1\,e^{+2a\alpha\sqrt{m+x}}+C_2\,e^{-2a\alpha\sqrt{m+x}}\right)$$

somit hat man

$$\varphi=\frac{d^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-\frac{1}{2}}}\left(C_1\,e^{\alpha(t+2a\sqrt{m+x})}+C_2\,e^{\alpha(t-2a\sqrt{m+x})}\right)$$

unter C_1, C_2 und α willkührliche Constante verstanden. Man hat daher für das Integral der Gleichung 10)

$$\varphi=\frac{d^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-\frac{1}{2}}}\left(\psi_1(t+2a\sqrt{m+x})+\psi_2(t-2a\sqrt{m+x})\right),$$

unter ψ_1 und ψ_2 willkührliche Functionen verstanden.

IV. Integration der linearen Differentialgleichung

$$11)\qquad x\,\frac{d^3y}{dx^3}+a\,\frac{d^2y}{dx^2}\pm b\,y=F(x).$$

Diese Gleichung lässt sich sich auf ganz ähnliche Weise integriren, wie die Gleichung 1).

Differenzirt man dieselbe μ mal nach x, so erhält man

$$x\frac{d^{\mu+3}y}{dx^{\mu+3}}+(\mu+a)\frac{d^{\mu+2}y}{dx^{\mu+2}}\pm b\,\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}}=\frac{d^{\mu}F(x)}{dx^{\mu}}$$

und setzt man

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = z,$$

ferner

$$\sqrt{x} = \xi,$$

und nimmt Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\xi}\frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{4\xi^3}\frac{dz}{d\xi} + \frac{1}{4\xi^2}\frac{d^2z}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{3}{8\xi^5}\frac{dz}{d\xi} - \frac{3}{8\xi^4}\frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{1}{8\xi^3}\frac{d^3z}{d\xi^3}$$

vermöge welcher die Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$ in Differentialquotienten von z bezüglich ξ umgesetzt werden, so erhält man

$$\frac{d^3z}{d\xi^3} + \frac{2}{\xi}(\mu + a - \tfrac{3}{2})\frac{d^2z}{d\xi^2} - \frac{2}{\xi^2}(\mu + a - \tfrac{3}{2})\frac{dz}{d\xi} \pm 8b\xi z = \varphi(\xi),$$

wenn man unter $\varphi(\xi)$ diejenige Function von ξ versteht, die man erhält, wenn man in $8\sqrt{x}\,\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu}$ statt x die neue Variabele ξ^2 setzt.

Diese Gleichung wird wesentlich vereinfacht, wenn man

$$a + \mu = \tfrac{3}{2}$$

setzt, denn man erhält dann

$$\frac{d^3z}{d\xi^3} \pm 8b\xi z = \varphi(\xi)$$

und ihre Integration erfordert wieder vorerst die Integration der reducirten Gleichung

$$\frac{d^3z}{d\xi^3} \pm 8b\xi z = 0,$$

welche von Lobatto bewerkstelligt wurde. Man hat nämlich hierfür

$$12)\qquad z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{32b}}\left(B_1 e^{\mu_1 u\xi} + B_2 e^{\mu_2 u\xi} + B_3 e^{\mu_3 u\xi} + B_4 e^{\mu_4 u\xi}\right) du,$$

wo μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 die Wurzeln der Gleichung

$$u^4 + 1 = 0 \text{ oder } u^4 - 1 = 0$$

bedeuten, je nachdem nämlich

$$\frac{d^3z}{d\xi^3} + 8b\xi z = 0 \text{ oder } \frac{d^3z}{d\xi^3} - 8b\xi z = 0$$

die zu integrirende Gleichung ist, und wo B_1, B_2, B_3, B_4 willkürliche, blos durch die Gleichung

$$13)\qquad \frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} + \frac{B_3}{\mu_3} + \frac{B_4}{\mu_4} = 0$$

verknüpfte Constante bedeuten. Erhebt man sich nun von dem Integrale der reducirten Gleichung zu dem Integrale der completen, so kann man den Ausdruck 12) auch als Integral der completen Gleichung ansehen, nun sind denn B_1, B_2, B_3, B_4 nicht mehr als Constanten, sondern als Functionen von ξ zu betrachten, zwischen denen nebst der Gleichung 13) noch folgende Gleichungen stattfinden:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{32b}}\left(\frac{dB_1}{d\xi}e^{\mu_1 u\xi}+\frac{dB_2}{d\xi}e^{\mu_2 u\xi}+\frac{dB_3}{d\xi}e^{\mu_3 u\xi}+\frac{dB_4}{d\xi}e^{\mu_4 u\xi}\right)du=0$$

$$\int_0^\infty u\,e^{-\frac{u^4}{32b}}\left(\mu_1\frac{dB_1}{d\xi}e^{\mu_1 u\xi}+\mu_2\frac{dB_2}{d\xi}e^{\mu_2 u\xi}+\mu_3\frac{dB_3}{d\xi}e^{\mu_3 u\xi}+\mu_4\frac{dB_4}{d\xi}e^{\mu_4 u\xi}\right)du=0$$

$$\int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^4}{32b}}\left(\mu_1^2\frac{dB_1}{d\xi}e^{\mu_1 u\xi}+\mu_2^2\frac{dB_2}{d\xi}e^{\mu_2 u\xi}+\mu_3^2\frac{dB_3}{d\xi}e^{\mu_3 u\xi}+\mu_4^2\frac{dB_4}{d\xi}e^{\mu_4 u\xi}\right)du=\varphi(\xi),$$

für y ergiebt sich daher folgender Werth

$$y=\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{32b}}\frac{d^{a-\frac{1}{2}}}{dx^{a-\frac{1}{2}}}\left[B_1 e^{\mu_1 u\sqrt{x}}+B_2 e^{\mu_2 u\sqrt{x}}+B_3 e^{\mu_3 u\sqrt{x}}+B_4 e^{\mu_4 u\sqrt{x}}\right]du.$$

Das Integral der Gleichung

$$x\frac{d^3y}{dx^3}-y=0$$

konnte bisher in geschlossener Form nicht dargestellt werden; mittelst der jetzt eben gefundenen Formel ist diess aber sehr leicht, man hat nämlich

$$y=\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{32}}\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dx^{-\frac{1}{2}}}\left[B_1 e^{+u\sqrt{x}}+B_2 e^{-u\sqrt{x}}+B_3 e^{+u\sqrt{-x}}+B_4 e^{-u\sqrt{-x}}\right]du.$$

Liouville hat im 15. Band des „*Journal de l'école polytechnique*“ folgende merkwürdige Formeln bewiesen:

$$\text{A)}\qquad \frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu}=2^\mu\sqrt{x}\,\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left(x^{\frac{\mu-1}{2}}\dfrac{d^{\frac{\mu}{2}}y}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\right)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}$$

$$\text{B)}\qquad \frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu}=2^\mu\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left[x^{\frac{\mu+1}{2}}\dfrac{d^{\frac{\mu}{2}}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\right]}{dx^{\frac{\mu}{2}}}$$

$$\text{C)}\qquad \frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu}=2^\mu\,\frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}\left[x^{\frac{\mu}{2}}\dfrac{d^{\frac{\mu+1}{2}}y}{dx^{\frac{\mu+1}{2}}}\right]}{dx^{\frac{\mu-1}{2}}},$$

von welchen wir im Folgenden einen nützlichen Gebrauch bei der Integration der Differentialgleichungen machen werden.

V. Integration der Gleichung

$$\text{14)}\qquad x^{\frac{\mu+1}{2}}\frac{d^\mu y}{dx^\mu}+hz=F(x).$$

Setzt man

$$z=\frac{d^{-\frac{\mu}{2}}y}{dx^{-\frac{\mu}{2}}}$$

so erhält man

$$x^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{d^{\frac{\mu}{2}}y}{dx^{\frac{\mu}{2}}}+h\frac{d^{-\frac{\mu}{2}}y}{dx^{-\frac{\mu}{2}}}=F(x).$$

Wird diese Gleichung $\frac{\mu}{2}$ mal differenzirt, so kommt man zu

$$\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left(x^{\frac{\mu-1}{2}}\dfrac{d^{\frac{\mu}{2}}y}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\right)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}+hy=\frac{d^{\frac{\mu}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}$$

und wenn man diese mit $2^\mu\sqrt{x}$ multiplicirt, und auf die Gleichung A) Rücksicht nimmt, so erhält man

$$\frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu}+2^\mu h\sqrt{x}\,y=2^\mu\sqrt{x}\,\frac{d^{\frac{\mu}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}$$

oder wenn man

$$\sqrt{x}=\xi,$$

$$2^\mu\sqrt{x}\,\frac{d^{\frac{\mu}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}=\varphi(\xi)$$

setzt,

$$\frac{d^\mu y}{d\xi^\mu}+2^\mu h\xi y=\varphi(\xi),$$

welche Gleichung bekanntlich die Lobatto'sche ist.

VI. Integration der Gleichung

$$x^{\frac{\mu+1}{2}}\frac{d^\mu z}{dx^\mu}+hz=F(x).$$

Setzt man

$$z=\frac{d^{-\frac{\mu}{2}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)}{dx^{-\frac{\mu}{2}}},$$

so erhält man

$$x^{\frac{\mu+1}{2}}\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}+h\,\frac{d^{-\frac{\mu}{2}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)}{dx^{-\frac{\mu}{2}}}=F(x)$$

und wird diese Gleichung mit 2^μ multiplicirt, $\frac{\mu}{2}$ mal differenzirt, und auf und auf die Gleichung B) Rücksicht genommen, so kommt man zu

$$\frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu}+2^\mu\frac{hy}{\sqrt{x}}=2^\mu\frac{d^{\frac{\mu}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}},$$

welche für

$$\sqrt{x}=\xi,$$

$$2^\mu\sqrt{x}\,\frac{d^{\frac{\mu}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}=\varphi(\xi)$$

folgende einfachere Gestalt annimmt:

$$\xi\frac{d^\mu y}{d\xi^\mu}+2^\mu hy=\varphi(\xi),$$

deren Integration wenigstens für ganze Werthe von μ keinerlei Schwierigkeit darbietet. Man sehe hierüber unsern Aufsatz in Grunert's Archiv „Integration der Differentialgleichung $xy^{(n)}-y=0$." Th. XXVI.

VII. Integration der partiellen Differentialgleichung

$$a^\mu\frac{d^\mu\varphi}{dt^\mu}=x^{\frac{\mu}{2}}\frac{d^\mu\varphi}{dx^\mu}.$$

Setzt man

$$\varphi=e^{\alpha t}f(x),$$

so erhält man zur Bestimmung von $f(x)$ folgende Gleichung

$$(a\alpha)^\mu f(x)=x^{\frac{\mu}{2}}\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}.$$

Setzt man ferner

$$f(x) = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}},$$

so erhält man

$$(a\alpha)^\mu \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} = x^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^{\frac{1+\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1+\mu}{2}}}$$

und wenn man diese Gleichung $\frac{\mu-1}{2}$ mal differenzirt und die Formel (C) benutzt,

$$(a\alpha)^\mu F(x) = \frac{1}{2^\mu} \frac{d^\mu F(x)}{d(\sqrt{x})^\mu}.$$

Diese Gleichung hat particuläre Integrale von folgender Gestalt

$$F(x) = e^{2a\alpha\sqrt[\mu]{1}\sqrt{x}},$$

somit ist

$$f(x) = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} e^{2a\alpha\sqrt[\mu]{1}\sqrt{x}}}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}}$$

und

$$\varphi(x) = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}}}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} \left[e^{\alpha(t+2a\sqrt[\mu]{1}\sqrt{x})}\right]$$

und da α willkührlich ist, und eine Summe solcher Ausdrücke ebenfalls genügt, so hat man

$$\varphi(x) = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}}}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} \psi_1(t + 2ak_1\sqrt{x}) + \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}}}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} \psi_2(t + 2ak_2\sqrt{x}) + \ldots$$
$$+ \frac{d^{\frac{1-\mu}{1}}}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} \psi_n(t + 2ak_n\sqrt{x}),$$

unter $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ willkührliche Functionen, und unter $k_1, k_2 \ldots k_n$ Wurzeln der Gleichung

$$k^\mu = 1$$

verstanden.

IX. Transformation eines bestimmten Integrales. In Euler's Institt. calculi integr. T. IV., p. 271 findet man folgende Integralformel

$$\int_0^1 \left(\frac{x-1}{lx}\right)^k x^{r-1}\,dx = \frac{\varDelta^k(r^{k-1}\,lr)}{1.2.3\ldots(k-1)}$$

oder auch, wenn $x = e^{-\omega}$ gesetzt wird,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-\omega}}{\omega}\right)^k e^{-r\omega}\,d\omega = \frac{\varDelta^k(r^{k-1}\,lr)}{1.2.3\ldots(k-1)},$$

worin sich die mit $\varDelta^k$ bezeichnete Operation auf das beliebige positive r bezieht, dessen Zunahme $\varDelta r$ der Einheit gleich zu nehmen ist. Giebt man dieser Gleichung die Form

$$\int_0^\infty (1-e^{-\omega})^k e^{-r\omega} D^k l\omega\,.\,d\omega = (-1)^{k-1}\varDelta^k(r^{k-1}\,lr),$$

so bietet sie die Eigenthümlichkeit, dass linker Hand der k^{te} Differentialquotient des Logarithmus und rechts die k^{te} Differenz einer logarithmischen Function vorkommt; man wird hierdurch veranlasst die allgemeine Frage zu stellen, ob diese Eigenschaft auch bei anderen Integralen stattfindet und ob überhaupt Integrale von der Form

$$\int_0^\infty (1-e^{-\omega})^m e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\,d\omega$$

auf Differenzen ähnlicher aber einfacherer Ausdrücke zurückgeführt werden können. Man bemerkt nun zwar sogleich, dass das vorstehende Integral mit

$$(-1)^m \varDelta^m \int_0^\infty e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\,d\omega$$

identisch ist, aber diese Reduction wird in vielen Fällen und namentlich dann nichts helfen, wenn der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\,d\omega$$

unbestimmt oder unendlich ist. So würde sich z. B. für $m=2$, $k=1$, $F(\omega) = \frac{1}{\omega}$ ergeben

$$\int_0^\infty (1-e^{-\omega})^2 e^{-r\omega}\frac{d\omega}{\omega^2} = \varDelta^2\int_0^\infty e^{-r\omega}\frac{d\omega}{\omega^2} = \varDelta^2\infty$$

und hier erscheint der Werth des fraglichen Integrales unter einer unbestimmten Form, obschon er, dem Euler'schen Satze zufolge, ein endlicher

nämlich $= \Delta^2 (rlr)$ ist. Wir müssen uns daher nach einem anderen Verfahren zur Reduction des genannten Integrales umsehen.

Durch partielle Integration und Einführung zweier von r unabhängiger Grenzen $\omega = \alpha$ und $\omega = \beta$ findet man zunächst

$$\int_\alpha^\beta e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\, d\omega$$

$$= e^{-r\beta} F^{(k-1)}(\beta) - e^{-r\alpha} F^{(k-1)}(\alpha) + r \int_\alpha^\beta e^{-r\omega} F^{(k-1)}(\omega)\, d\omega$$

und hieraus durch Bildung der m^{ten} Differenzen in Beziehung auf r

$$\Delta^m \int_\alpha^\beta e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\, d\omega$$

$$= (-1)^m (1-e^{-\beta})^m e^{-r\beta} F^{(k-1)}(\beta) - (-1)^m (1-e^{-\alpha})^m e^{-r\alpha} F^{(k-1)}(\alpha)$$

$$+ \Delta^m \left\{ r \int_\alpha^\beta e^{-r\omega} F^{(k-1)}(\omega)\, d\omega \right\}.$$

Nehmen wir $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ und setzen voraus, dass sowohl $e^{-r\beta} F^{(k-1)}(\beta)$ als $(1-e^{-\alpha})^m F^{(k)}(\alpha)$ bei den angegebenen Werthen von α und β verschwindet; so wird einfacher

$$\Delta^m \int_0^\infty e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\, d\omega = \Delta^m \left\{ r \int_0^\infty e^{-r\omega} F^{(k-1)}(\omega)\, d\omega \right\}.$$

Um diese Formel bequemer handhaben zu können, führen wir diese abkürzende Bezeichnung

$$1)\qquad S_k = \int_0^\infty e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\, d\omega$$

ein und schreiben demgemäss statt der vorigen Gleichung die folgende,

$$2)\qquad \Delta^m S_k = \Delta^m (r S_{k-1}),$$

deren Gültigkeit an die Bedingung gebunden ist, dass sowohl $e^{-r\omega} F^{(k-1)}(\omega)$ für $\omega = \infty$, als $(1-e^{-\omega})^m F^{(k-1)}(\omega)$ für $\omega = 0$ verschwindet. Bedeutet nun überhaupt U eine beliebige Function von r, so hat man die leicht zu beweisende Formel

$$\Delta^m (rU) = m \Delta^{m-1} U + (r+m) \Delta^m U$$

oder kürzer

$$3)\qquad \Delta^m (rU) = a_1 \Delta^{m-1} U + b_1 \Delta^m U,$$

mithin statt Nr. 2)

$$\Delta^m S_k = a_1 \Delta^{m-1} S_{k-1} + b_1 \Delta^m S_{k-1};$$

hier kann rechter Hand die Formel 2) selbst wieder angewendet werden und diess giebt

$$\Delta^m S_k = a_1 \Delta^{m-1}(rS_{k-2}) + b_1 \Delta^m (rS_{k-2})$$

d. i. nach Nr. 3) wenn man dort $U = rS_{k-2}$ setzt,

$$3) \qquad \Delta^m S_k = \Delta^m (r^2 S_{k-2}).$$

Die Bedingungen für die Gültigkeit dieser Formel bestehen darin, dass einerseits

$$e^{-r\omega} F^{(k-1)}(\omega) \text{ und } e^{-r\omega} F^{(k-2)}(\omega),$$

für $\omega = \infty$, andererseits

$$(1-e^{-\omega})^m F^{(k-1)}(\omega), \quad (1-e^{-\omega})^{m-1} F^{(k-2)}(\omega),$$
$$(1-e^{-\omega})^m F^{(k-2)}(\omega)$$

für $\omega = 0$ verschwinden; die letzte dieser Bedingungen wird durch die vorhergehende überflüssig und kann daher wegbleiben. Vermöge der leicht zu beweisenden Formel

$$4) \qquad \Delta^m (r^2 U) = a_2 \Delta^{m-2} U + b_2 \Delta^{m-1} U + c_2 \Delta^m U$$

erhält man ferner aus Nr. 3)

$$\Delta^m S_k = a_2 \Delta^{m-2} S_{k-2} + b_2 \Delta^{m-1} S_{k-2} + c_2 \Delta^m S_{k-2}$$

und bei wiederholter Anwendung der Formel 2)

$$\Delta^m S_k = a_2 \Delta^{m-2}(rS_{k-3}) + b_2 \Delta^{m-1}(rS_{k-3}) + c_2 \Delta^m (rS_{k-3})$$

d. i. nach Nr. 4)

$$5) \qquad \Delta^m S_k = \Delta^m (r^3 S_{k-3}).$$

Die Bedingungen hierzu sind, dass sowohl

$$e^{-r\omega} F^{(k-1)}(\omega), \quad e^{-r\omega} F^{(k-2)}(\omega), \quad e^{-r\omega} F^{(k-3)}(\omega),$$

für $\omega = \infty$, als auch

$$(1-e^{-\omega})^m F^{(k-1)}(\omega), \quad (1-e^{-\omega})^{m-1} F^{(k-2)}(\omega),$$
$$(1-e^{-\omega})^{m-2} F^{(k-3)}(\omega), \quad (1-e^{-\omega})^{m-1} F^{(k-3)}(\omega),$$
$$(1-e^{-\omega})^m F^{(k-2)}(\omega)$$

für $\omega = 0$ verschwinden, wobei die letzten zwei Bedingungen durch die vorhergehende überflüssig werden.

Wie man auf diesem Wege weiter gehen kann, ist unmittelbar einleuchtend; das Endresultat besteht in der Gleichung

$$\Delta^m S_k = \Delta^m (r^k S_0)$$

oder

$$\Delta^m \int_0^\infty e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\, d\omega = \Delta^m \left\{ r^k \int_0^\infty e^{-r\omega} F(\omega)\, d\omega \right\}.$$

Führt man linker Hand die mit Δ^m bezeichnete Operation aus und multiplicirt nachher mit $(-1)^m$, so hat man die Reductionsformel

$$6) \qquad \int_0^\infty (1-e^{-\omega})^m e^{-r\omega} F^{(k)}(\omega)\, d\omega = (-1)^m \Delta^m \left\{ r^k \int_0^\infty e^{-r\omega} F(\omega)\, d\omega \right\},$$

und zwar besteht dieselbe unter den Bedingungen, dass sowohl

$$e^{-r\omega} F(\omega), \quad e^{-r\omega} F'(\omega), \quad e^{-r\omega} F''(\omega), \ldots e^{-r\omega} F^{(k-1)}(\omega)$$

für $\omega = \infty$, als auch

$$(1-e^{-\omega})^{m-k+1} F(\omega), \quad (1-e^{-\omega})^{m-k+2} F'(\omega),$$
$$(1-e^{-\omega})^{m-k+3} F''(\omega), \ldots\ldots (1-e^{-\omega})^m F^{(k-1)}(\omega)$$

für $\omega = 0$ verschwinden.

Den genannten Bedingungen genügt z. B. $F(\omega) = l\omega$ sobald m mehr als $k-1$ beträgt, es ist daher

$$\int_0^\infty (1-e^{-\omega})^m e^{-r\omega} \frac{(-1)^{k-1}\,1.2\ldots(k-1)}{\omega^k}\, d\omega$$
$$= (-1)^m \Delta^m \left\{ r^k \int_0^\infty e^{-r\omega}\, l\omega\, d\omega \right\}.$$

Mittelst der Substitution $\omega = \frac{\tau}{r}$ wird die rechte Seite

$$= (-1)^m \Delta^m \left\{ r^{k-1} \int_0^\infty e^{-\tau}\, l\tau\, d\tau - r^{k-1}\, lr \int_0^\infty e^{-\tau}\, d\tau \right\}$$
$$= (-1)^m \Delta^m \left\{ r^{k-1}\,.\, Const. - r^{k-1}\, lr \right\} = (-1)^{m+1} \Delta^m (r^{k-1}\, lr),$$

weil $\Delta^m r^{k-1} = 0$ ist für $m > k-1$; man gelangt damit zu dem Ergebnisse

$$7) \quad \int_0^\infty \frac{(1-e^{-\omega})^m}{\omega^k} e^{-r\omega}\, d\omega = \frac{(-1)^{m+k}}{1.2\ldots(k-1)} \Delta^m (r^{k-1}\, lr), \quad m > k-1,$$

welches in dem speciellen Falle $m = k$ die Euler'sche Formel liefert.

Als zweites Beispiel diene die Annahme

$$F(\omega) = \tfrac{1}{2}(l\omega)^2, \quad m > k-1,$$

womit die obigen Bedingungen gleichfalls befriedigt sind; man hat jetzt

$$F'(\omega) = \frac{1}{\omega}\, l\omega,$$
$$F^{(k)}(\omega) = D^{k-1}\left(\frac{1}{\omega}\, l\omega\right)$$
$$= \frac{(-1)^{k-1}\,1.2\ldots(k-1)}{\omega^k}\left[l\omega - \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1}\right)\right],$$

wobei die Summe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1}$ einstweilen mit γ bezeichnet werden möge. Durch Substitution dieser Werthe ergiebt sich aus Nr. 6)

$$(-1)^{k-1}\,1.2\ldots(k-1) \int_0^\infty \frac{(1-e^{-\omega})^m}{\omega^k} e^{-r\omega} (l\omega - \gamma)\, d\omega$$
$$= (-1)^m \Delta^m \left\{ r^k \int_0^\infty e^{-r\omega}\, \tfrac{1}{2} (l\omega)^2\, d\omega \right\},$$

oder auch, wenn statt $1.2\ldots(k-1)$ das kürzere $\Gamma(k)$ gebraucht wird,

$$8)\quad \int_0^\infty \frac{(1-e^{-\omega})^m}{\omega^k} e^{-r\omega} l\omega\, d\omega - \gamma \int_0^\infty \frac{(1-e^{-\omega})^m}{\omega^k} e^{-r\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{(-1)^{m+k-1}}{F(k)} \Delta^m \left\{ r^k \int_0^\infty e^{-r\omega} \tfrac{1}{2} (l\omega)^2\, d\omega \right\}.$$

Das mit γ multiplicirte Integral ist aus Nr. 7) bekannt; rechts giebt die Substitution $\omega = \frac{\tau}{r}$

$$\int_0^\infty e^{-r\omega} \tfrac{1}{2} (l\omega)^2 d\omega = \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-\tau} \tfrac{1}{2} (l\tau - lr)^2\, d\tau$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ \tfrac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\tau} (l\tau)^2 - lr \int_0^\infty e^{-\tau} l\tau\, d\tau + \tfrac{1}{2} (lr)^2 \int_0^\infty e^{-\tau}\, d\tau \right\}$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ \tfrac{1}{2} C_2 + C_1\, lr + \tfrac{1}{2} (lr)^2 \right\}$$

worin C_2 und C_1 Constanten bedeuten, deren Werthe aus der Theorie der Gammafunctionen bekannt sind nämlich

$C_1 = 0{,}5772156\ldots$ (Constante des Integrallogarithmus)

$C_2 = (0{,}5772156\ldots)^2 + \tfrac{1}{6}\pi^2.$

Bringt man in Nr. 8) das zweite Integral linker Hand auf die rechte Seite, substituirt seinen Werth aus Nr. 7) und setzt

$$\gamma - C_1 = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1} - 0{,}5772156\ldots = \varepsilon,$$

so gelangt man zu folgender Formel

$$9)\quad \int_0^\infty \frac{(1-e^{-\omega})^m}{\omega^k} e^{-r\omega} l\omega\, d\omega = \frac{(-1)^{m+k}}{\Gamma(k)} \Delta^m \left\{ \varepsilon r^{k-1}\, lr - \tfrac{1}{2} r^{k-1} (lr)^2 \right\},$$

$$m > k-1$$

wobei in dem speciellen Falle $k=1$, $\gamma = 0$ und $\varepsilon = -0{,}577\ldots$ zu setzen ist, wie der Vergleich von $F'(\omega)$ mit $F^{(k)}(\omega)$ sofort erkennen lässt. (Aus den Sitzungsber. d. K. S. Ges. d. W. Nov. 1857.)

O. Schlömilch.

X. Ueber die gleichseitige Hyperbel und die ihr analoge Fläche zweiten Grades.

I.

Wenn man in einem Kreise die Endpunkte einer Schaar paralleler Sehne einander zuordnet, und die so aufeinander perspectivisch bezogenen Punktengebilde aus zwei festen, sich nicht entsprechenden Punkten desselben Kreises projicirt, so entstehen in diesen Punkten zwei projectivische Strahlenbüschel, welche in ihrem Durchschnitt einen Kegelschnitt erzeugen.

Die Natur dieses Kegelschnitts ergiebt sich leicht, wenn man erwägt, dass unter den gedachten parallelen Sehnen zwei vorkommen, welche der Sehne gleich sind, die die Projectionscentren verbindet.

In Fig. 7, Taf. I. seien S, S' diese Projectionsmittelpunkte, BB', CC' die beiden Sehnen, für welche $BB' = CC' = SS'$; die Strahlen SB, $S'B'$, sowie SC', $S'C$ sind parallel, daher hat die zu untersuchende Curve zwei unendlich ferne Punkte, wovon der Eine in der Richtung SB, der Andere in der Richtung SC' liegt. Da ferner B, C' die Endpunkte eines Durchmessers des Kreises sind, so bilden die bezeichneten Richtungen einen rechten Winkel, mithin ist der erzeugte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel.

Um die in Rede stehenden Strahlenbüschel zu erhalten, bieten sich noch mehrere Wege dar, worunter Einer zu einer höchst einfachen analytischen Bestimmung ihrer Durchschnittscurve führt:

Taf. I., Fig. 8. Durch die Punkte S, S' beschreibe man einen zweiten Kreis, und bezeichne durch α, α' die Punkte, in welchen er von zwei zugeordneten Strahlen $S'A$, $S'A'$ getroffen wird; dann ist $\angle S'A'A = \angle S'\alpha'\alpha = \pi - S'SA$, also $\alpha\alpha' // AA'$. a) Wenn man hiernach an die Stelle des ursprünglichen Kreises einen Anderen setzt, die Punkte desselben durch den nämlichen Parallelstrahlenbüschel einander zuordnet, und sie aus S, S' projicirt, so entstehen dieselben Strahlenbüschel mit gleicher Zuordnung, wie vorher.

b) Eine kurze Ueberlegung läst auch sogleich erkennen, dass dieselben Strahlenbüschel hervorgehen, wenn man die Schaar von Kreisen, welche die Punkte S, S' enthalten, durch eine Gerade schneidet, welche die Richtung der parallelen Sehnen hat, die Punkte, in welchen sie jeden Kreis trifft, einander zuordnet, und wieder aus S, S' projicirt.

c) Endlich erhält man die Strahlenbüschel, wenn man in jedem Kreis der unter b) erwähnten Schaar die Endpunkte derjenigen Sehnen einander zuordnet, welche eine constante Länge, und die vorgeschriebene Richtung haben, sodann diese Punkte aus S, S' projicirt. Diese constante Länge darf der Sehne SS' nicht gleich, die vorgeschriebene Richtung dieser Sehne nicht parallel angenommen werden. Nimmt man die constante Länge gleich Null an, so erhält man folgenden Satz:

Wenn man in einer Schaar von Kreisen, welche sich in zwei festen Kreisen schneiden, in Jedem die beiden Punkte aufsucht, in welchen die Tangenten des Kreises eine vorgeschriebene Richtung haben, so findet man diese Punkte auf einer gleichseitigen Hyperbel. Oder:

In allen Kreisen, welche sich in zwei festen Punkten schneiden, liegen die Endpunkte der Durchmesser von unveränderlicher Richtung in einer gleichseitigen Hyperbel.

Beweis. In Fig. 9, Taf. I. sei M der Mittelpunkt Eines der durch S, S' gelegten Kreise; O die Mitte von SS', OT die Gerade, mit welcher die Durchmesser der Kreise parallel sein sollen, PQ ein solcher Durchmesser. Die Axe der X lasse ich mit der auf SS' senk-

recht stehenden Geraden OM zusammenfallen, die Axe der y sei OF, ich setze $OS = d$, so ist:

$$y^2 = MP^2 = MO^2 + OS^2 = x^2 + d^2.$$

Dies ist aber die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf conjugirte Axen. Die Asymptoten erhält man nach dem oben Gesagten, wenn man nach Fig. 7 O mit den Mitten von BB' und CC' verbindet, denn diese Verbindungslinien sind mit SB, SC' parallel, also erhält man sie auch nach Fig. 3, wenn man um M mit MO einen Kreis beschreibt, und die beiden Punkte, in welchen derselbe den Durchmesser PQ schneidet, mit O verbindet.

Damit von diesem Satze die oben angeführten als einfache Transformationen betrachtet werden können, ist folgender Satz nöthig, der wie leicht zu sehen ist, schon aus dem bei Fig. 9 Erörterten erhellt.

Wenn man auf einem der Kreise, welche sich in zwei festen Punkten schneiden, einen beliebigen Punkt wählt, und ihn mit jenen festen Punkten verbindet, so schneiden diese Verbindungslinien jeden der übrigen Kreise in zwei Punkten, deren Verbindungslinie parallel der in dem beliebigen Punkte an den zugehörigen Kreis gelegten Tangente ist.

Anmerkung. Verbindet man Fig. 9 P mit S, S' und verlängert OM bis R, so hat man, weil R die Mitte des Bogens SPS' ist, $\frac{1}{2}$(Bogen PS' — Bogen $P'S$) = Bogen PR, d. i. $\angle PSS' - \angle PS'S = \angle TOM = const.$ In dem Dreiecke, dessen Grundlinie ein Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel ist, und dessen Spitze auf dieser Curve liegt, ist die Differenz der Winkel an der Grundlinie constant.

II.

Auf einer Kugel sei ein fester Kreis K gegeben, die Kugel werde von einem System paralleler Ebenen geschnitten, und durch den Kreis K und jeden der parallelen Kreise ein Kegel zweiten Grades gelegt. Im Mittelpunkt O des Kreises K errichte man auf seiner Ebene die Senkrechte OM, welche den Mittelpunkt M der Kugel enthält, und denke den Durchmesser PO der Kugel, auf welchem die Mittelpunkte der parallelen Schnitte liegen. Legt man nun durch die Geraden PQ, OM einer Ebene, so wird diese den Hauptschnitt eines jeden der gedachten Kegel enthalten, und es leuchtet sofort ein, dass der Ort für die Spitzen dieser Kegel eine gleichseitige Hyperbel ist. Dass sich aus diesem Satze analoge Transformationen wie die unter a), b), c) aufgeführten ergeben, werde hier blos angedeutet, aber wir wollen diese Sätze etwas verallgemeinern.

Man nehme die Ebenen, mit welchen die Kugel M geschnitten wurde, nicht mehr parallel untereinander, sondern parallel einer gegebenen Geraden an, welche jedoch der Ebene des Kreises K nicht parallel sei. Man denke wieder die Kegel, welche zu Kreisschnitten K und je einen der entstandenen

Schnitte auf der Kugel haben, so wird der Ort für die Spitzen dieser Kegel ein einschaliges Hyperboloid sein, auf welchem der Kreis *K* liegt, und das von jeder Ebene, welche durch den Mittelpunkt *O* des Kreises *K* senkrecht auf dessen Ebene gelegt wird, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten wird. *O* ist der Mittelpunkt der gefundenen Fläche, *K* der eine ihrer Hauptkreisschnitte, den Asymptotenkegel erhält man nach dem Vorausgeschickten folgendermaassen: Unter den auf der Kugel *M* gemachten Kreisschnitten giebt es unendlich viele, welche dem Kreise *K* gleich sind, ihre Ebenen berühren in ihren Mittelpunkten eine mit *M* concentrische Kugel, deren Radius *MO* ist. Weil aber diese Ebenen einer gegebenen Geraden parallel sind, so berühren sie die Kugel in den Punkten eines grössten Kreises, dessen Ebene auf der gegebenen Geraden senkrecht steht; projicirt man diesen Kreis aus *O*, so erhält man den Asymptotenkegel des Hyperboloids.

Der analytische Beweis, den wir oben für eine der Transformationen unseres Hauptsatzes geführt haben, lässt sich mit einer kleinen Abänderung auf folgenden Satz anwenden:

Wenn man in einer Schaar von Kugeln, welche in einem festen Kreise sich schneiden, die grössten Kreise aufsucht, deren Ebenen einer gegebenen Ebene parallel sind, so findet man sie auf einem einschaligen Hyperboloid, von welchem der feste Kreis ein Hauptkreisschnitt ist, und in welchem dem Durchmesser, welcher die Mittelpunkte der Kugelschaar enthält, als conjugirte Ebene die Ebene des zweiten Hauptkreisschnitts zugehört. In Taf. I., Fig. 10 ist auf einer Ebene, welche durch *O* senkrecht auf die Ebene des Kreises *K* gelegt wurde, ein Durchschnitt des im Raume zu Denkenden vorgestellt. *SS'* ist der Durchmesser des festen Kreises, *PQ* der Durchmesser des einer festen Ebene stets parallelen grössten Kreises *PVQW* der Kugel *M*. Beschreibt man um *M* mit *MO* als Radius eine Kugel, und projicirt aus *O* den mit *PVQW* concentrischen Kreis, in dem diese Kugel die Ebene *PVQ* schneidet, so erhält man den Asymptotenkegel des Hyperboloids. Von *S* (oder *S'*) fälle man auf *PQ* die Senkrechte *SU*, und errichte in *U* auf *PQ* in der Ebene *POQ* die Senkrechte *VUW*, so sieht man, dass $SU = UV = UW$. Daraus folgt, dass die Geraden *SV*, *SW* einen jeden der Kreise in *PVQ* treffen und somit ihrer ganzen Länge nach in dem Hyperboloid liegen; weil ferner die Ebene *VSW* senkrecht auf *MU* steht, so schneiden sich die Geraden *SU*, *SV* unter rechtem Winkel.

Sodann leuchtet ein, dass eine Ebene, welche durch *O* parallel zur Ebene *VSW* gelegt wird, den Asymptotenkegel in zwei zu *SV*, *SW* parallelen Geraden schneidet, diese letztere Ebene ist die dem Durchmesser *SS'* sonjugirte.

Um den zweiten Hauptkreisschnitt des Hyperboloids zu erhalten, beschreibe man um *O* mit *OS* als Radius eine Kugel, und bestimme in dieser den grössten Kreis, dessen Ebene der *PVQ* parallel ist.

Geht man von diesem Kreise aus, und betrachtet in der Schaar von

Kugeln, welche sich in demselben schneiden, die grössten Kreise, deren Ebenen dem anderen Kreisschnitt (SS') parallel sind, so liegen diese auf dem nämlichen Hyperboloid.

Mithin hat dasselbe folgende Eigenschaften:

Legt man durch eine seiner Hauptkreisschnitte eine Kugel, so wird diese von der Fläche in einem grössten Kreise geschnitten, dessen Ebene dem anderen Kreisschnitt parallel ist.

Die geradlinigen Erzeugenden der Fläche, welche sich in einem Punkte eines Hauptkreisschnitts treffen, stehen senkrecht auf einander.

Zum Schlusse will ich die entwickelten Resultate in folgenden Sätzen zusammenstellen, welche sich auch leicht direct beweisen lassen:

1) Wenn man in der Schaar von Kreisen, welche von den Diagonalen eines Rechtecks die Eine zur Sehne haben, Durchmesser parallel zur Anderen zieht, so liegen deren Endpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche auch entsteht, wenn man bei dieser Erzeugungsweise die Diagonalen ihre Rollen wechseln lässt.

2) Wenn man in der Schaar von Kreisen, welche von zwei sich schneidenden Geraden die Eine im Schnittpunkte berühren, Durchmesser parallel zur Anderen zieht, so liegen deren Endpunkte auf zweien sich in jenem Schnittpunkt rechtwinklig schneidenden Geraden, welche man auch erhält, wenn man bei dieser Erzeugungsweise die beiden Geraden mit einander vertauscht,

Nimmt man für diese Geraden die Diagonalen des im Satze 1 vorkommenden Rechtecks, so erhält man die Asymptoten der Hyperbel.

3) Wenn man in der Schaar von Kugeln, welche von zwei grössten Kreisen einer gegebenen Kugel den Einen enthalten, die grössten Kreise bestimmt, welche dem Anderen parallel sind, so liegen diese auf einem einschaligen Hyperboloid, welches auch entsteht, wenn man die ursprünglichen Kreise mit einander vertauscht.

4) Wenn man in der Schaar von Kugeln, welche von zwei sich schneidenden Ebenen die Eine in einem festen Punkte ihrer Schnittlinie berühren, die grössten Kreise zieht, welche der Andern parallel sind, so liegen diese auf einem Kegel zweiten Grades, welcher auch entsteht, wenn man die beiden Ebenen mit einander vertauscht. Nimmt man für diese Ebenen die Ebenen der im vorigen Satze vorkommenden grössten Kreise, und für den festen Punkt ihren gemeinsamen Mittelpunkt, so erhält man den Asymptotenkegel jenes Hyperboloids.

Dem Leser wird es nicht entgangen sein, dass die Sätze 2), 4) nur besondere Fälle der Sätze 1), 2) sind, und dass es sich wesentlich nur um den Beweis des Satzes 1) handelt.

Taf. I., Fig. 11. Um nun zu zeigen, dass der Punkt Q, welcher als Endpunkt der Durchmesser der in S, S' sich schneidenden Kreisschaar auftritt, auch als Endpunkt der in der andern in T, T' sich schneidenden Schaar in Be-

tracht kommenden Durchmesser erscheint, ziehe ich $QN // SS'$ und beweise $NQ = NT = NT'$. Am einfachsten folgt dies aus dem Dreieck MOQ. In demselben sind die QN, ON senkrecht auf den Seiten MO, MQ, also ist auch MN senkrecht auf OQ gerichtet. mithin:

$$QN^2 - NO^2 = QM^2 - MO^2 = MS^2 - MO^2 = OS^2 = OT^2.$$

Es ist aber:

$$NT^2 - NO^2 = OT^2,$$

folglich:

$$NQ = NT, \text{ w. z. b. w.}$$

Trier. O. Küpper.

XII. Ueber die approximative Darstellung gegebener Funktionen.

Durch den in Heft 6, Jahrg. II. der vorl. Zeitschrift abgedruckten Aufsatz meines Collegen Herrn Prof. Fort wurde ich zur Behandlung des folgenden allgemeinen Problemes veranlasst.

Man soll die Coefficienten p und q so bestimmen, dass die Gleichung

$$f(x) = p\,\varphi(x) + q\,\psi(x),$$

worin $f(x)$, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegebene Funktionen von x bedeuten, innerhalb bestimmter Grenzen $x = x_0$ und $x = x_1$ mit möglichster Genauigkeit stattfindet.

Die Angabe der Lösung wird man vielleicht um so weniger überflüssig finden, als die Bestimmung der Coefficienten p und q hier auf einem andern Wege, nämlich mittelst der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt und sich zugleich ergiebt, dass man solcher näherungsweis richtiger Gleichungen beliebig viele nach einem gleichförmigen Verfahren bilden kann. Auch werden wir noch einige bisher unbemerkt gebliebene Anwendungen der entwickelten Näherungsformeln mittheilen.

I. Wir denken uns das Intervall von $x = x_0$ bis $x = x_1$ in n gleiche Theile zerlegt, wobei

$$\frac{x_1 - x_0}{n} = \Delta x \text{ oder } \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{x_1 - x_0}$$

sein möge, und setzen in dem Ausdrucke $p\,\varphi(x) + q\,\psi(x) - f(x)$ für x der Reihe nach die Werthe x_0, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$, $x_0 + 3\Delta x, \ldots x_0 + n\Delta x = x_1$; die Differenzen

$$\begin{gathered} p\,\varphi(x_0) + q\,\psi(x_0) - f(x_0), \\ p\,\varphi(x_0 + \Delta x) + q\,\psi(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x), \\ p\,\varphi(x_0 + 2\Delta x) + q\,\psi(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 + 2\Delta x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p\,\varphi(x_0 + n\Delta x) + q\,\psi(x_0 + n\Delta x) - f(x_0 + n\Delta x) \end{gathered}$$

sind dann die bei den einzelnen Substitutionen begangenen Fehler. Um nun die möglichste Genauigkeit zu erreichen, haben wir p und q so zu bestimmen, dass die Summe der Fehlerquadrate oder besser das arithmetische

Mittel der Fehlerquadrate, zu einem Minimum wird. Kurz dargestellt ist dieses Mittel

$$M = \Sigma \frac{[p\,\varphi(x) + q\,\psi(x) - f(x)]^2}{n} = \frac{1}{x_1 - x_0}\, \Sigma\, [p\,\varphi(x) + q\,\psi(x) - f(x)]^2 \,\Delta x,$$

wobei sich das Summenzeichen auf die oben angegebenen successiven Werthe von x bezieht. Wollen wir aber alle von $x = x_0$ bis $x = x_1$ stetig auf einander folgenden Werthe von x berücksichtigen, so müssen wir n unendlich wachsen, folglich Δx gegen die Null convergiren lassen; vermöge der summatorischen Bedeutung des bestimmten Integrales wird dann

$$M = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} [p\,\varphi(x) + q\,\psi(x) - f(x)]^2 \,dx.$$

Dieser Ausdruck erreicht seinen Minimalwerth, wenn die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial M}{\partial p} = \frac{2}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} [p\,\varphi(x) + q\,\psi(x) - f(x)]\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\frac{\partial M}{\partial q} = \frac{2}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} [p\,\varphi(x) + q\,\psi(x) - f(x)]\,\psi(x)\,dx$$

gleichzeitig verschwinden; aus dieser Bedingung ergeben sich unter Einführung der Abkürzungen

$$2)\quad \begin{cases} A = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)^2\,dx, \quad B = \int_{x_0}^{x_1} \psi(x)^2\,dx, \quad C = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx, \\ A_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad B_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\psi(x)\,dx, \end{cases}$$

die beiden Bedingungsgleichungen

$$Ap + Cq - A_1 = 0,$$
$$Cp + Bq - B_1 = 0,$$

welche für p und q folgende Werthe liefern

$$3)\qquad p = \frac{A_1 B - B_1 C}{AB - C^2}, \quad q = \frac{B_1 A - A_1 C}{AB - C^2}.$$

Setzen wir ferner in Formel 1)

$$4)\qquad D = \int_{x_0}^{x_1} f(x)^2\,dx,$$

so erhalten wir für das arithmetische Mittel der Fehlerquadrate

$$5)\qquad M = \frac{1}{x_1 - x_0}\,(Ap^2 + Bq^2 + 2Cpq - 2A_1 p - 2B_1 q + D)$$

d. i. vermöge der Werthe von p und q

$$6)\quad M=\frac{1}{x_1-x_0}\left\{D-\frac{AB_1^2+BA_1^2-2CA_1B_1}{AB-C^2}\right\}=\frac{D-(A_1p+B_1q)}{x_1-x_0}.$$

Aus M, welches das Quadrat des mittleren Fehlers darstellt, folgt endlich noch der mittlere Fehler $=\pm\sqrt{M}$.

Für den speciellen Fall, wo $f(x)$ auf die lineare Form $p+qx$ gebracht werden soll, hat man $\varphi(x)=1$, $\psi(x)=x$,

$$7)\quad \left\{\begin{array}{l} A=x_1-x_0,\quad B=\tfrac{1}{3}(x_1^3-x_0^3),\quad C=\tfrac{1}{2}(x_1^2-x_0^2),\\ A_1=\int\limits_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx,\quad B_1=\int\limits_{x_0}^{x_1}x\,f(x)\,dx,\end{array}\right.$$

mithin

$$8)\quad p=\frac{4(x_1^2+x_1x_0+x_0^2)A_1-6(x_1+x_0)B_1}{(x_1-x_0)^3},\quad q=\frac{12B_1-6(x_1+x_0)A_1}{(x_1-x_0)^3},$$

$$9)\quad M=\frac{1}{x_1-x_0}\left\{D-\frac{4(x_1^2+x_1x_0+x_0^2)A_1^2+12B_1^2-12(x_1+x_0)A_1B_1}{(x_1-x_0)^3}\right\}.$$

Einige Beispiele hierzu sind folgende:

a) Wenn innerhalb der Grenzen $x=0$ und $x=1$ die Gleichung $\sqrt{1+x^2}=p+qx$ bestehen soll, so ist nach den letzten Formeln

$$A_1=\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}[\sqrt{2}+l(1+\sqrt{2})]=1{,}1477936,$$

$$B_1=\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\tfrac{1}{3}(\sqrt{8}-1)\qquad=0{,}6094757,$$

$$p=\ \ 4A_1-6B_1=0{,}93432,$$
$$q=12B_1-6A_1\ =0{,}42695,$$

mithin

$$10)\qquad \sqrt{1+x^2}=0{,}93432+0{,}426295\,.\,x,\quad 1>x>0.$$

Ferner ergiebt sich

$$M=\tfrac{4}{3}-(4A_1^2+12B_1^2)+12A_1B_1=0{,}000714$$

und daher ist der mittlere Fehler

$$\sqrt{M}=0{,}02672.$$

Setzt man in Nr. 10) $x=\frac{v}{u}$ und multiplicirt beiderseits mit u, so ergiebt sich

$$11)\qquad \sqrt{u^2+v^2}=0{,}93432\,.\,u+0{,}42695\,.\,v,\quad u>v>0,$$

und der mittlere Fehler beträgt hier $0{,}02672\,.\,u$, d. h. ungefähr 2,7 Procent der grösseren Zahl.

b) Um $\sqrt{1-x^2}$ auf die Form $p+qx$ zu bringen, hat man

$$A_1=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}=0{,}785398,$$

$$B_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\tfrac{1}{3}=0{,}333333,$$

$$p=\ \ 4A_1-6B_1=\pi-\ 2=+1{,}14159,$$
$$q=12B_1-6A_1=4-\tfrac{3}{2}\pi=-0{,}71239,$$

folglich

$$12)\qquad \sqrt{1-x^2}=1{,}14159\quad -0{,}71239\,.\,x,\quad 1>x>0,$$

und

$$13)\qquad \sqrt{u^2-v^2}=1{,}14159\,.\,u-0{,}71239\,.\,v,\quad u>v>0.$$

Für die Formel 12) findet sich $M=0{,}007525$, $\sqrt{M}=0{,}08675$; in Nr. 13) beträgt also der mittlere Fehler ungefähr 8,7 % der grösseren Zahl.

c. Innerhalb der Grenzen $x=x_0$ und $x=x_1$ sei die Gleichung $1=p\cos x+q\sin x$ herzustellen; man hat für diesen Fall noch Nr. 2) und Nr. 3)

$$A=\int_{x_0}^{x_1}\cos^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}(x_1-x_0)+\tfrac{1}{4}(\sin 2x_1-\sin 2x_0),$$

$$B=\int_{x_0}^{x_1}\sin^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}(x_1-x_0)-\tfrac{1}{4}(\sin 2x_1-\sin 2x_0),$$

$$C=\int_{x_0}^{x_1}\cos x\sin x\,dx=\tfrac{1}{4}(\cos 2x_0-\cos 2x_1),$$

$$A_1=\int_{x_0}^{x_1}\cos x\,dx=\sin x_1-\sin x_0,$$

$$B_1=\int_{x_0}^{x_1}\sin x\,dx=\cos x_0-\cos x_1.$$

Mit Hülfe einiger naheliegenden Umwandlungen ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$A_1B-B_1C=\tfrac{1}{2}[x_1-x_0-\sin(x_1-x_0)](\sin x_1-\sin x_0),$$
$$B_1A-A_1C=\tfrac{1}{2}[x_1-x_0-\sin(x_1-x_0)](\cos x_0-\cos x_1),$$
$$AB-C^2\ =\tfrac{1}{4}[x_1-x_0-\sin(x_1-x_0)][x_1-x_0+\sin(x_1-x_0)],$$

und es ist folglich

14) $$p = 2\,\frac{\sin x_1 - \sin x_0}{x_1 - x_0 + \sin(x_1 - x_0)}, \quad q = 2\,\frac{\cos x_0 - \cos x_1}{x_1 - x_0 + \sin(x_1 - x_0)},$$

15) $$1 = p\cos x + q\sin x, \quad x_1 > x > x_0.$$

Specieller für $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{1}{4}\pi$ hat man

$$A = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}, \quad B = \tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{4}, \quad C = \tfrac{1}{4},$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad D = \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$p = \frac{2}{\frac{1}{4}\pi\sqrt{2} + 1} = 0{,}94754, \quad q = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\frac{1}{4}\pi\sqrt{2} + 1} = 0{,}39249,$$

und für die hiermit bestimmten Werthe

16) $$1 = 0{,}94754 . \cos x + 0{,}39249 . \sin x, \quad \tfrac{1}{4}\pi > x > 0,$$

wobei $M = 0{,}000544$ und der mittlere Fehler $\sqrt{M} = 0{,}02333$ ist.

Setzt man in der Gleichung 16) $\tan x = \frac{v}{u}$ und multiplicirt beiderseits mit $\sqrt{u^2 + v^2}$, so gelangt man zu der Formel

17) $$\sqrt{u^2 + v^2} = 0{,}94754 . u + 0{,}39249 . v, \quad u > v > 0,$$

worin der mittlere Fehler $= 0{,}02333 . \sqrt{u^2 + v^2}$ ist also ungefähr $2\frac{1}{3}$ % von $\sqrt{u^2 + v^2}$ beträgt.

Dass die Formeln 11) und 17) weder unter einander noch mit der Poncelet'schen

$$\sqrt{u^2 + v^2} = 0{,}960434 . u + 0{,}397825 . v, \quad u > v > 0,$$

genau übereinstimmen, liegt in der Natur der Sache; für kleine $\frac{v}{u}$ bietet übrigens die Formel 11), für grosse, d. h. der Einheit ziemlich nahe kommende $\frac{v}{u}$ die Formel 17) den Vorzug einer besseren Annäherung.

d. Soll e^x innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ auf die lineare Form gebracht werden, so hat man

$$A = 1, \quad B = \tfrac{1}{3}, \quad C = \tfrac{1}{2},$$

$$A_1 = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1 = 1{,}71828,$$

$$B_1 = \int_0^1 x\,e^x\,dx = 1, \quad D = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2 - 1) = 3{,}19453,$$

$$p = 4e - 10 = 0{,}87313, \quad q = 18 - 6e = 1{,}69031,$$

folglich

18) $$e^x = 0{,}87313 + 1{,}69031 . x, \quad 1 > x > 0.$$

Man erhält ferner

$$M = 20e - \tfrac{7}{2}e^2 - 28{,}5 = 0{,}00394, \quad \sqrt{M} = 0{,}06277,$$

der mittlere Fehler beträgt ungefähr 6 %.

e. Für den Fall, dass innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ die Gleichung $x = p \sin x + q(1 - \cos x)$ bestehen soll, geben die Formeln 2), 3) und 4)

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4}\pi, \quad B = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \cos x)^2 dx = \frac{3}{4}\pi - 2,$$

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \cos x) \sin x\, dx = \frac{1}{2},$$

$$A_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \sin x\, dx = 1, \quad B_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x(1 - \cos x)\, dx = \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi + 1,$$

$$p = \frac{16\pi - 40 - \pi^2}{3\pi^2 - 8\pi - 4} = 0{,}83155,$$

$$q = \frac{\frac{1}{2}\pi^3 - 2\pi^2 + 4\pi - 8}{3\pi^2 - 8\pi - 4} = 0{,}69380,$$

und es ist daher

$$19) \qquad x = 0{,}83155 . \sin x + 0{,}69380 . (1 - \cos x), \quad \tfrac{1}{2}\pi > x > 0.$$

Man findet ferner $M = 0{,}000288$ und den mittleren Fehler $\sqrt{M} = 0{,}01698$.

II. Die oben entwickelten Näherungsformeln können u. A. zur näherungsweisen Auflösung transcendenter Gleichungen benutzt werden, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

α. Da die Funktion xe^{-x} von $x = 0$ bis $x = 1$ wächst und von da bis $x = \infty$ wieder abnimmt, so entsprechen jedem positiven gegebenen Werthe von xe^{-x}, vorausgesetzt, dass dieser weniger als das Funktionsmaximum $\frac{1}{e}$ beträgt, zwei reelle Werthe des x, von denen der eine zwischen 0 und 1, der andere zwischen $x = 1$ und $x = \infty$ liegt. Die erste Wurzel ist leicht näherungsweis zu bestimmen, wenn man in der Gleichung

$$20) \qquad xe^{-x} = k, \quad k < \frac{1}{e},$$

e^x unter der linearen Form $p + qx$ darstellt; man hat dann

$$\frac{x}{p + qx} = k, \quad x = \frac{p}{\frac{1}{k} - q},$$

d. i. nach Nr. 18)

$$21) \qquad x = \frac{0{,}87313}{\frac{1}{k} - 1{,}69031},$$

β. Wäre die zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegende Wurzel der Gleichung

$$22) \qquad \frac{x}{\sin x} = k, \quad \frac{\pi}{2} > k > 0,$$

zu bestimmen, so würde man x unter der Form $p \sin x + q\,(1 - \cos x)$ darstellen und erhalten

$$\tan \tfrac{1}{2}x = \frac{k-p}{q},$$

d. i. nach Formel 19)

$$23)\qquad \tan \tfrac{1}{2}x = \frac{k - 0{,}83155}{0{,}69380} = 1{,}44133 . k - 1{,}19854.$$

Als Beispiel hierzu diene die Annahme $k = 1{,}09073$; die Formel giebt dann $\frac{1}{2}x = 20^{0}29'2''3$, $x = 40^{0}58'4''6$ oder in Theilen des Halbmessers $x = 0{,}715025$, wovon der wahre Werth $x = 41^{0} = 0{,}715585$ nicht viel abweicht.

γ. Auf ähnliche Weise kann die allgemeinere Gleichung

$$24)\qquad x + \alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma, \quad \tfrac{1}{2}\pi > x > 0,$$

behandelt werden. Mittelst der Substitution $x = p \sin x + q\,(1 - \cos x)$ verwandelt sich dieselbe in die folgende

$$(p+\alpha) \sin x - (q-\beta) \cos x = \gamma - q$$

welche durch Einführung eines Hülfswinkels der sich mittelst der Formel

$$25)\qquad \tan \vartheta = \frac{q-\beta}{p+\alpha}$$

bestimmt, die einfache Gestalt

$$26)\qquad \sin\,(x - \vartheta) = \frac{(\gamma - q)\,\cos\vartheta}{p+\alpha} = \frac{(\gamma-q)\,\sin\vartheta}{p-\beta}$$

annimmt. Man erhält hieraus $x - \vartheta$ und durch Addition von ϑ schliesslich x.

Denkt man sich α und β als constant, γ dagegen als veränderlich, wie es z. B. bei dem Kepler'schen Probleme der Fall ist, so bleibt ϑ constant, und man hat daher eine leichte Rechnung.

XIII. Ueber eine Eigenschaft gewisser Reihen. Im neusten Hefte des Grunert'schen Archivs (Bd. 30, Heft 1) beschäftigt sich Herr Hofrath Clausen in Dorpat mit einem Satze, den ich 1849 gelegentlich gefunden und ohne Beweis in Bd. 12 jener Zeitschrift mitgetheilt hatte; bezeichnet nämlich $f(p)$ die Summe der folgenden für alle positiven von Null verschiedenen p convergirenden Reihe

$$\frac{1}{1^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{7^p} + \ldots$$

und setzt man specieller p als ächten Bruch voraus, so besteht zwischen $f(p)$ und $f(1-p)$ die Relation

$$\frac{f(1-p)}{f(p)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^p \Gamma(p) \sin \frac{p\pi}{2}.$$

Die Aufmerksamkeit, welche Herr Clausen diesem Satze geschenkt hat, war für mich die Veranlassung, einen directen Beweis zu suchen, und wie es scheint, ist der folgende der kürzeste, den es überhaupt geben kann.

Aus der bekannten Formel

$$\frac{\Gamma(p)}{k^p}\sin\frac{p\pi}{2}=\int_0^\infty z^{p-1}\sin kz\,dz,\quad 1>p>0$$

folgt für $k=1,3,5,\ldots 4n+1$,

$$\Gamma(p)\left\{\frac{1}{1^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}-\ldots+\frac{1}{(4n+1)^p}\right\}\sin\frac{p\pi}{2}$$

$$=\int_0^\infty z^{p-1}\left\{\sin z-\sin 3z+\sin 5z-\ldots+\sin(4n+1)z\right\}dz$$

$$=\int_0^\infty z^{p-1}\frac{\sin(4n+2)z}{2\cos z}\,dz,$$

oder wenn $z=\frac{1}{2}t$ gesetzt wird,

$$\Gamma(p)\left\{\frac{1}{1^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}-\ldots+\frac{1}{(4n+1)^p}\right\}\sin\frac{p\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{2^p}\int_0^\infty t^{p-1}\frac{\sin(2n+1)t}{2\cos\frac{1}{2}t}\,dt=\frac{1}{2^p}\int_0^\infty\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,t^{p-1}\sin\tfrac{1}{2}t\,dt.$$

Geht man zur Grenze für unendlich wachsende n über, so erhält man linker $\Gamma(p)\,f(p)\sin\frac{p\pi}{2}$; rechter Hand ist der bekannte Dirichlet'sche Satz

$$Lim\int_0^\infty\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\varphi(t)\,dt=\pi\left[\tfrac{1}{2}\varphi(0)+\varphi(\pi)+\varphi(2\pi)+\ldots\right]$$

für $\varphi(t)=t^{p-1}\sin\frac{1}{2}t$ anwendbar, und man gelangt damit zu der Gleichung

$$\Gamma(p)\,f(p)\sin\frac{p\pi}{2}=\frac{\pi}{2^p}\left[\pi^{p-1}-(3\pi)^{p-1}+(5\pi)^{p-1}-\ldots\right]$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^p f(1-p),$$

welche in der That das erwähnte Theorem enthält.

Kennt man überhaupt den Werth eines Integrales von der Form

$$\psi(k)=\int_a^b F(z)\sin kz\,dz,$$

so erhält man mittelst des vorigen Verfahrens

$$\psi(1)-\psi(3)+\psi(5)-\psi(7)+\ldots$$

$$= Lim\, \tfrac{1}{2} \int_a^b \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} F(t) \sin \tfrac{1}{2}t\, dt,$$

und kann den gesuchten Grenzwerth leicht mittelst des Dirichlet'schen Satzes bestimmen.

Aus der bekannten Integralformel

$$\int_0^\infty z\, e^{-a^2 z^2} \sin kz\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}\, k\, e^{-\left(\frac{k}{2a}\right)^2}$$

erhält man z. B. nach diesem Verfahren

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}\left\{1 e^{-\left(\frac{1}{2a}\right)^2} - 3 e^{-\left(\frac{3}{2a}\right)^2} + 5 e^{-\left(\frac{5}{2a}\right)^2} - \ldots\right\}$$

$$= Lim \int_0^\infty z e^{-a^2 z^2} \frac{\sin(4n+2)z}{2\cos z} dz = Lim\, \tfrac{1}{4} \int_0^\infty t\, e^{-\left(\frac{at}{2}\right)^2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \sin \tfrac{1}{2}t\, dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\pi e^{-\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2} - 3\pi e^{-\left(\frac{3a\pi}{2}\right)^2} + 5\pi e^{-\left(\frac{5a\pi}{2}\right)^2} - \ldots\right].$$

Diesen Satz kann man, wenn

$$e^{-\left(\frac{1}{2a}\right)^2} = p \text{ und } e^{-\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2} = q$$

gesetzt wird, auch folgendermaasen aussprechen: wenn zwischen den ächten Brüchen p und q die Beziehung

$$l\left(\frac{1}{p}\right) . \, l\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

statt findet, so ist

$$\sqrt[4]{\left[l\left(\frac{1}{p}\right)\right]^3}\left\{p - 3p^9 + 5p^{25} - 7p^{49} + \ldots\right\}$$

$$= \sqrt[4]{\left[l\left(\frac{1}{q}\right)\right]^3}\left\{q - 3q^9 + 5q^{25} - 7q^{49} + \ldots\right\}.$$

Ein ähnliches Theorem rührt von Cauchy her und wurde später von Abel mittelst der Theorie der elliptischen Functionen verificirt (Crelle's Journ. Bd. 4. S. 93).

Schlömilch.

VIII.

Ramus in Heidelberg.

Von M. Cantor.

In einer früheren Abhandlung im 2. Bande dieser Zeitschrift wurde (S. 357) die Geschichte der Kämpfe, welche Ramus in Heidelberg zu bestehen hatte, als Inhalt eines künftigen Aufsatzes angekündigt. Indem wir dieser Ankündigung hiermit Folge leisten, sehen wir uns in die Lage versetzt, eine Art von Entschuldigung vorauszuschicken. Es waren nämlich die Streitigkeiten, auf deren Schilderung es uns ankommt, mehr philosophischer Natur, und somit hätten dieselben für die Geschichte der Mathematik nur höchst untergeordnetes Interesse. Da aber einestheils die Persönlichkeit des Ramus von genügend hervorragender Bedeutung ist, um Allem, was auf ihn sich bezieht, den Werth unmittelbaren Einflusses beizulegen, da anderntheils in jener Zeit die Trennung zwischen den einzelnen Wissenschaften keine so strenge war, dass es nicht auch für den Mathematiker wissenswerth erschiene, welche Verhältnisse und Partheiungen überhaupt auf den Universitäten existirten, so glaubt der Verfasser sich berechtigt, diese Resultate seiner Forschungen*) den Lesern der Zeitschrift für Mathematik und Physik vorzulegen, fühlt sich aber gleichzeitig verpflichtet ausser dem schon Bemerkten noch hinzuzufügen, dass er nur geringe Abweichungen von dem fand, was Waddington in seinem vortrefflichen Werke über Ramus als Geschichte jenes Streites erzählt.

Aus jener ersten Abhandlung möge in Kürze wiederholt werden, dass Peter Ramus, der erste Philosoph und Mathematiker, welcher den Muth besass, als offener Gegner der aristotelischen Lehre und als nur bedingter Verehrer des Euclid aufzutreten, sich durch diese Neuerungen so gefährliche Feinde zugezogen hatte, dass er im Jahre 1568 von dem Könige von

---

*) Hauptquellen waren der 9. Band der Acten des Senates der Heidelberger Universität, sowie der 4. Band der Protocolle der philosophischen Facultät. Erstere sollen kurzweg als IX., letztere als IV. citirt werden. Für die politische Geschichte wurde besonders benutzt: Haeusser, Geschichte der rheinischen Pfalz.

Frankreich eine Art von Urlaub sich verschaffte, welcher eigentlich nur den Vorwand zu einer förmlichen Flucht abgab, deren Rechtfertigung zur Genüge in den Gefahren sich zeigte, denen er auch so noch bei seiner Annäherung an die Grenze sich ausgesetzt sah.*) Er gelangte indessen nach Basel, wo er bis zur Mitte des Jahres 1569 sich mit der Herausgabe der *Arithmetica* und der *Scholae mathematicae* beschäftigte, reiste dann nach Frankfurt a/M. und wollte zu Anfang October nach Basel zurückkehren. Auf dieser Rückreise berührte er Heidelberg und nahm daselbst einen mehrmonatlichen Aufenthalt, dessen Veranlassung wir zu erzählen haben.

Kaum war nämlich Ramus in der Residenzstadt des Kurfürsten Friedrich III. (reg. 1559—1576) angelangt, so richteten 60 Studenten, zum grössten Theile Franzosen, aber auch Polen, Italiener und einige Deutsche, eine Bittschrift an den Kurfürsten, worin derselbe angegangen wurde, Ramus an die Stelle des den 26. Juni verstorbenen und seither noch nicht ersetzten Victorinus Strigelius zum Professor der Ethik zu ernennen. Es war dieses allerdings nicht der gesetzmässige Weg. In der Reformation, welche Kurfürst Otto Heinrich den 19. December 1558, kurz vor seinem Tode, der Universität gegeben und welche namentlich Jac. Micyllus und Phil. Melanchthon, dann aber auch den Kanzler Christ. Probus zum Verfasser hatte, war es wenigstens in Betreff der drei oberen Facultäten ausdrücklich vorgesehen**), dass eine freigewordene Professur in der Weise zu besetzen sei, dass der Senat der Universität dem Kurfürsten zwei Candidaten vorschlage, die derselbe zwar beide verwerfen, alsdann aber auch nur unter Rüge der ersten Wahl neue Vorschläge verlangen könne. Für die philosophische Facultät oder, wie sie damals auch hiess, die Facultät der Artisten, war keine derartige bestimmte Vorschrift vorhanden, die Analogie lag aber so nahe, dass man wohl den Gesetzen die derartige Erweiterung geben konnte, andererseits freilich in dem Mangel einer bestimmten Vorschrift Grund zu willkürlicher Deutung finden mochte. So ergab es sich auch, dass der Kanzler Christ. Probus, der doch wohl sein eigenes Werk zu interpretiren im Stande war, am 10. November dem Rector gegenüber erklären konnte, eine directe Einmischung des Fürsten sei nicht gegen die Rechte der Universität, dessen Schutz und Erhaltung ihm angetragen seien (IX, 90a.), als Antwort auf ein Schreiben an den Kurfürsten, in welchem der Streitpunkt von Seiten der Universität ausgesprochen war: „denn in der Churf. unss zugestellten Reformation ist und Andern heilsamlich und woll versehen (wie es denn auch biss anhero alss üblich bei unss ohn eintrag menniglichs gehalten worden)***) wenn *in facultate artium* ein Profes-

*) Vergl. Ramus, *Arithmetica* Vorrede p. 3.

**) Für die Auszüge aus der Reformation vergl. F. O. Wund, Beiträge zu der Geschichte der Heidelberger Universität. Mannheim 1786, S. 93—138. Die hier angezogene Stelle vergl. S. 105.

***) Beispiele dieses Gebrauches finden sich u. A. IV, 75a. und 78b. bei der Ernennung des Niger und Grynaeus.

sion oder Lectur vacirende und ledig wurt, und ein Anderes davon begeren tuht dass derselbig sich bei genannter Facultät anzeige." (IX, 87 a.)

Die Petition wurde von dem Kurfürsten dem Senate überwiesen, welcher deshalb in ausserordentlicher Sitzung Samstag, 8. October, zusammenkam*) und eine Antwort beschloss, deren Inhalt fast eben so oft wiederkehrte, als in dieser Angelegenheit Schreiben gewechselt wurden. Nach der Bemerkung von der Unziemlichkeit einer solchen Petition von Seiten der jungen Bittsteller, welche zudem jedenfalls den Weg durch Decanat und Rectorat hätten einschlagen müssen, wird eine Verwahrung des Sinnes eingelegt, dass man schon von freien Stücken rechtzeitig taugliche Professoren berufe, wenn sie nothwendig seien. Ramus übrigens möge nur selbst sein Verlangen formuliren, so werde man beschliessen, wie es der Nutzen und Vortheil der Akademie erheische (IX, 83 b). In der Debatte aber, welche über dieses officielle Schreiben geführt wurde, sprachen Einige den wohlbegründeten Verdacht aus, Ramus sei wohl wenigstens der intellectuelle Urheber jener Petition, deren Anstifter Franzosen seien.

Die Folge dieses ersten Rückschreibens war zunächst die, dass in der Sitzung der Artistenfacultät am 10. October (IV, 91 a) vom Decane Professor Niger der Antrag gestellt wurde, die Professur der Ethik wieder zu besetzen, während Ramus sich öffentlich ruhig verhielt, die Studirenden aber auf's Neue um Anstellung des ersehnten Lehrers beim Kurfürsten petitionirten.

Die Frage liegt zu nahe, warum Ramus nicht in den so einfachen Wunsch des Senates einwilligend sich wirklich sofort an denselben wandte, als dass wir nicht suchen sollten, davon, sowie von einer anderen eben so nahe liegenden Frage die Erklärung zu geben. Wir müssen dazu mit Nothwendigkeit die Verhältnisse und namentlich die Persönlichkeiten kennen lernen, unter welche Ramus sich plötzlich versetzt fand.

Die politischen und religiösen Verhältnisse des Hofes, denn wie wollte man diese beiden Seiten des Staatslebens damals trennen? waren entschieden von der Art, dass sie Ramus zu einem längeren Aufenthalte in der Pfalz nur ermuntern konnten. Der Kurfürst Friedrich Wilhelm III., ein geistvoller, kenntnissreicher Mann, von energischem, wahrhaft religiösem und zugleich humanstem Charakter, der Vertheidiger der bedrängten Calvinisten in Frankreich, in Holland, wo sein Schwager, Graf Egmont, als eines der ersten Opfer des Revolutionskrieges fiel, dieser Fürst musste auch in den Wissenschaften den Autoritätsglauben abgeschüttelt haben und den Neuerungen zum Mindesten Interesse widmen. Sein ältester Sohn, der spätere Kurfürst Ludwig VI., war zwar dem Vater in den meisten Dingen unähnlich und würde, ein schroffer Lutheraner, dem Hugenotten wohl kaum den Aufenthalt gestattet haben. Allein er war erst Prinz und zudem ent-

*) Der ordentliche Rathstag ist Mittwochs Nachmittag, als wo keine *lectiones publicae* gehalten werden (Wund l. c. S. 96).

fernt. Die anwesenden Prinzen Johann Casimir und Christoph hingegen übertrafen den Vater noch in der Zuneigung gegen die von Ramus vertretene Richtung. Hatte doch Johann Casimir 1567 als 24jähriger Jüngling auf eigene Faust eine Schaar gerüstet, mit welcher er den französischen Calvinisten zu Hilfe eilte; und der noch jüngere Pfalzgraf Christoph*) (geb. 1551), in Genf erzogen, brannte vor Begierde, selbst seine Studien unter Ramus Leitung fortzusetzen (IX, 90 a), zu welchem er schon früher in gewissen Beziehungen stand. Ihn hatte Ramus fast noch im Knabenalter den regsten Beförderern der Mathematik, dem Landgrafen Wilhelm von Hessen, dem Kaiser Maximilian II., dem Erzherzog Karl von Oesterreich, dem Ungarnkönige Matthias Corvinus rühmlichst an die Seite gestellt und ihn persönlich aufgefordert**), dafür zu sorgen, dass das Studium der Mathematik in Heidelberg zu grösserer Blüthe gebracht werden möge. Namentlich schlug er ihm dazu die Gründung einer zweiten Professur der mathematischen Wissenschaften und zu deren Besetzung den seit 1558 in Heidelberg ansässigen Wilhelm Xylander vor. So fand also Ramus einen ihm durchaus befreundeten Hof, Ersatz genug für die ihm verlorene Gunst des Königs von Frankreich, Grund genug, ihn an eine Stadt zu fesseln, wo ihm solcher Ersatz geboten wurde; und das einzig Auffallende besteht vielleicht darin, dass Ramus nicht versuchte, hier jene zweite mathematische Professur selbst zu gründen, statt als Philosoph aufzutreten und Kenntnisse verbreiten zu wollen, die er anderweits als *nugas sophisticas* geisselte***).

Die Universität war, wie es unter einer solchen Regierung sich von selbst versteht, in religiöser Beziehung auf demselben Standpunkte. Die widerwärtigen Streitigkeiten der entgegenstehenden Ansichten waren zwar nicht beigelegt worden, aber sämmtliche Facultäten, die theologische an der Spitze, hatten doch wenigstens einen einheitlichen, und zwar einen entschieden calvinistischen Charakter angenommen, welcher Ramus nur günstig sein konnte. Ganz anders verhielt es sich in wissenschaftlicher Beziehung.

Rector der Universität war im Jahre 1569 Herm. Witekind, Professor der griechischen Sprache und als solcher schon Verehrer des Aristoteles, zudem ein Mann von geistiger Bedeutung. Zu Nienrade in Westphalen 1524 geboren, hatte er in Wittenberg als Schüler Melanchthon's in hohem Grade sich ausgezeichnet, so dass dieser ihn an seiner Stelle mitunter Vorlesungen halten liess, ohne ihm gar besondere Vorschriften zu ertheilen. Nach Heidelberg war er 1561 berufen worden.†)

---

*) Dieser vortreffliche Jüngling konnte leider die grossen Hoffnungen, die man auf ihn setzte, nicht verwirklichen. Er fiel nämlich auf dem Schlachtfelde auf der Mockerhaide April 1574 im Kampfe für die Unabhängigkeit der Niederlande.

**) Vergl. p. 64, 65 der *Schol. math.*, deren drei ersten Bücher bekanntlich schon 1567 unter besonderem Titel erschienen.

***) Vergl. diese Zeitschr. Bd. II, S. 356.

†) Nach Friedrich III. Tode musste er wegen seiner religiösen Ansichten nach

Was die übrigen fünf Professuren der Artistenfacultät betrifft, so war die Ethik unbesetzt, welcher Strigelius, zugleich Decan der Facultät, vorgestanden hatte. Die Physik befand sich in den Händen von Niger, welcher auch das Decanat für den Rest des Jahres 1569 übernahm. Die Mathematik hatte in Grynaeus, die lateinische Sprache und Rhetorik in Pithopaeus ihren Vertreter; endlich las Xylander über das Organon des Aristoteles.

Von diesen Männern ist Hier. Niger der verhältnissmässig wenigst bekannte. Er gehörte wahrscheinlich einer italienischen Familie an, welche vielfach der Medizin und der damit eng zusammenhängenden Physik sich befliss. Was nämlich damals unter diesem Namen gelehrt wurde, stand unserem heutigen Begriffe der Physiologie am Nächsten. Pithopaeus, ein Holländer (geb. 1535 in Deventer), der seine Studien in Rostock und Wittenberg gemacht, 1562 nach Heidelberg gekommen war, hatte in seiner ganzen Laufbahn*) zu viel mit Witekind gemein, um ihm nicht eng befreundet zu sein. Simon Grynaeus *junior* (so hiess der Mathematiker mit vollständigem Namen) war der jüngste seiner sämmtlich in kräftigstem Mannesalter stehenden Collegen. Er war im December 1539 in Bern geboren, hatte sich ziemlich vielseitige Bildung erworben und war 1562 Professor der Mathematik in Heidelberg geworden, ohne gerade dieser Wissenschaft wesentlich zu nützen. Abgesehen davon, dass man keine bedeutendere Arbeit von ihm kennt, weiss man überdies, dass, als auch er später Heidelberg wegen religiöser Streitigkeiten verliess, er 1580 als Professor der Moral nach Basel kam, wo er 1582 starb. Grosse Ansprüche konnten indessen kaum an einen Professor gestellt werden, dessen auch für damalige Zeit fast mehr als geringe Jahresgehalt nur Fl. 60 nebst der Wohnung in dem sogenannten *Dionysiacum* betrug (IV, 78b).

Ueberhaupt war die Art, in welcher damals die Mathematik in Heidelberg gelehrt wurde, eben so wenig geeignet, sie grosse Fortschritte machen zu lassen, als die Männer, denen jenes Fach anvertraut war. Der unter Friedrich II. (1544—1556) berufene erste Heidelberger Professor der Mathematik Jac. Curio war Mediziner**). Dessen Nachfolger J. Marcus Morsheimer schrieb astrologische Streitfragen, nebst einer Art von politischer Arithmetik, welche als älteste mir den Namen nach bekannt gewordene (*disputatio juridica de rebus mathematicis. Basileae* 1558 in 8°) genannt werden mag. Der alsdann berufene Böhme Cyprian Leovitius war gleichfalls weit weniger Mathematiker, als vielmehr Hofastrolog Otto

---

Neustadt an der Hardt fliehen, von wo er unter Joh. Casimir zurückkehrte und alsdann Mathematik lehrte. Frucht dieser Studien war sein Werk: *De doctrina et studio astronomiae.*

*) Auch er floh 1576 und kehrte 1583 nach Heidelberg zurück, wo er noch eine Zeit lang lehrte, dann 1596 in Zurückgezogenheit starb.

**) geb. zu Hof 1497, † zu Heidelberg 1572, vergl. *Nouvelle Biographie universelle XII,* 638.

Heinrichs, und prophezeite als solcher den Weltuntergang auf 1584*). Von Grynaeus wurde schon das Nöthige erwähnt. Ueber die Lehren, welche in den mathematischen Vorlesungen vorgetragen, oder, besser gesagt, eingeübt wurden, giebt die schon öfters angeführte Reformation uns Aufschluss. Sie schreibt vor (Wund l. c. S. 129): „Der *Mathematicus* soll zum ersten die Arithmetic, volgends *spheram Procli* oder *Joannis de sacrobusto*; des andern Jahres gleichermassen *primum Euclidis* oder *Elementale Joh. Voegelini***) und die *Theoricas planetarum* behandeln und also in zwei Jahren über Arithmetic, Geometri und Astronomi lesen; und so es sich der Arbeit nicht mögte dauern lassen, so mögte er auch *obiter* von der Music, soviel derselben Theorie und die *proportiones harmonicas* belangt, anzeigen.“ Zwei Männer waren jetzt in Heidelberg vorhanden, durch Geist und Kenntnisse berufen, eine neue Aera für die mathematischen Wissenschaften herbeizuführen, und beide versäumten es. Es war Wilhelm Xylander und Peter Ramus.

Wilhelm Xylander, den 26. December 1832 in Augsburg von armen Aeltern geboren***), hatte seine Studien in Tübingen als Stipendiat 1549 begonnen. Die Würde eines Magisters erwarb er sich alsdann 1556 in Basel, und schon 1558 folgte er einem ehrenvollen Rufe nach Heidelberg als Nachfolger des Jac. Micyllus in der Professur der griechischen Sprache, welche er freilich nach kaum vier Jahren an Witekind wieder abgab, um alsdann auf besondere Veranlassung von Seiten des Senates (17. Febr. 1562, vergl. IV, 78 b) sich mit dem Organon des Aristoteles zu befassen. Diese Vorlesungen hielt er denn auch noch im Jahre 1569, von welchen eine Art von Lectionskatalog in den Acten der Universität aufbewahrt ist (IX, 31—35), und auch in den Protocollen der philosophischen Facultät ist er als *professor organi Aristotelici* bezeichnet (IV, 90 b). Als man ihn bat, dieses Fach zu übernehmen, war das deutlich angegebene Motiv, nur er sei im Stande, die Logik des Aristoteles richtig zu lehren, während für die griechische Sprache leichter ein Ersatzmann gefunden würde; und in derselben Sitzung stellte man einen Grynaeus unter den schon angegebenen Bedingungen als Mathematiker an, um Vorlesungen zu ertheilen, welche Xylander provisorisch fast ein Jahr lang übernommen hatte (IV, 75 b). So

---

*) Weltuntergangsprophezeiungen waren damals nicht selten. Bekanntlich sagte Michael Stifel das Ende der Welt auf 1533 voraus; Joh. Stoeffler in Tübingen auf den Monat Februar 1524 (Klüppel, Geschichte und Beschreibung der Universität Tübingen, 1849, S. 17) u. a. m.

**) Joh. Voegelinus aus Heilbronn lebte zu Anfang des 16. Jahrhunderts. Er war der Schüler des auch als Herausgeber der *Tabulae eclipsium Georgii Purbachii* bekannten Wiener Mathematikers Tannstetter, der ihn oft als Lehrer substituirte und den er alsdann auch sein *Elementale geometricum* (Strassburg 1529, Frankfurt 1534 u. m.) widmete. Dasselbe ist ein 57 Seiten (kl. 8°) starkes Excerpt aus Euclid mit wenig Aenderungen und noch weniger Verbesserungen.

***) Er starb zu Heidelberg am 10. Febr. 1576 *morbo ex intempestivis lucubrationibus contracto*. Vergl. Freher. *Theatrum virorum eruditione clarorum* p. 1471, sein Portrait ad p. 1467.

bedeutend war das Uebergewicht, welches die Universitätsbehörde der Philosophie und besonders der aristotelischen Logik der Mathematik gegenüber beilegte. Was Wunder, wenn also auch Männer wie Xylander, wie Ramus dem allgemeinen Vorurtheile nachgebend das Fach zu vertreten sich bestrebten, welches, in höherer Achtung stehend, sie selbst angesehener und einflussreicher machen musste? Und doch war Xylander, ohne über seine philosophischen Kenntnisse ein hartes Urtheil fällen zu wollen, gewiss noch befähigter, die Mathematik zu vertreten. Dafür zeugt schon seine mit zum Theil trefflichen Erläuterungen versehene erste deutsche Uebersetzung der sechs ersten Bücher Euclids (Basel 1562), und noch bekannter ist seine erste lateinische Ausgabe des Diophant (Basel 1575), welche er dem Herzoge Ludwig von Würtemberg widmete und dafür ein Geschenk von 50 Thalern erhielt*).

Diese Verhältnisse mögen zur Erklärung dienen, warum auch Ramus in Heidelberg der Mathematik abtrünnig wurde, wozu allerdings noch der weitere Umstand kam, dass Männer von solchem wesentlich energischem, strengem Charakter nur zu leicht aus Energie in Eigensinn, aus Festhalten an einem Principe in Rechthaberei verfallen. Ramus war seiner philosophischen Ansichten wegen von Paris verdrängt worden; dieselben Ansichten liessen ihn in Strassburg keine Ruhestätte finden; so musste er fast dazu kommen, nur als Philosoph und zwar als offener Antiaristoteliker eine Stellung sich erringen zu wollen. Dass er aber direct an den ihm wohlwollenden Fürsten die Petition gehen liess, welche er wohl sicher selbst veranlasst hatte, konnte vielleicht zunächst nur französische Unkenntniss fremder Sitten sein, welche überall die Gewohnheiten des eigenen Hoflebens voraussetzte, wo allerdings die unmittelbare königliche Einwirkung als Regel galt, abgesehen davon, dass eine abschlägige Antwort der Facultät und des Senates mit nur noch grösserer Bestimmtheit vorauszusehen war, nachdem einmal jener andere Weg eingeschlagen war.

Auf die zweite Petition hin schickte nun der Kurfürst den 18. October zwei Schreiben an den Rector mit dem mündlichen Auftrage, man solle dem Ramus unter Bestallung zum ausserordentlichen Professor Platz, Zeit und Besoldung anweisen**). Dieses war in gewisser Beziehung eine Nachgiebigkeit gegen die Universität, indem der Vorwand der Ungesetzlichkeit noch vermindert wurde. Denn die Reformation hatte in Betreff der Vorlesung Derer, welche nicht *ordinarii* wären, festgesetzt, sie sollten Niemanden, der tüchtig dazu sei, verboten sein, doch mit Wissen des Decans und in keiner Stunde, wo *ordinarii* lesen. Unentgeldlich können alsdann diese Vorlesungen sogar im Universitätsauditorium stattfinden

*) Heilbronner p. 794 berichtet von 500 Thalern, welches sicher irrthümlich ist.

**) *Locus, tempus et praemium.* Damals las nämlich nicht Jeder zu einer ihm beliebigen Zeit, sondern Stunden und Auditorium waren in der Reformation für jeden Gegenstand und jeden einzelnen Lehrer ihrem Range nach festgestellt worden.

(Wund S. 117). Der am 19. October versammelte Senat nahm indessen hierauf keine Rücksicht, sondern verbat sich in höflich-demüthiger Weise die Ernennung des Ramus durch einen Brief, dessen Absendung nur deshalb nicht erfolgte, weil Rath Zuleger, ein besonderer Freund des Ramus, sich persönlich nach dem Beschlusse erkundigte. Soweit war also noch nicht officiell weder ein directes Verlangen des Kurfürsten ausgesprochen, noch eine direct abschlägige Antwort der Universität gegeben worden. Beides erfolgte zu Ende des Monats.

In einem Schreiben vom 29. October (IX, 85 b) „bevellet der Churfürst gnediglich jenem Ramum gepürlich Platz und Stundt dartzu (i. e. zur Lectur *Ethices*) einzuräumen und zu benennen. Hatten Ihr aber hierin bedenkens, mögen Ihr uns desselben verständigen". Und den 2. November wurde eine Antwort darauf beschlossen, welche am 9. November dem Senate im Entwurfe vorgelegt, am 10. in das kurf. Archiv eingeliefert wurde, und worin die Ablehnung des Ramus in der schon erwähnten Weise wegen Ungesetzlichkeit sowohl von Seiten der Petenten als des Ramus selbst motivirt wurde.

Noch denselben Tag wurden Witekind und Niger auf 1 Uhr ins Schloss beschieden, wo Probus ihnen den früher erwähnten Bescheid ertheilte und drohend hinzufügte: Pfalzgraf Christoph habe selbst die Absicht bei Ramus zu hören, und schon deshalb müssten sie diesen als Professor einsetzen, oder den Zorn des Fürsten fürchten.

Die darauf zu erwartende unmittelbare Entgegnung des Senates blieb aus und so richtete, wie es scheint, Friedrich III. in rühmlicher Achtung des Gesetzes an Ramus das Ersuchen, noch einmal eine gütliche Beilegung durch eine wirkliche Anmeldung bei der philosophischen Facultät anzubieten. Der vom 10. November datirte, am 12. eingereichte Brief des Ramus (IV, 91 a) ist offenbar mit zu genauer Abwägung jedes Wortes geschrieben, als dass wir uns nicht veranlasst sähen, ihn im Originaltext wiederzugeben. Er lautet: *P. Ramus testificatur spectabili Decano Facultatis artium Heidelbergensis Academiae sibi ab illustrissimi principis excellentia mandatum esse ut interna dum bellorum in Gallia civilium tempestas pacaretur professione aliqua juventuti communicaret earum artium fructum, in quibus adhuc versatus esset: seque mandato illustrissimi principis acquievisse, libentissimeque se Academiae gratificaturum recepit, omniaque ipsius causa facturum, quae e re studiosae juventutis esse cognoverit.* Man kann sich des Lächelns kaum erwehren, wenn man in dem Sitzungsprotocolle der philosophischen Facultät vom 12. November den jetzt erfolgten kindischen Beschluss liest: *hanc rem esse dissimulandam*, sowie die Ernennung des Xylander zum ausserordentlichen Lehrer der Ethik. Dem Senate gegenüber liess man indessen die hier freilich unnöthige Maske zum Theile fallen und erklärte in ausführlichem Schreiben (IV, 91 b — 92 b), dass man den Antiaristoteliker nicht könne aufkommen lassen ohne künftigen Zank und Aergerniss herbeizuführen.

Dieselben Gründe setzte der Senat endlich am 16. November dem Kurfürsten auseinander (IX, 92b). Wie könne man einem Gegner des Aristoteles Erlaubniss geben, da zu lehren, wo bei den Promotionen die Verpflichtung auferlegt werde „des Aristoteles Lehr, so viel an jenem, zu propagiren“. Noch stehe der Streit der Realisten und der Nominalisten in zu traurig frischem Andenken, als dass man wieder solche Händel hervorrufen möchte, wie sie bei einem Manne, der schon von Paris her den Ruf der Uneinigkeit mit sich bringe, nicht anders zu vermuthen seien. Am Schlusse des Briefes ist dann freilich die eventuelle Nachgiebigkeit in den Wunsch des Fürsten zugesagt, aber mit entschiedener Abwälzung der Verantwortlichkeit für die Folgen.

Fast einen Monat scheinen die stillen Unterhandlungen noch fortgedauert zu haben, von welchen allerdings nur der negative Beweis existirt, dass nichts Officielles geschah. Erst Samstag 11. December kam Ramus in Begleitung des Rathes Zuleger zu Witekind, um einen Brief des Kurfürsten (IX, 99a) zu überbringen. Man habe auch in dem letzten Punkte dem Willen des Senates nachgegeben, dass Ramus nicht über den Aristoteles, sondern über Cicero's Rede *pro Marcello* lesen werde. Diese Vorlesung solle Dienstag um 12 Uhr in dem philosophischen Auditorium beginnen, welches um diese Zeit frei sei, und Montag solle Ramus die vorläufige Ankündigung anschlagen. Noch am Montag in aller Frühe erging ein Protest von Seiten des Senates. Pithopaeus sei schon Professor der lateinischen Litteratur und Beredtsamkeit, und somit seien auch diese Vorlesungen des Ramus unstatthaft. Dienstag um 10 Uhr wurde der Rector nebst den vier Decanen beim Kurfürsten vorgelassen und durften ihre Sache persönlich vertheidigen. Als aber der Rector von Praktiken sprach (IX, 102a), die Ramus angewandt habe, fuhr Friedrich III. aus der so lange bewahrten Ruhe auf, nahm den Angegriffenen erzürnt in Schutz und entliess die Deputation ohne weitere Antwort. In der That eröffnete Ramus seine Vorlesung Mittwoch 14. December unter grossem Tumulte. Schon vor dem Auditorium begann derselbe zwischen den deutschen Studenten, welche über Verletzung der Universitätsrechte klagten, und den Franzosen, welche unter der Leitung eines Alexander Campagonolla sich auf den Kurfürsten als alleinigen Richter beriefen. Bei der Vorlesung setzte der Lärm mit Stampfen und Pfeifen sich weiter fort. Energisch verlangte Pfalzgraf Christoph, der zugegen war, die Bestrafung der Schuldigen, und man erhält eine eigenthümliche Anschauung von der Gerechtigkeit des Senates, wenn man als Resultat der Untersuchung nur die Relegation des Campagonolla am 17. December, zugleich mit einer Versöhnungsdeputation an den Kurfürsten beschlossen findet.

Inzwischen vollendete Ramus wohl ohne weitere Störung die Erklärung der *oratio pro Marcello* und kündigte als neues Thema seine Dialectik an, welche er am 3. Januar 1570 beginnen wollte. Damit handelte er frei-

lich seinem Versprechen, nicht über Aristoteles lesen zu wollen, entgegen, indem seine Dialectik nur in einer Widerlegung jenes Autors bestand, und der Senat ergriff diese willkommene Gelegenheit, nochmals den Versuch zu machen, den ihm lästigen Eindringling wieder zu entfernen. In neuem ausführlichem Schreiben (IX, 102b flgg.) wurde der Sachverhalt in anständiger Sprache ziemlich unverhüllt vorgetragen. Es sei die Streitfrage die, ob Ramus ob Aristoteles aus den Schulen zu lassen, wenn man nicht die unangenehme Eventualität bestehen lassen wolle, dass „was *professor organi Aristotelici* oder *Dialectices ordinarius* morgens umb 6 Uhr gelehrt, balde dernach von einem Andern widerfahren, und was von jenem erpaut, von diesem wird solch eingerissen werden“. Deshalb gehe die Bitte der Universität dahin, man möge dem Ramus aufgeben in Erfüllung seiner früheren Zusage nur über Cicero's Reden und ähnliche Gegenstände vorzutragen. Dieses gegen die frühere Widerspenstigkeit sehr mässige und auch wohl billige Verlangen überbrachte der Rector nebst den vier Decanen am 3. Januar um 8 Uhr dem Fürsten, welcher indessen schon Rathssitzung hielt. Die Deputation wurde in das Sitzungszimmer eingelassen, und im Gegensatze zu jener früheren Audienz wurde die Rede des Rectors huldvoll (*perbenigne*) aufgenommen, worin er urgirte, wie es sich hier um einen wissenschaftlichen Streit handle und man als Autoritäten darüber wohl einen Adr. Turnebius, einen Phil. Melanchthon, nicht aber Leute hören müsse, die Nichts von der Sache verstünden und nur zu hetzen wüssten. Die Deputation musste auf Antwort warten, während Friedrich III. sich zurückzog und alsbald herauswissen liess: er habe vorläufig dem Ramus den Befehl zugeschickt, heute nicht zu lesen, vielleicht auch künftig nicht (IX, 106a).

Dieses ist das Letzte*), welches wir in den Acten gefunden, wenn wir ein Schreiben des Pfalzgrafen Christoph um Rücknahme der Relegation des Campagonolla ausnehmen, worein der Senat bedingungsweise willigte**). Aus einem von Waddington publicirten Briefe des Ramus an Theodor Zwinger in Basel geht indessen hervor, dass er in der That nicht wieder lesen durfte und im Monate März Heidelberg verliess. Interessant müssten noch für das Ende dieses Streites die Sitzungsprotocolle der philosophischen Facultät vom Jahre 1570 sein, wenn dieselben nicht eigenthümlicher Weise fehlten. Die Blätter 93 und 94 sind nämlich, wie an der Paginirung und auch sonst noch deutlich zu sehen, aus dem Protocollbuche IV. ausgeschnitten, und die Rückseite des Fol. 92, wo diese Protocolle beginnen müssten, ist weiss (nach dem Urtheile verschiedener Personen, die das Pergament sahen: gewaschen).

So die actenmässige Darstellung eines Streites, welcher von beiden

*) Waddington führt noch aus den Acten die Nachricht von der Abreise des Ramus an. Ich konnte sie nicht finden.

**) Vergl. IX, 106a. Zuerst wird die Straferlassung verweigert. Am Schlusse heisst es aber: *Si princeps denuo instet, respondendum esse aliter Campagonollae poenam impositam remitti non posse; nisi se poenae mitiori hoc est carceri subjiciat et submittat.*

Seiten nicht immer in zu billigender Weise geführt wurde, bei welchem indessen, wenn man ein unparteiisches Urtheil fällen soll, Ramus zu Anfange wenigstens im entschiedensten Rechte war. Erst ganz zuletzt vergab er sich von diesem Rechte, und von diesem Augenblicke an verlor er den Schutz Friedrichs III., dessen Regententugenden gerade in diesen Zwistigkeiten in einem glänzenden Lichte erscheinen.

IX.

Dynamische Untersuchungen über den Stoss der Körper.

Von POINSOT.

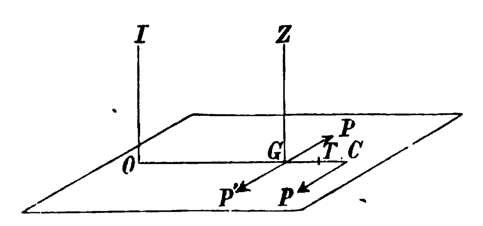
(Liouville, Journal de mathématiques. Septembre 1857.*)*

Erstes Capitel.

Theorie des Stossmittelpunktes, des freiwilligen Drehungsmittelpunktes, sowie einiger neuen Punkte, denen bei der Bewegung der Körper bemerkenswerthe Eigenschaften zukommen.

I. Vom Mittelpunkt des Stosses.

1) Ein freier Körper von beliebiger Gestalt erhalte durch die Wirkung einer einzigen Kraft P, deren Richtung einen beliebigen Abstand vom Schwerpunkt G dieses Körpers besitzt, einen Impuls. Wird in diesem Falle vom Schwerpunkte eine Senkrechte GC auf die Richtung jener Kraft gefällt, so soll der Fusspunkt C dieser Senkrechten, in welchem man P unmittelbar angreifend annehmen kann, Mittelpunkt des Stosses genannt werden.



2) Ueberlässt man den Körper, nachdem er diesen Anstoss erhalten, sich selbst, und untersucht nachher in einem beliebigen Augenblicke seiner Bewegung die besondern Kräfte, denen die einzelnen Molecüle gehorchen, so müssen sich diese Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen lassen, welche mit dem ursprünglichen Impuls P vollkommen übereinstimmt. Es folgt dies aus dem Princip der Erhaltung der Kräfte und der Momente. Während der ganzen Bewegung findet man also immer in gleichem Abstande vom Schwerpunkte G einen Stossmittelpunkt C, d. h. einen Punkt, von welchem aus eine einzige Kraft dem ruhend gedachten Körper seine ganze gegenwärtige Bewegung zu ertheilen im Stande wäre. Es ist daher auch

immer ein Punkt vorhanden, in welchem die Bewegung wieder völlig aufgehoben werden kann, wenn man daselbst entweder eine dem ursprünglichen Antriebe gleiche und entgegengesetzte Kraft anlegt, oder dem bewegten Körper ein festes Hinderniss entgegenstellt.

3) Wenn nach dem Vorhergehenden ein Körper, dessen Bewegung von einem einzigen Anstoss herrührt, für die ganze Dauer dieser Bewegung einen Stossmittelpunkt in sich bewahrt, so kann man doch nicht umgekehrt schliessen, dass in jedem bewegten Körper ein solcher Punkt vorhanden sei. Die Bewegung kann nämlich durch Kräfte entstanden sein, welche sich nicht zu einer einzigen zusammensetzen lassen; in diesem Falle konnte auch die gegenwärtige Bewegung des Körpers nicht durch eine einzige Kraft hervorgebracht werden, und es ist folglich kein Mittelpunkt des Stosses vorhanden. Die Bewegung eines Körpers unter der Wirkung beliebiger Kräfte wird einer besonderen Untersuchung vorbehalten; hier soll zunächst nur der besondere Fall in Betracht gezogen werden, wo die Bewegung von einem einzigen Impuls P herrührt. Ausserdem wird noch vorausgesetzt, dass die Richtung des Stosses in eine den Schwerpunkt G des Körpers enthaltende Ebene falle, die normal zu einer der drei Hauptachsen GZ gelegen ist.*)

4) Wir bezeichnen mit M die Masse des Körpers und mit MK^2 sein Trägheitsmoment, d. h. die Summe der Producte aller Massentheilchen in die Quadrate ihrer respectiven Abstände von der in Betracht gezogenen Achse GZ. Die Linie K ist demnach die Seite des mittleren Quadrates zwischen den Quadraten der Entfernungen aller gleichen Theile des Körpers von der in Rede stehenden Hauptachse, also, sobald die Gestalt des Körpers bestimmt ist, eine gegebene constante Grösse. — Mit h werde ferner der Abstand CG des Stossmittelpunktes C vom Schwerpunkte G bezeichnet, und es soll nun die vom Antriebe P herrührende Bewegung näher untersucht werden.

II. Vom freiwilligen Drehungsmittelpunkt.

5) Man kann die in C angreifende Kraft durch eine gleiche, parallel und in demselben Sinne wirkende P' am Punkte G ersetzen, mit Hilfe eines am Hebelsarme $CG = h$ angreifenden Kräftepaares $(P, -P)$; dieses Paar besitzt also das Moment Ph. Die im Schwerpunkte G wirksame Kraft $P' = P$ ertheilt nun allen Theilchen des Körpers eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit $v = \frac{P}{M}$**); das Kräftepaar vom Momente Ph erzeugt eine

*) Mit anderen Worten: Die Richtung des Stosses fällt in die Ebene zweier Hauptachsen des Körpers. Anm. des Uebers.

**) Die Intensität des von P herrührenden Antriebes ist nämlich durch die dem anfänglich ruhend gedachten Körper mitgetheilte Quantität der Bewegung gemessen. Anm. des Uebers.

Drehung um die Hauptachse GZ mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = \frac{Ph}{MK^2}$. In Folge dieser doppelten Bewegung besitzt ein Punkt O, den wir in der Verlängerung der Linie CG auf der dem Stossmittelpunkte entgegengesetzten Seite im Abstande $OG = a$ annehmen, zwei Geschwindigkeiten von entgegengesetzter Richtung, nämlich $v = \frac{P}{M}$ und $a\vartheta = \frac{aPh}{MK^2}$. Soll daher auf der Verlängerung von CG ein Punkt O gesucht werden, für welchen diese beiden Bewegungen sich aufheben, so hat man nur

$$\frac{P}{M} = \frac{aPh}{MK^2}$$

zu setzen, und erhält hieraus

$$ah = K^2,$$

findet also

$$a = \frac{K^2}{h}$$

für die Entfernung dieses Punktes O vom Schwerpunkte G.

6) Es giebt also immer auf der den Stossmittelpunkt mit dem Schwerpunkte verbindenden Geraden, und zwar auf der Verlängerung über letztern Punkt hinaus einen Punkt O, der für den ersten Augenblick der Bewegung in Ruhe bleibt oder durch den in C wirksamen Stoss keine Bewegung erlangt. Ein Gleiches gilt von allen Punkten des Körpers, welche auf der durch den Punkt O parallel zur Hauptachse GZ gezogenen Geraden OJ liegen. Die ganze Bewegung des Körpers kommt also für jeden Augenblick auf einfache Drehung um diese Gerade OJ hinaus, gleich als wenn dieselbe eine feste Achse wäre. Man hat ihr den Namen **freiwillige Drehungsachse** gegeben, weil es eine Achse ist, welche der Körper im ersten Augenblicke gleichsam von selbst annimmt. Hier kommt von dieser freiwilligen Achse nur der Punkt O in Frage, welcher mit dem Schwerpunkt und dem Stossmittelpunkt in gerade Linie fällt; wir geben ihm den Namen: **freiwilliger Drehungsmittelpunkt.**

7) Der Punkt des Körpers, welcher momentan den freiwilligen Drehungsmittelpunkt bildet, hat also eine Geschwindigkeit gleich Null und der Körper dreht sich um diesen Punkt in dem in Rede stehenden Augenblicke. Da nun der Schwerpunkt eine Geschwindigkeit gleich $a\vartheta$ besitzt und a der gegenseitige Abstand der Punkte G und O ist, so folgt, dass dem Körper in Beziehung auf den freiwilligen Drehungsmittelpunkt dieselbe Winkelgeschwindigkeit zukommt, die er während seiner fortschreitenden Bewegung im Raume in Beziehung auf den Schwerpunkt hat. Ein beliebiger in der Entfernung y vom freiwilligen Drehungsmittelpunkte angenommener Punkt besitzt also die Geschwindigkeit $y\vartheta$; so ist z. B. für den Stossmittelpunkt C, der sich im Abstande $a + h = l$ befindet, die Geschwindigkeit gleich $l\vartheta$.

Man hat wohl zu bemerken, dass der freiwillige Drehungsmittelpunkt O nicht wie der Schwerpunkt G ein bestimmter Punkt im Innern des Körpers ist; er wechselt vielmehr von einem Augenblicke zum andern, oder, besser gesagt, in jedem Augenblicke wird ein neuer Punkt zum Drehungsmittelpunkte, sowie auch ein neuer zum Stossmittelpunkte wird. Da sich nämlich C und O immer mit G auf einer Normalen zur Bahn des Schwerpunktes befinden müssen, und zwar in den respectiven Abständen h und a von diesem Schwerpunkte, so beschreiben sie während der Bewegung des Körpers zwei Kreisperipherieen mit den Halbmessern h und a um den Schwerpunkt, oder vielmehr: die verschiedenen Punkte dieser beiden Kreisumfänge treten successiv in die Stelle des Stossmittelpunktes und des freiwilligen Drehungsmittelpunktes ein.

Zusätze.

8) Aus der Gleichung

$$ah = K^2,$$

durch welche der Abstand des Punktes O vom Schwerpunkte bestimmt wurde, folgt, dass die Lage des freiwilligen Drehungsmittelpunktes weder von der Masse M des Körpers, noch von der Grösse P des in C wirksamen Antriebes, sondern einzig von der Entfernung h des letzteren Punktes vom Schwerpunkte G abhängt. Da ferner das Product ah constant ist, so zeigt sich, dass, wenn h abnimmt, a in demselben Verhältnisse wachsen muss; je näher also der Stossmittelpunkt an den Schwerpunkt rückt, desto mehr entfernt sich der freiwillige Drehungsmittelpunkt nach der andern Seite, und umgekehrt.

9) Setzt man $h = 0$, so ergiebt sich $a = \infty$. Man könnte hiernach sagen, dass, wenn der Stossmittelpunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, der freiwillige Mittelpunkt sich in unendlicher Entfernung befindet; im eigentlichen Sinne des Wortes ist aber ein Drehungsmittelpunkt gar nicht mehr vorhanden. Da nämlich in diesem besondern Falle der Stoss im Schwerpunkte selbst angreift, so erlangt der Körper nur eine fortschreitende Bewegung im Raume.

10) Wird $h = \infty$ gesetzt, so findet man $a = 0$, d. h. der freiwillige Mittelpunkt fällt alsdann in den Schwerpunkt. In diesem Falle ist aber eigentlich kein Stossmittelpunkt vorhanden. Wenn sich nämlich der Körper um seinen Schwerpunkt dreht, während dieser im Raume in Ruhe verharrt, so muss der Impuls P, von welchem die Bewegung herrührt, mag man ihn angreifend annehmen, wo man auch will, gleich Null sein, weil ausserdem der Schwerpunkt die endliche Geschwindigkeit $\frac{P}{M}$ besitzen müsste. Es giebt daher keinen einfachen endlichen Stoss P, welcher ein Zusammenfallen des freiwilligen Mittelpunktes mit dem Schwerpunkte bewirken könnte. Man kann deshalb nur sagen, dass, wenn sich der Stossmittelpunkt ohne Ende vom Schwerpunkte G entfernt, der freiwillige Mittel-

punkt O sich dem letzten Punkte unendlich nähert; nie aber können diese beiden Punkte in der Dynamik mit einander verschmelzen, da der eine G die endliche Geschwindigkeit $\frac{P}{M}$ besitzt, während der andere O seiner Natur nach eine Geschwindigkeit gleich Null haben muss.

Nur auf eine einzige Weise könnte man sich vorstellen, dass der freiwillige Mittelpunkt in Strenge mit dem Schwerpunkte zusammenfiele, wenn man nämlich annehmen wollte, dass $P=0$, $h=\infty$ und das Product oder Moment Ph gleich einer endlichen Grösse wäre. In dieser rein mathematischen Hypothese würde sich der Körper in Folge des endlichen Momentes Ph um den Schwerpunkt drehen, während dieser Punkt selbst in Ruhe bleiben müsste, da $P=0$. Nur kann man mit einem Stosse gleich Null, der in unendlicher Entfernung angreift, keinen bestimmten Begriff verbinden; man sieht dabei weder einen Stoss, noch einen Stossmittelpunkt. Dieser besondere Fall bedarf daher auch einer besondern Untersuchung. Nun ist aber bekannt, dass, wenn der Körper um seinen Schwerpunkt rotirt, diese Bewegung nicht von einer einfachen Kraft, sondern von einem Kräftepaar herkommt. Man hat also in diesem Falle nicht mit einem Stosse gleich Null, sondern mit einem Impuls von ganz anderer Natur zu thun, bei welchem es weder einen Mittelpunkt, noch selbst einen bestimmten Hebelsarm giebt, da es sich um ein Kräftepaar handelt und dieses Paar nach Belieben mit einer unendlichen Menge anderer von gleicher Wirkung vertauscht werden kann.

III. Wechselseitigkeit des Stossmittelpunktes und des freiwilligen Drehungsmittelpunktes.

11) Aus derselben Gleichung

$$ah=K^2,$$

welche die Entfernungen h und a des Stossmittelpunktes und des freiwilligen Drehungsmittelpunktes vom Schwerpunkte an einander bindet, erhellt, dass jene beiden Mittelpunkte gewissermaassen wechselseitig sind; d. h. würde der Körper in O angestossen, so dass dieser Punkt an die Stelle des Stossmittelpunktes träte, so müsste die Rotation um C als freiwilligen Mittelpunkt vor sich gehen.

12) Wird der gegenseitige Abstand $a+h$ der beiden Mittelpunkte mit l bezeichnet, so folgt noch aus $ah=K^2$, dass ohne Unterschied

$$l=a+\frac{K^2}{a} \quad \text{und} \quad l=h+\frac{K^2}{h}$$

gesetzt werden kann.

13) Der Abstand l zweier wechselseitigen Mittelpunkte kann grösser als jede gegebene Linie, aber nie gleich Null werden. Der kleinste Werth, den er annehmen kann, ist die Länge $2K$. Sucht man nämlich den Werth von a, welcher dem Minimum von l entspricht, so findet man $a=K$; folg-

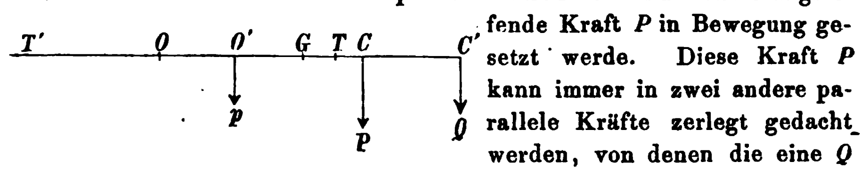
lich ist auch $h = K$, und man erhält hieraus $2K$ für die Entfernung derjenigen beiden wechselseitigen Mittelpunkte, welche in einem gegebenen Körper einander am nächsten liegen.

IV. Vom Punkte des stärksten Stosses.

14) Aus dem Resultate der vorhergehenden Betrachtungen erhellt durch Umkehrung, dass, wenn der Körper momentan um einen im Abstand a vom Schwerpunkte G gelegenen Punkt O rotirt, sich die ganze Bewegung auf die Wirkung einer einzigen Kraft zurückführen lässt, welche in C, im Abstande $l = a + \frac{K^2}{a}$ vom Drehungsmittelpunkte O angreifen müsste. Die besonderen Kräfte, denen in diesem Augenblicke die verschiedenen Molecüle des Körpers gehorchen, müssen sich folglich zu einer einzigen zusammensetzen lassen, welche in einer zur Linie OG senkrechten Richtung durch den Punkt C geht. Es würde demnach die ganze Bewegung vernichtet werden, wenn man in C eine gleiche entgegengesetzte Kraft anlegte oder dem Körper ein festes Hinderniss entgegenstellte.

Hiernach könnte es scheinen, als wenn dieser Punkt C derjenige sein müsse, in welchem der um O rotirende Körper den stärksten Stoss gegen ein entgegenstehendes Hinderniss oder einen festen Punkt ausüben würde; wir werden aber sehen, dass diese Eigenschaft einem neuen, zwischen dem Schwerpunkte und dem gewöhnlichen Stossmittelpunkte gelegenen Punkte T zukommt. Um dessen Lage zu ermitteln, suchen wir zuerst den Stoss, welchen der rotirende Körper auf einen im beliebigen Abstande x vom Schwerpunkt G gelegenen Punkt C' ausübt; es wird sich dann zeigen, für welchen Werth von x er ein Maximum wird.*)

15) Im Augenblicke des Stosses kann man den Körper so ansehen, als wenn er sich in Ruhe befinde und plötzlich durch die im Punkte C angreifende Kraft P in Bewegung gesetzt werde. Diese Kraft P kann immer in zwei andere parallele Kräfte zerlegt gedacht werden, von denen die eine Q



den Angriffspunkt C' hat, während die andere p in dem mit C' wechselseitigen Punkte O' angreift, d. h. in dem Punkte, welcher freiwilliger Mittelpunkt wird, wenn wir C' als Stossmittelpunkt auffassen. Da der Punkt C' im Abstande x von G liegt, so befindet sich O' auf der andern

*) Der letzte Theil dieser Nummer ist hier nur im Auszuge gegeben. Das Original enthält noch Bemerkungen über den Namen, welcher dem Punkte T im Französischen gegeben werden könne, sowie einen hauptsächlich gegen französische Schriftsteller gerichteten Excurs über eine falsche Auffassung des Stossmittelpunkts, Beides für den deutschen Leser von geringerm Interesse.

Anm. des Uebers.

Seite in der Entfernung $\frac{K^2}{x}$. Der gegenseitige Abstand der beiden Componenten Q und p ist folglich $x+\frac{K^2}{x}$, der von P und p ist $h+\frac{K^2}{x}$. Nach der Theorie der Parallelkräfte erhält man hieraus für die in C' angreifende Componente

$$Q=P.\frac{K^2+hx}{K^2+x^2},$$

sowie für die in O' angreifende

$$p=P.\frac{x^2-hx}{K^2+x^2}.$$

Von diesen beiden Componenten kann die in O' wirkende p keinen Stoss auf den festen Punkt C' hervorbringen, weil C' der zu O' gehörige freiwillige Mittelpunkt ist. Es bleibt daher für den Stoss gegen das Hinderniss C' nur die Componente Q, welche direct auf diesen Punkt gerichtet ist. Hieraus folgt, dass der Stoss, welchen der Körper gegen den im Abstande x von seinem Schwerpunkte G gelegenen festen Punkt C' ausübt, vollständig durch den Ausdruck

$$Q=P.\frac{K^2+hx}{K^2+x^2}$$

dargestellt wird, wobei P den Impuls, von welchem der Körper in Bewegung gesetzt wurde, und h den Abstand CG der Richtung dieses Impulses vom Schwerpunkte des Körpers bezeichnet.

16) Beiläufig kann bemerkt werden, dass, wenn man

$$x=\frac{-K^2}{h}=-a$$

setzt, d. h. wenn man das Hinderniss C' im freiwilligen Mittelpunkt O anbringt, sich, wie es sein muss, $Q=0$ ergiebt.

17) Wird $x=0$ gesetzt, d. h. stellt man das Hinderniss direct dem Schwerpunkte entgegen, so wird der Stoss Q gleich der Kraft P selbst. Nimmt man ferner $x=h$ an, in welchem Falle das Hinderniss dem Punkt C entgegentritt, so ist der Stoss wieder gleich P. Der Körper stösst hiernach im Stossmittelpunkte mit nicht grösserer Stärke als im Schwerpunkte. Der einzige Unterschied ist vorhanden, dass, wenn der Stoss vom Stossmittelpunkte ausgeht, die ganze Bewegung vernichtet wird, während der Körper, sobald er mit dem Schwerpunkte stösst, nur seine fortschreitende Bewegung verliert, dagegen auch nach dem Stosse die Rotationsgeschwindigkeit ϑ um diesen Punkt bewahrt.

18) Ist x negativ und, absolut genommen, grösser als $\frac{K^2}{h}$ oder a, in welchem Falle das Hinderniss C', vom Schwerpunkte aus gerechnet, über den freiwilligen Mittelpunkt O hinaus angebracht sein muss, so wird auch der Stoss Q negativ, d. h. er wirkt in einem der Kraft P entgegengesetzten

Sinne. Der feste Punkt C' muss alsdann, um einen Stoss zu erleiden, auf der der fortschreitenden Bewegung im Raume entgegengesetzten Seite gelegen sein. — Hier handelt es sich jedoch darum, zu untersuchen, in welchem Abstande x sich der Punkt T befindet, für welchen der Stoss ein Maximum wird.

19) Um diesen bemerkenswerthen Punkt zu ermitteln, hat man den vorhergehenden Ausdruck $P \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + x^2}$ zu differentiiren, indem man darin x als einzige Variabele betrachtet, und das Resultat gleich Null zu setzen. Man erhält dann die Gleichung zweiten Grades

$$hx^2 + 2K^2x - hK^2 = 0,$$

oder, da $\frac{K^2}{h} = a$,

$$x^2 + 2ax - K^2 = 0.$$

Hieraus folgt

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + K^2}$$

für den gesuchten Abstand des Punktes T vom Schwerpunkte G. — Soll die Entfernung λ dieses Punktes T vom freiwilligen Mittelpunkte O bestimmt werden, so findet man, da dieselbe gleich $x + a$ ist, aus der nämlichen Gleichung:

$$\lambda = \sqrt{K^2 + a^2} = \sqrt{al}.$$

Dies giebt den Lehrsatz:

„Der Abstand λ des Angriffspunktes für den Maximalstoss vom freiwilligen Drehungsmittelpunkte O des Körpers ist das geometrische Mittel zwischen den Abständen des Schwerpunktes und des gewöhnlichen Stossmittelpunktes von demselben Punkt O.“

20) Man kann übrigens diesem Lehrsatze noch eine andere Form geben. Da nämlich MK^2 das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Hauptachse GZ (s. Figur zu Nr. 1) und a die Entfernung des Schwerpunktes G von O bezeichnet, so ist nach einem bekannten Satze $M(K^2 + a^2)$ das Trägheitsmoment für die durch den freiwilligen Mittelpunkt O gehende parallele Achse OJ. Demnach stellt $K^2 + a^2$ das Mittel aus den Quadraten der Abstände aller Molecüle des Körpers von der Achse OJ dar. Mit Rücksicht auf den vorhergehenden Ausdruck

$$\lambda = \sqrt{K^2 + a^2}$$

kann man daher sagen: „wenn ein Körper in einem gegebenen Augenblicke um eine freiwillige Achse rotirt, so befindet sich der Punkt des stärksten Stosses in einer Entfernung von ihr, welche der Seite des mittleren Quadrates zwischen den Quadraten der Abstände aller Molecüle des Körpers von dieser Achse gleich ist,“ oder auch: „jene Entfernung ist gleich dem Trägheitsarme des Körpers für die in Rede stehende Achse.“

21) Aus dem doppelten Vorzeichen $\pm$, womit die Grösse λ behaftet ist, erhellt, dass es zwei Punkte der bewussten Art giebt, einen zur Rechten,

den andern zur Linken von O, und zwar beide in gleichem Abstande von diesem freiwilligen Mittelpunkte. Der erste T fällt zwischen den Schwerpunkt und Stossmittelpunkt, der zweite T' liegt auf der andern Seite über den Punkt O hinaus. Sie entsprechen beide einem Maximum des Stosses, aber in entgegengesetztem Sinne. Der erste T ist der Angriffspunkt eines Maximalstosses, welcher mit dem ursprünglichen Impuls P nach derselben Seite wirkt und eine grössere Intensität besitzt als dieser; der zweite T' gehört zu einem Maximum des Stosses von entgegengesetztem Sinne und kleiner als P.

Es giebt also einen Punkt T, mit welchem der Körper nach der Richtung seiner Bewegung, nicht allein stärker als im Stossmittelpunkte selbst, sondern auch stärker als in jedem andern Punkte stösst; ferner giebt es einen zweiten Punkt T', mit welchem der Körper gleichfalls einen möglichst starken Stoss ausübt, der aber der Richtung seiner fortschreitenden Bewegung im Raume entgegengesetzt ist. Diese beiden Punkte T und T' sind übrigens, wie man leicht ersieht, wechselseitige Punkte. Die Gleichung

$$x^2 + 2ax - K^2 = 0,$$

durch welche ihre Entfernungen vom Schwerpunkte G bestimmt werden, zeigt nämlich, dass das Product dieser Entfernungen dem letzten Gliede $-K^2$ gleich ist. Wird daher einer dieser Punkte als gewöhnlicher Stossmittelpunkt betrachtet, so ist der andere der zugehörige freiwillige Drehungsmittelpunkt.

Zusätze.

22) Wird in den vorhergehenden Ausdrücken $h = 0$ gesetzt, so hat man den besondern Fall, wo die Bewegung von einem Impuls P herrührt, dessen Richtung durch den Schwerpunkt hindurchging. Der Stoss Q, dessen der Körper im Abstande x vom Schwerpunkte fähig ist, wird dann durch

$$Q = P \cdot \frac{K^2}{K^2 + x^2}$$

ausgedrückt, und der Punkt T, wo dieser Stoss ein Maximum wird, liegt im Abstande $x = 0$, d. i. im Schwerpunkte selbst. Hat also der Körper nur eine fortschreitende Bewegung im Raume, so giebt es einen einzigen Stossmittelpunkt, und zwar fällt derselbe mit dem Schwerpunkt zusammen; was übrigens leicht vorherzusehen war.

23) Nimmt man $a = 0$ an, so findet sich

$$x = \pm K.$$

Es ist dies der besondere Fall, wo der erste Impuls von einem Kräftepaar ausging, der Körper also nur eine einfache Rotationsbewegung um eine seiner Hauptachsen besitzt. Da in diesem Falle der Drehungsmittelpunkt und der Schwerpunkt einen einzigen Punkt ausmachen, so ist der Angriffspunkt des Maximalstosses nicht wie vorher ein bestimmter Punkt; er befindet sich nur in einem bestimmten Abstande K vom Schwerpunkte und kann

daher beliebig auf der Peripherie eines mit dem Radius K um diesen Punkt beschriebenen Kreises angenommen werden.

Wollte man übrigens diesen besonderen Fall direct untersuchen, so sei N das Moment des Paares, von welchem die Bewegung des Körpers um die Hauptachse GZ herrührt. Wir vertauschen dieses Paar mit einem anderen äquivalenten $(Q, -Q)$, welches am Hebelsarme $x+\frac{K^2}{x}$ oder an der Verbindungsgeraden der wechselseitigen Punkte C' und O' angreift (vergl. Figur zu Nr. 15). Man erhält dann für die Kraft Q, mit welcher der Körper in C', in einem Abstande x vom Schwerpunkte G stösst,

$$Q = N \cdot \frac{x}{K^2+x^2},$$

und für das Maximum von Q

$$x = \pm K,$$

wie bereits oben gefunden wurde. Rotirt also ein freier Körper, dessen Trägheitsmoment in Beziehung auf eine seiner drei Hauptsachen mit MK^2 bezeichnet ist, um diese Achse, so liegen diejenigen Punkte, in welchen dieser Körper gegen ein entgegenstehendes Hinderniss oder einen festen Punkt den stärksten Stoss ausübt, in einem Abstande K vom Schwerpunkte, und zwar in der Ebene der beiden andern Hauptachsen.

24) Hat man z. B. mit einem geraden und homogenen prismatischen Stabe von der Länge $2L$ zu thun, so ist bekanntlich für eine durch den Schwerpunkt senkrecht zur Länge gelegte Achse

$$K = \frac{L}{\sqrt{3}}.\text{*)}$$

Rotirt also der Stab um diese Achse, so liegt der Punkt, in welchem er am heftigsten stösst, im Abstande $\frac{L}{\sqrt{3}}$ von seinem Schwerpunkte. — Für eine homogene Kugel vom Radius R ist ferner

$$K = R\sqrt{\tfrac{2}{5}};$$

in dieser Entfernung vom Mittelpunkte giebt also die Kugel den stärksten Stoss. U. s. w.

25) Rotirt der Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit ϑ um seinen Schwerpunkt, so wird das Kräftepaar, von welchem die Bewegung ausgeht, durch den Ausdruck $MK^2\vartheta$ gemessen; der Körper giebt daher in einem Abstande x von seiner Drehachse einen Stoss $Q = MK^2\vartheta \cdot \frac{x}{K^2+x^2}$. Da nun der Maximalstoss im Abstande $x = K$ stattfindet, so hat er zum Maasse die Bewegungsquantität $\frac{1}{2}M . K\vartheta$, also dieselbe Grösse, als wenn die Hälfte der Masse M im stossenden Punkte concentrirt wäre. Ein im Abstande

*) Es bedarf wohl nicht der Erinnerung, dass dieses Resultat nur bei Vernachlässigung der Querschnittsdimensionen richtig ist.

Anm. d. Uebers.

$x = -K$ auf der andern Seite des Schwerpunktes gelegener Punkt ist ebenfalls im Stande, einen Stoss von der Grösse auszuüben, als wenn sich in ihm die andere Hälfte der Masse befinde, nur in entgegengesetztem Sinne. Diese beiden Punkte theilen also bei der Bewegung des Körpers gewissermaassen seine Masse zu gleichen Theilen unter sich. Im folgenden Artikel soll bewiesen werden, dass dies nur einen besonderen Fall einer allgemeinen, den wechselseitigen Mittelpunkten eines Körpers zukommenden Eigenschaft bildet.*)

V. Neue Eigenschaften zweier beliebigen wechselseitigen Mittelpunkte eines Körpers.

26) Oben (Nr. 15) ist gezeigt worden, dass, wenn die Bewegung des Körpers von einem im Abstande h von seinem Schwerpunkte G angreifenden Impuls P herrührt, in dem beliebigen Punkte C' im Abstande x vom Schwerpunkte ein Stoss Q von der Grösse

$$Q = P \cdot \frac{hx + K^2}{x^2 + K^2}$$

ausgeübt wird; ferner war der Stoss in dem zu C' wechselseitigen Punkte O'

$$p = P \cdot \frac{x^2 - hx}{x^2 + K^2}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken statt h seinen Werth $\frac{K^2}{a}$ und für P seinen Werth $Ma\vartheta$, so erhält man

$$Q = (a + x)\vartheta \cdot M \frac{K^2}{x^2 + K^2},$$

$$p = \left(a - \frac{K^2}{x}\right)\vartheta \cdot M \frac{x^2}{x^2 + K^2}.$$

Nun ist $a + x$ der Abstand des Punktes C' vom freiwilligen Drehungsmittelpunkte des Körpers, folglich $(a + x)\vartheta$ die Geschwindigkeit des Punktes C', und es wird der Stoss Q desselben Punktes durch das Product aus seiner Geschwindigkeit und der Masse $m = M \cdot \frac{K^2}{x^2 + K^2}$ gemessen. Hieraus folgt, dass der Stoss in C' derselbe ist, als wenn daselbst der Theil m der Masse M zusammengedrängt wäre. Ebenso bezeichnet im zweiten Ausdrucke der Factor $\left(a - \frac{K^2}{x}\right)\vartheta$ die Geschwindigkeit des Punktes O'; dieser Punkt stösst also ebenso, als wenn er mit einer Masse $n = M \cdot \frac{x^2}{x^2 + K^2}$ belastet wäre, oder mit derselben Stärke, als wenn sich dieser andere Theil der Masse M daselbst concentrirt befände. Was aber die Grössen dieser beiden Theile m und n betrifft, so ist klar, dass ihre Summe $m + n$ die ganze Masse M des Körpers ausmacht und dass sie zu einander in dem Verhältnisse $K^2 : x^2$

*) Der Inhalt dieser Nummer ist hier etwas abgekürzt; das Original enthält noch einige gegen ältere Stosstheorien gerichtete Bemerkungen. Anm. d. Uebers.

oder auch $\frac{K^2}{x} : x$ stehen, d.h. dass sie zu den Abständen der beiden Punkte C' und O' vom Schwerpunkte G des Körpers umgekehrt proportional sind.

Betrachtet man also zwei beliebige wechselseitige Mittelpunkte eines Körpers und die respectiven Stösse, deren sie fähig sind, so kann man sagen, dass diese beiden Punkte ebenso wirken, als wenn sie die Masse des Körpers im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernungen vom Schwerpunkte unter sich getheilt hätten.

27) Man könnte deshalb gewissermaassen an die Stelle des Körpers die begrenzte Gerade $C'O'$ setzen, indem man dieselbe als einen unbiegsamen Stab auffasst, der, übrigens ohne Masse, in seinen beiden Endpunkten mit den Massen m und n belastet wäre. Dieser Stab würde nicht allein an seinen beiden Enden, sondern auch in jedem anderen Punkte seiner Richtung mit derselben Stosskraft wie der Körper selbst begabt sein. Er hätte nämlich nicht allein dieselbe Masse und denselben Schwerpunkt, wie wir bereits gesehen haben, sondern er würde auch bei der Rotation um den Schwerpunkt G dasselbe Trägheitsmoment besitzen. Wenn man nämlich in dem Trägheitsmomente der Massen m und n, d. i. in $mx^2 + n \cdot \frac{K^4}{x^2}$ an die Stelle des ersten Gliedes mx^2 den damit gleichen Werth nK^2 setzt, ferner im zweiten Gliede $nK^2 \cdot \frac{K^2}{x^2}$ den Factor nK^2 mit mx^2 vertauscht, so erhält man

$$mx^2 + nK^2 \frac{K^2}{x^2} = nK^2 + mK^2 = (m+n)K^2$$
$$= MK^2,$$

d. i. das Trägheitsmoment des Körpers selbst.

Würde also der Stab von demselben Impuls P in Bewegung gesetzt, so müsste er auch denselben freiwilligen Mittelpunkt und dieselbe Winkelgeschwindigkeit erlangen, und er würde in jedem seiner Punkte derselben Stosskraft wie der entsprechende Punkt des Körpers selbst fähig sein.

Zusatz.

Vom Schwingungspunkte eines schweren Körpers.

Aus dem Vorhergehenden wird klar, wie es zugeht, dass ein im Punkte O aufgehängter schwerer Körper ebenso schwingt, wie ein einfaches Pendel von einer Länge OC, welche dem Abstande des Punktes O vom zugehörigen wechselseitigen Punkte C des Körpers gleich ist. Man kann nämlich an die Stelle des Körpers einen massenlosen Stab von der Länge CO setzen, welcher an seinen Enden mit den Theilen m und n der ganzen Masse belastet ist; die Bewegung dieses Stabes ist dann dieselbe als die des Körpers, sobald nur in beiden Fällen dieselbe bewegende Kraft P wirkt. Da nun diese Kraft hier das Gewicht des Körpers ist und im Schwerpunkte G angreift, der zugleich den Schwerpunkt für die materiellen Punkte

m und n bildet, so kann sich P in zwei parallele Componenten p und q zerlegen, welche an jenen Punkten selbst angreifen und ihren respectiven Massen m und n proportional sind. Wenn daher der Punkt O fest wird, so ist die Bewegung der Masse m vernichtet, und es bleibt nur im Punkte C die Masse n der bewegenden Kraft q, d. i. ihrem natürlichen Gewichte, überlassen.

Bemerkung.

28) Weil bei der Bewegung des Körpers der im Abstande x vom Schwerpunkte angenommene Punkt C' mit derselben Kraft stösst, als wenn der Bruchtheil $\frac{K^2}{x^2+K^2}$ der Masse in ihm vereinigt wäre, und dieser Bruch nur für $x=0$ der Einheit gleich werden kann, so folgt, dass der Schwerpunkt der einzige Punkt des Körpers ist, von welchem man sagen kann, dass er ebenso stösst, als wenn er die ganze Masse des Körpers in sich enthielte. Die Quantität dieses Stosses ist $Ma\vartheta$.

29) Was den Stossmittelpunkt C betrifft, für welchen $x=h$, so beträgt die Stärke des Stosses in diesem Punkte

$$Q=(a+h)\vartheta \cdot \frac{MK^2}{h^2+K^2}$$

oder, was dasselbe ist,

$$Q=l\vartheta \cdot M\frac{a}{l},$$

d. h. C stösst wie ein freier materieller Punkt, welcher dieselbe Geschwindigkeit $l\vartheta$ besitzt und mit dem Bruchtheil $\frac{a}{l}$ der Masse des Körpers versehen ist. Zieht man von diesem Stosse nur die Quantität in Betracht, so ist diese wieder gleich $Ma\vartheta$, oder dieselbe wie im Schwerpunkte, aber es ist der Unterschied vorhanden, dass hier eine kleinere Masse mit entsprechend grösserer Geschwindigkeit wirkt. Besteht das Hinderniss der Bewegung in einem absolut festen Punkte, so können diese beiden Stösse als vollkommen identisch angesehen werden, weil in beiden Fällen dieselbe Quantität der Bewegung vernichtet wird. Wenn sich dagegen ein freier materieller Punkt dem bewegten Körper entgegenstellt, so ist die Verwechselung der beiden Fälle nicht mehr gestattet. Sobald nämlich der gestossene Punkt, dessen Masse gleich μ gesetzt werden soll, vom Stossmittelpunkte getroffen wird, so erlangt er eine Geschwindigkeit

$$v=\frac{Ma\vartheta}{\mu+M\frac{a}{l}}\ {}^{*)};$$

*) Nach dem dynamischen Lehrsatze, dass die Summe der Bewegungsquantitäten durch den Stoss nicht geändert wird.

Anm. d. Uebers.

geht dagegen der Stoss vom Schwerpunkte aus, so beträgt diese Geschwindigkeit nur

$$v' = \frac{M a \vartheta}{\mu + M}.$$

Der letztere Werth ist kleiner als der erste, weil $l > a$.

30) Man sieht hieraus, dass ein Körper an einen freien und in Ruhe befindlichen materiellen Punkt μ mehr Bewegung überträgt, wenn er ihn mit seinem Stossmittelpunkte trifft, als wenn dies mittelst des Schwerpunktes geschieht. Deshalb ist aber der Mittelpunkt des Stosses noch nicht der Punkt, von welchem die Masse μ die grösstmögliche Geschwindigkeit erlangt, auch ist es nicht der Angriffspunkt T des stärksten Stosses, welchem diese Eigenschaft zukommt, sondern ein neuer Punkt, dessen Lage gegen den Schwerpunkt vom Verhältnisse der Massen M und μ abhängig ist. Bezeichnet man nämlich mit V die Geschwindigkeit, welche der Körper M an die Masse μ abgiebt, sobald er ihn im Abstande x von seinem Schwerpunkte G trifft, so erhält man nach dem bekannten Gesetze des Stosses zwischen zwei materiellen Punkten, deren einer die Masse $M \frac{K^2}{x^2 + K^2}$ und die Geschwindigkeit $(a + x)\vartheta$ besitzt, während der andere von der Masse μ sich in Ruhe befindet,

$$V = \frac{M \frac{K^2}{K^2 + x^2}(a + x)\vartheta}{M \frac{K^2}{K^2 + x^2} + \mu} = \frac{M K^2 (a + x)\vartheta}{(M + \mu) K^2 + \mu x^2}.$$

Setzt man hierin

$$\frac{dV}{dx} = 0,$$

um den Punkt zu ermitteln, welchem ein Maximum der mitgetheilten Geschwindigkeit entspricht, so findet man

$$x^2 + 2ax - \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) K^2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für die Entfernung $x + a$ dieses Punktes vom freiwilligen Drehungsmittelpunkt

$$x + a = \pm \sqrt{a^2 + K^2\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)},$$

ein Ausdruck, der, wie man sieht, von dem besonderen Verhältnisse der Massen M und μ abhängt. Der Punkt der grössten mitgetheilten Geschwindigkeit ist hiernach ein neuer Punkt, der mit dem gewöhnlichen Stossmittelpunkte C nur in dem besonderen Falle identisch sein kann, wenn das Massenverhältniss

$$M : \mu = l : a\text{*)}$$

*) Man gelangt zu dieser Proportion, wenn man mittelst der Gleichungen $K^2 = ah$ und $a + h = l$ zunächst den Ausdruck

stattfindet. Mit dem Punkte T des Maximalstosses kann er ferner nur dann zusammenfallen, wenn man

$$\frac{M}{\mu}=0$$

voraussetzt, wozu der Punkt μ eine unendliche Masse besitzen oder, was hier dasselbe ist, ein absolut fester Punkt sein müsste. Dieses Resultat stimmt, wie man sieht, vollkommen mit Dem überein, was oben in Bezug auf das Maximum des Stosses gegen ein festes Hinderniss gefunden worden ist.

Die Fragen, welche sich auf den Stoss des Körpers gegen einen freien Punkt beziehen, sollen anderwärts weiter untersucht werden; hier fahren wir fort, anzunehmen, dass der Stoss einen festen Punkt trifft oder, was auf dasselbe hinauskommt, einen freien Punkt von unendlich grosser Masse.

VI. Von einigen neuen bemerkenswerthen Punkten bewegter Körper.

31) Gehen wir von der Annahme aus, der Körper habe in seiner Bewegung einen festen Punkt C' getroffen, der im Abstande x von seinem Schwerpunkte G gelegen sein soll (vergl. Nr. 15), so wird nach dieser Begegnung die Componente Q vernichtet sein, die Bewegung also nur noch von der in O' angreifenden Componente p herrühren können. Diese Kraft p wird übrigens auf den Körper ebenso wirken, als wenn er vollkommen frei wäre. Da nämlich der Punkt C', in welchem sich das Bewegungshinderniss darbot, zum freiwilligen Mittelpunkte wird, sobald man O' als Stossmittelpunkt ansieht, so ist klar, dass das Hinderniss keinen Einfluss auf die Wirkung der Kraft p haben kann. Der Körper, dessen Bewegung vor dem Zusammentreffen von einer Kraft P herrührte, welche im Abstande h vom Schwerpunkte G wirksam gewesen war, gehorcht also nach dem Stosse einer neuen Kraft

$$p=\frac{Px^2-Phx}{x^2+K^2},$$

welche in einer Entfernung $-\frac{K^2}{x}$ von demselben Schwerpunkte angreift. Die ursprüngliche Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung, d. i.

$$u=\frac{P}{M}$$

wird hierdurch in eine andere

$$u'=\frac{p}{M}$$

umgewandelt, woraus man, mit Substitution von $MK^2\vartheta$ an der Stelle von Ph,

---

$$x+a=\pm\sqrt{a\left(l+\frac{hM}{\mu}\right)}$$

bildet und hierin $x+a=l$ setzt. Ebenso ergiebt sich aus derselben Formel der folgende Fall mittelst der Substitution: $x+a=\sqrt{al}$. Anm. d. Uebers.

$$u' = \frac{ux^2 - K^2\vartheta x}{x^2 + K^2}$$

erhält. Die ursprüngliche Winkelgeschwindigkeit ferner, oder

$$\vartheta = \frac{Ph}{MK^2}$$

ändert sich in

$$\vartheta' = -\frac{pK^2}{x \,.\, MK^2}$$

oder in

$$\vartheta' = \frac{K^2\vartheta - ux}{x^2 + K^2}$$

um.

32) Aus dem Vorhergehenden erwachsen mehrere einfache, leicht zu lösende Probleme. Zunächst kann man fragen, in welchem Abstande x oder in welchem Punkte C' das Hinderniss angebracht werden müsse, wenn der Schwerpunkt des Körpers entweder mit möglichst grosser Geschwindigkeit in einem seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung entgegengesetzten Sinne zurückprallen, oder wenn er möglichst schnell seine Bewegung fortsetzen, oder auch, wenn er irgend eine gegebene Geschwindigkeit annehmen soll. Ferner können ähnliche Fragen in Betreff der Aenderung der Rotationsbewegung aufgeworfen werden. Man erhält hiermit neue Punkte von bemerkenswerthen Eigenschaften *).

Von den Punkten, in welchen die fortschreitende Bewegung die grössten Aenderungen erleidet.

33) Sucht man zunächst denjenigen Punkt, in welchem der Körper einem Hinderniss begegnen muss, wenn er mit möglichst grosser Geschwindigkeit zurückprallen soll, so hat man nur u' zu einem Maximum zu machen oder $\frac{du'}{dx} = 0$ zu setzen. Der Abstand x des in Rede stehenden Punktes bestimmt sich dann durch die quadratische Gleichung

$$\vartheta x^2 + 2ux - \vartheta K^2 = 0,$$

woraus man mit Substitution von $a\vartheta$ für u

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + K^2} = -a \pm \lambda$$

erhält; ein Ausdruck, der mit dem in Nr. 19 für den Angriffspunkt des Maximalstosses erhaltenen vollkommen zusammenfällt. Diese Uebereinstimmung mit dem Punkte des stärksten Stosses liess sich übrigens leicht vorhersehen, da die Gleichung $\frac{du'}{dx} = 0$, aus welcher sich das Maximum von u' ergiebt,

*) Das Original verbreitet sich noch über die Benennungen, welche den fraglichen Punkten gegeben werden können. Wir übergehen diesen Excurs und werden im Folgenden jeden Punkt vollständig durch die ihm zukommenden Eigenschaften bezeichnen. Anm. d. Uebers.

mit der Gleichung $\frac{dp}{dx} = 0$, und diese wieder mit $\frac{dQ}{dx} = 0$ identisch ist, aus letzterer aber das Maximum von Q erhalten wird.

34) Von den beiden für x gefundenen Werthen giebt der erste $\lambda - a$, der positiv und kleiner als h ist, für u' den Werth

$$u' = -\frac{(\lambda - a)\vartheta}{2} \text{ *)}$$

mit einem Vorzeichen, welches dem von u oder $a\vartheta$ entgegengesetzt ist. In diesem ersten Punkte findet folglich ein wirkliches Zurückprallen des Körpers in einem der vorherigen Bewegungsrichtung entgegengesetzten Sinne statt. Die zweite, negative Wurzel

$$x = -(\lambda + a)$$

giebt dagegen für u' einen Werth

$$u'' = \frac{(\lambda + a)\vartheta}{2},$$

welcher im Vorzeichen mit u übereinstimmt. In diesem zweiten Punkte erleidet folglich der Körper nicht mehr eine Zurückwerfung, sondern er wird vielmehr mit einer möglichst grossen Geschwindigkeit nach vorwärts getrieben, wenn er das Hinderniss in einem seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzten Sinne trifft.

35) Hat man $\vartheta = 0$, d. h. besitzt der Körper nur eine fortschreitende Bewegung im Raume, so giebt die obige Gleichung $x = 0$; der Punkt des stärksten Rückpralles würde also mit dem Schwerpunkte zusammenfallen. Für $x = 0$ ist aber auch $u' = 0$; die Bewegung des Körpers wird daher in diesem Falle vollständig vernichtet, wie von selbst klar ist.

36) Ist $u = 0$, d. h. findet nur eine Rotation des Körpers ohne Fortschreiten des Schwerpunktes statt, so findet man

$$x = \pm K, \quad u' = \mp \frac{K\vartheta}{2}.$$

Bei einem blos rotirenden Körper liegt also der fragliche Punkt in der Entfernung K von der Drehachse, so dass, wenn ihm in diesem Abstande ein Hinderniss dargeboten wird, der Schwerpunkt plötzlich die grösste Geschwindigkeit empfängt, deren er fähig ist. Diese Maximalgeschwindigkeit hat die Grösse $\frac{K\vartheta}{2}$ oder sie ist die Hälfte derjenigen, welche der stossende Punkt selbst besitzt.

---

*) Aus der obigen Gleichung

$$\vartheta x^2 + 2ux - \vartheta K^2 = 0$$

folgt:

$$\vartheta(x^2 + K^2) = -2(ux - K^2\vartheta);$$

demnach ist für die hier in Frage kommenden Werthe von x

$$u' = \frac{ux^2 - K^2\vartheta x}{x^2 + K^2} = -\frac{\vartheta x}{2} \text{ u. s. f.}$$

Anm. d. Uebers.

Von den Punkten, in welchen die fortschreitende Bewegung eine gegebene Aenderung erleidet.

37) Sucht man diejenigen Punkte, worin der Körper ein Hinderniss treffen muss, um mit einer gegebenen Geschwindigkeit V zurückgeworfen zu werden, so hat man

$$u' = -V$$

zu setzen. Man erhält dann zur Bestimmung des unbekannten Abstandes dieser Punkte die Gleichung zweiten Grades

$$(u+V)\,x^2 - K^2\vartheta x + VK^2 = 0,$$

und hieraus zwei reelle Wurzeln, wenn

$$K^2\vartheta^2 > 4\,(V^2 + Vu).$$

Man sieht übrigens leicht, dass diese Wurzeln beide positiv und kleiner als h oder $\frac{K^2}{a}$ sind*). Es giebt also in dem Körper zwei Punkte, in denen er die gegebene Rückprallgeschwindigkeit V erlangen kann, sobald nur V der Ungleichung

$$4\,V^2 + 4\,Va\vartheta < K^2\vartheta^2$$

Genüge leistet. Durch Reduction dieser Ungleichung zeigt sich, dass sie auf die Bedingung

$$V < \frac{(\lambda - a)\,\vartheta}{2}$$

zurückkommt, also, wie vorher zu erwarten war, bedeutet, der Werth V dürfe das früher gefundene Maximum nicht überschreiten.

38) Wird nu an die Stelle von V gesetzt, wobei n eine beliebige gegebene Zahl sein soll, und vertauscht man nachher u mit $a\vartheta$, so lässt sich die obige Ungleichung in

$$a < \frac{K}{2\sqrt{n^2+n}}$$

umwandeln. Sobald also der freiwillige Drehungsmittelpunkt des Körpers vom Schwerpunkte um eine Strecke a absteht, welche kleiner ist als $\frac{K}{2\sqrt{n^2+n}}$, so giebt es immer zwei zwischen dem Schwerpunkt und Stossmittelpunkt gelegene Punkte, in welchen der Körper ein festes Hinderniss zu treffen hat, um mit der $n$fachen Geschwindigkeit seiner Schwerpunktsbewegung zurückgeworfen zu werden.

39) In dem speciellen Falle, dass

$$K^2\vartheta^2 = 4\,(V^2 + Vu),$$

sind die beiden Werthe von x einander gleich; die zwei in Rede stehenden Punkte schmelzen folglich in einen zusammen, welcher um die Strecke

*) Man erhält nämlich mittelst der Substitutionen $K^2 = ah$ und $a\vartheta = u$:

$$x = \frac{hu}{2\,(h+V)} \pm \sqrt{\frac{h^2u^2}{4\,(u+V)^2} - \frac{ahV}{u+V}}.$$

Anm. d. Uebers.

$$x = \frac{K^2 \vartheta}{2(V+u)}$$

vom Schwerpunkte absteht.

Wird aus der Gleichung

$$4V^2 + 4Va\vartheta = K^2\vartheta^2$$

der Werth von V berechnet, so findet sich

$$V = \frac{(\lambda - a)\vartheta}{2},$$

d. i. die bereits festgestellte Grösse des Maximum der Rückprallgeschwindigkeit. Der zugehörige Werth von x muss daher mit dem für das Zurückwerfungs-Maximum berechneten, oder mit $x = \lambda - a$ zusammenfallen, was in der That leicht verificirt werden kann.

40) Die beiden Wurzeln sind imaginär, wenn

$$K^2\vartheta^2 < 4(V^2 + Vu);$$

in diesem Falle ist es also unmöglich, dass der Körper beim Stosse gegen ein festes Hinderniss mit der gegebenen Geschwindigkeit V zurückgeworfen werden könne.

41) Man wird bemerken, dass die Bedingung der Imaginärität für jeden Werth von V eintritt, sobald $\vartheta = 0$. Bei einem Körper, der nur eine fortschreitende Bewegung im Raume besitzt, kann daher kein Rückprall stattfinden; wo sich auch das Hinderniss darbieten möge, der Schwerpunkt verfolgt immer seinen Weg im ursprünglichen Sinne, nur mit kleinerer Geschwindigkeit.

42) Ist $u = 0$, also nur Rotation ohne Schwerpunktsbewegung vorhanden, so erhält man immer zwei Punkte für die gegebene Geschwindigkeit V*), vorausgesetzt, dass $V < \frac{K\vartheta}{2}$. Es stimmt dies mit den Resultaten von Nr. 36 überein, insofern nämlich $\frac{K\vartheta}{2}$ dass Maximum der Geschwindigkeit darstellt, welche der Schwerpunkt eines rotirenden Körpers durch ein der Drehung entgegengestelltes Hinderniss erlangen kann.

43) Wird in der vorhergehenden Untersuchung $-V$ an die Stelle von V gesetzt, so hat man den Fall einer negativen Zurückwerfung, d. h. eines Fortschreitens des Schwerpunktes im Sinne seiner ursprünglichen Bewegung. Zur Bestimmung der Punkte, in welchen der Körper das Hinderniss zu treffen hat, damit die Schwerpunktsbewegung nach derselben Seite hin fortgehe, aber die gegebene Geschwindigkeit V annehme, erhält man hierbei die Gleichung

$$(u - V)x^2 - K^2\vartheta x - VK^2 = 0,$$

deren Wurzeln reell, gleich oder imaginär sind, je nachdem

*) Besser gesagt, sind es in diesem Falle zwei Kreisperipherien, denen die verlangte Eigenschaft zukommt.

Anm. d. Uebers.

$$K^2\vartheta^2 - 4(V^2 - Vu) \gtreqless 0.$$

Die ganze Untersuchung kann hierauf analog der vorhergehenden geführt werden.

Zusatz.

Von den Punkten vollkommener Zurückwerfung.

44) Wollte man insbesondere diejenigen Punkte aufsuchen, vermittelst deren der Körper, gleich als wenn er vollkommen elastisch wäre, mit derselben Geschwindigkeit zurückgeworfen würde, welche sein Schwerpunkt vor dem Stosse besass, so hätte man nur

$$u' = -u$$

zu setzen oder auch in den Formeln von Nr. 37 V mit u zu vertauschen. Man erhält dann

$$2ux^2 - K^2\vartheta x + K^2 u = 0$$

oder, wenn man $a\vartheta = u$ und $h = \frac{K^2}{a}$ substituirt, die einfachere Gleichung

$$x^2 - \frac{h}{2}x + \frac{K^2}{2} = 0.$$

Hieraus ergeben sich die zwei Wurzeln

$$x = \frac{h}{4} \pm \frac{\sqrt{h^2 - 8K^2}}{4},$$

die immer reell, positiv und kleiner als h sind, so lange

$$h^2 - 8K^2 > 0.$$

Diese Bedingung geht, wenn man $\frac{K^2}{a}$ an die Stelle von h setzt, in die Ungleichung

$$a < \frac{K}{2\sqrt{2}} \text{ *)}$$

über. Man sieht hieraus, dass, wenn bei der Bewegung des Körpers der Abstand des freiwilligen Mittelpunktes O vom Schwerpunkte G kleiner ist als die Strecke $\frac{K}{2\sqrt{2}}$, immer zwei Punkte vollkommener Zurückwerfung vorhanden sind, d. h. zwei Punkte, welche die Eigenschaft besitzen, dass, sobald der Körper in einem von beiden ein Hinderniss trifft, sein Schwerpunkt mit derselben Geschwindigkeit zurückprallt, welche er vor dem Stosse besass.

---

*) Im Original steht an dieser Stelle

$$a < 2K\sqrt{2},$$

was wahrscheinlich auf einer Verwechslung von a und h beruht. Auch weiterhin findet derselbe Irrthum statt.

Anm. d. Uebers.

Beispiele.

45) Nehmen wir z. B. an, es sei $a = \frac{1}{3} K$, so ist die Bedingung $a < \frac{K}{2\sqrt{2}}$ erfüllt, und man findet für x die beiden positiven Werthe

$$x_{,} = K, \qquad x_{,,} = \tfrac{1}{2} K.$$

Die Punkte, welche in diesen Abständen vom Schwerpunkte auf der Geraden GC sich befinden, sind Punkte vollkommener Zurückwerfung; mag sich in dem einen oder dem andern ein Hinderniss entgegenstellen, der Körper prallt zurück, als wäre er vollkommen elastisch. Die Geschwindigkeit, welche der Schwerpunkt nach dem Stosse annimmt, ist in beiden Fällen nach Grösse und Richtung genau dieselbe, nur die im Körper verbleibende Winkelgeschwindigkeit ϑ' ist verschieden. Je nachdem man den einen oder den andern Werth von x in den in Nr. 31 gefundenen Werth von ϑ' einsetzt, ergiebt sich im ersten Falle die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\vartheta}{3}$, im zweiten $\frac{2\vartheta}{3}$.

46) Setzt man in der für x aufgestellten Gleichung

$$a = \frac{K}{2\sqrt{2}},$$

so sind die beiden Wurzeln einander gleich und man erhält

$$x = \tfrac{1}{4} h.$$

In diesem besonderen Falle der Bewegung ist also nur ein Punkt für vollkommene Zurückwerfung vorhanden, und es befindet sich derselbe am Ende des ersten Viertels der geradlinigen Strecke, welche den Schwerpunkt G mit dem Stossmittelpunkt C verbindet.

Aufhebung der fortschreitenden Bewegung.

47) Werden diejenigen Punkte gesucht, in denen die fortschreitende Bewegung des Körpers durch den Stoss vollständig vernichtet wird, so hat man nur

$$u' = 0,$$

also nach Nr. 31

$$u x^2 - K^2 \vartheta x = 0$$

zu setzen. Vertauscht man hierin wieder u mit $a\vartheta$ und $\frac{K^2}{a}$ mit h, so giebt dies

$$x^2 - h x = 0,$$

folglich ist

$$x = 0 \text{ oder } x = h.$$

Der erste dieser Werthe entspricht dem Schwerpunkte, der zweite dem Stossmittelpunkte. In der That leuchtet auch ein, dass, in welchem dieser beiden Punkte man das Hinderniss anbringen möge, die fortschreitende Bewegung jedesmal zerstört werden muss. Der einzige Unterschied ist vor-

handen, dass, während im ersten Falle nur u oder die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung aufgehoben wird, ohne dass der Rotation Abbruch geschieht, im zweiten Falle u und ϑ gleichzeitig vernichtet werden.

48) Wollte man noch denjenigen Punkt ausfindig machen, in welchem das Hinderniss keinen Einfluss auf die fortschreitende Bewegung ausübt, so hätte man $u' = u$ zu setzen und man erhielte

$$x = -a,$$

d. i. den freiwilligen Drehungsmittelpunkt O. Da nämlich dieser Punkt für jeden gegebenen Augenblick sich in Ruhe befindet, so kann er überhaupt keinen Stoss gegen ein ihm dargebotenes Hinderniss ausüben; also kann auch umgekehrt die Bewegung des Körpers durch das Hinderniss keine Aenderung erleiden.

Allgemeine Bemerkung.

49) Man kann bemerken, dass die Theorie der Punkte, in welchen ein Körper mit einer bestimmten Geschwindigkeit zurückgeworfen wird, im Grunde identisch ist mit der Theorie derjenigen Punkte, in welchen eine gegebene Intensität des Stosses stattfindet. Aus der Gleichung

$$Q + p = P,$$

welche die Componenten Q und p der dem Körper innewohnenden Kraft P an einander bindet, folgt nämlich, dass der Angriffspunkt eines gegebenen Stosses Q, oder auch einer verlorenen Geschwindigkeit $\frac{Q}{M}$, zu gleicher Zeit eine Rückprallgeschwindigkeit $\frac{p}{M}$ hervorbringt. Es wird daher hiebei ein und derselbe Punkt nur von zwei verschiedenen Seiten angesehen, die Art seiner Bestimmung bleibt aber dieselbe. Dessenungeachtet war es von Wichtigkeit, diese Punkte auch in Betreff der Zurückwerfung zu untersuchen, welche der Körper erleidet, wenn in ihnen ein Bewegungshinderniss entgegengestellt wird; nicht allein wegen der neuen dynamischen Fragen, welche hierdurch hervorgerufen werden, sondern auch wegen der sonderbaren Beziehungen, welche dabei zwischen den harten und den elastischen Körpern stattfinden. Es ist in der That höchst merkwürdig, dass ein vollkommen unelastischer Körper durch seine Bewegung allein gewissermassen eine Art von Elasticität erlangen kann, so dass beim Zusammentreffen mit einem Hinderniss sein Schwerpunkt in einem der ursprünglichen Bewegungsrichtung entgegengesetzten Sinne zurückprallt, oder auch mit einer neuen Geschwindigkeit vorwärts geschnellt wird, gerade so, als wäre er mit einer Feder in Berührung gekommen. Nicht minder verdient beachtet zu werden, dass die Geschwindigkeit der Zurückwerfung nicht allein der Schwerpunktsgeschwindigkeit vor dem Stosse gleich werden kann, wie es bei den vollkommen elastischen Körpern vorkommt, sondern dass sie die-

selbe noch übertrifft, ja sogar zu einer beliebigen Grösse anwächst, wenn nur der Körper eine hinlänglich grosse Rotationsgeschwindigkeit besitzt.

50) Der Zuwachs an Geschwindigkeit, welchen unter besonderen Umständen der Schwerpunkt eines Körpers durch die blose Gegenwart eines festen Punktes erlangt, mit welchem der Körper zusammentrifft, scheint zu einer Art von Widerspruch zu führen. Man sollte nämlich glauben, dass die in einem Körper vorhandene Quantität der Bewegung, welche bekanntlich durch das Product aus seiner Masse und der Geschwindigkeit seines Schwerpunktes gemessen wird, nur durch den Hinzutritt einer neuen, an dem Körper angreifenden Kraft vermehrt werden könne. Nun sieht man aber hier nur einen festen Punkt, der für sich keine Bewegung hervorbringen, im Gegentheile nur vorhandene Bewegung vernichten kann; und doch soll ein bewegter Körper durch das blose Zusammentreffen mit diesem festen Punkte, weit entfernt, einen Theil seiner Geschwindigkeit zu verlieren, plötzlich im Sinne seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung eine grössere Geschwindigkeit in sich aufnehmen. Es müsste also hier gewissermassen Bewegung geschaffen werden, wo man der Natur der Sache nach voraussetzen sollte, dass sie nur zerstört werden könnte. Es scheint dies im vollkommenen Widerspruche mit den allgemeinen Grundsätzen der Dynamik.

Man muss aber wohl beachten, dass in der Natur ein fester Punkt gar nicht existirt; was wir so nennen, ist nichts als ein freier Punkt, in welchem sich nur eine ausserordentlich grosse Masse concentrirt, die wir im Vergleich zu der Masse des in Betracht gezogenen Körpers als unendlich ansehen. Wenn daher dieser Punkt unter der Wirkung einer endlichen Kraft nur eine unendlich kleine Bewegung annimmt oder in Ruhe zu bleiben scheint, so hat er nichtsdestoweniger eine endliche Bewegungsquantität in sich aufgenommen; die Kraft ist demnach nicht vernichtet worden, sondern besteht noch ohne die geringste Aenderung. Hieraus folgt, dass, wenn man einen Körper beim Zusammentreffen mit einem festen Punkte eine grössere Geschwindigkeit annehmen sieht, als er vorher besass, und man will die nach dem Stosse vorhandene Bewegungsquantität aufsuchen, man nicht allein die dem Körper innewohnende Quantität in Rechnung ziehen muss, sondern auch noch diejenige, welche er in entgegengesetztem Sinne auf den festen Punkt übertragen hat. Bildet man daher mit Rücksicht auf die in Frage kommenden Bewegungsrichtungen die Differenz dieser beiden Quantitäten, so wird man genau die vor dem Stosse vorhandene Grösse wiederfinden. Das allgemeine Princip der Erhaltung der Kräfte hat also keinen Abbruch erlitten. Ebenso verhält es sich mit dem Satze von der Erhaltung der Flächen, wenn man nicht vergisst, die Bewegung des festen Punktes oder vielmehr die eines freien Punktes von unendlicher Masse mit in Rechnung zu ziehen. Es ist daher weder ein Widerspruch, noch eine Ausnahme von den Grundgesetzen der Wissenschaft vorhanden, sobald man nur nicht allein auf den bewegten Körper

Rücksicht nimmt, sondern auf das ganze System, welches er im Verein mit dem materiellen Punkte bildet.

51) Kommen wir noch einmal auf die besondere Bewegung des Körpers zurück, ohne weitere Beziehung auf die unmerkliche Bewegung des festen Punktes, so haben wir noch eine wichtige Bemerkung zu machen, auf welche der Leser wohl schon selbst gekommen ist. Es ist dies nämlich, dass die Eigenschaft, bei Begegnung mit einem Hindernisse zurückgeworfen oder auch vorwärts geschnellt zu werden, lediglich von der Rotation des Körpers herkommt. Besitzt er nämlich nur eine fortschreitende Bewegung, so ist er weder einer Zurückwerfung fähig, noch kann ohne eine neue Kraft seine Geschwindigkeit vergrössert werden. Der Schwerpunkt wird in diesem Falle durch ein entgegengestelltes Hinderniss nur in seinem Laufe verzögert oder auch ganz aufgehalten, wenn dieses Hinderniss in einer durch den Schwerpunkt selbst gehenden Richtung angreift. Sobald aber der Körper eine Achsendrehung besitzt, so wohnt ihm auch die Art von Federkraft inne, von welcher im Vorhergehenden gesprochen wurde, und er kann alle die erwähnten besonderen Erscheinungen darbieten.

Zur Vollendung der Theorie ist es noch nothwendig, die verschiedenen Punkte des Körpers in Beziehung auf die neue Rotation zu untersuchen, welche er nach seinem Zusammentreffen mit einem festen Punkte annimmt.

Von den Punkten grösster Aenderung der Rotationsbewegung.

52) Oben (Nr. 31) wurde gezeigt, dass, wenn sich der Bewegung des Körpers der feste Punkt in einer im Abstande x vom Schwerpunkte gelegenen Richtung entgegenstellt, die Winkelgeschwindigkeit ϑ in eine neue ϑ' umgeändert wird, für welche man hat

$$\vartheta' = \frac{K^2\vartheta - ux}{x^2 + K^2}.$$

Will man nun einen Punkt aufsuchen, der einem Maximum von ϑ' zugehört, so hat man nur

$$\frac{d\vartheta'}{dx} = 0$$

zu setzen, und erhält daraus die Gleichung zweiten Grades:

$$ux^2 - 2K^2\vartheta x - uK^2 = 0.$$

Wird hierin für u sein Werth $a\vartheta$ oder $\frac{K^2}{h}\vartheta$ substituirt, so ergeben sich die beiden Wurzeln

$$x = h \pm \sqrt{h^2 + K^2},$$

welche immer reell sind, und zwar die eine positiv, die andere negativ. Es sind also immer zwei Punkte grösster Aenderung der Rotationsgeschwindigkeit vorhanden; der eine fällt zur Rechten des Schwerpunktes, nach der

Seite des Stossmittelpunktes, der andere zur Linken, nach der Seite des freiwilligen Mittelpunktes.

Will man den Abstand δ der fraglichen Punkte vom Stossmittelpunkt C ausfindig machen, so erhält man, da dieser Abstand gleich $x - h$ ist, aus der vorhergehenden Formel

$$\delta = \pm \sqrt{h^2 + K^2} = \pm \sqrt{hl},$$

d. h. „der Abstand der Punkte grösster Aenderung der Rotationsbewegung vom Stossmittelpunkte C ist das geometrische Mittel zwischen den Abständen des Schwerpunktes und des freiwilligen Mittelpunktes von demselben Punkt C“. Dieser Lehrsatz ist vollkommen ähnlich dem auf die Angriffspunkte des Maximalstosses oder die Punkte grösster Aenderung der fortschreitenden Bewegung bezüglichen (vergl. Nr. 19). Die einen dieser Punkte gehen in die andern über, wenn die Bewegung des Körpers so abgeändert wird, dass der Stossmittelpunkt und der freiwillige Mittelpunkt ihre Rollen tauschen.

53) Setzt man in dem Ausdrucke von ϑ' für x die erste positive Wurzel

$$x = h + \delta,$$

so findet man

$$\vartheta' = - \vartheta \frac{K^2}{2h\,(h + \delta)} \ ^{*)}.$$

Das Vorzeichen dieses Resultates lehrt, dass beim Stoss in diesem ersten Punkte der Körper eine Maximal-Rotation annimmt, welche in ihrer Richtung der ursprünglich vorhandenen direct entgegengesetzt ist.

Wird dagegen für x der zweite negative Werth, nämlich

$$x = h - \delta$$

substituirt, so ergiebt sich

$$\vartheta' = \vartheta \frac{K^2}{2h\,(\delta - h)}.$$

Da $\delta > h$, so ist dieser Werth immer positiv oder von demselben Vorzeichen wie ϑ. In diesem zweiten Punkte erlangt daher der Körper eine Maximal-Rotation, welche der Richtung nach mit der vor dem Stosse vorhandenen übereinstimmt.

Besondere Fälle der Bewegung des Körpers.

54) Besitzt der Körper keine fortschreitende Bewegung, oder ist $u = 0$, so findet man

---

*) Wird in dem allgemeinen Werthe von ϑ' sogleich $u = \frac{K^2}{h}$ gesetzt, so erhält man

$$\vartheta' = - \vartheta \frac{K^2 (x - h)}{h\,(x^2 + K^2)}.$$

Hieraus folgt der obige Werth, wenn man für das Maximum von ϑ' ausser $x = h + \delta$ noch

$$K^2 = \delta^2 - h^2$$

substituirt. Im zweiten Falle ist nur das Vorzeichen von δ zu ändern.

Anm. d. Uebers.

$$x = 0, \quad \vartheta' = \vartheta.$$

Die ursprüngliche Rotationsgeschwindigkeit ist dann selbst das Maximum und wird nicht geändert, wenn die Stossrichtung durch den Schwerpunkt hindurchgeht.

55) Ist die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 0$, oder hat der Körper keine Rotation, so ergiebt sich:

$$x = \pm K, \qquad \vartheta' = \mp \frac{u}{2K}.$$

Zusätze.

56) Wollte man diejenigen Punkte aufsuchen, in denen der Stoss angebracht werden müsste, damit die Drehbewegung in eine entgegengesetzt gerichtete von der Winkelgeschwindigkeit Θ umgeändert würde, so hätte man

$$\vartheta' = -\Theta$$

zu setzen. Man erhält dann für den zwischen einem dieser Punkte und dem Schwerpunkte gelegenen Abstand x die quadratische Gleichung

$$\Theta x^2 - ux + K^2(\vartheta + \Theta) = 0,$$

deren Wurzeln reell sind, so lange u oder $a\vartheta$ der Ungleichung

$$a^2\vartheta^2 > 4K^2(\Theta^2 + \Theta\vartheta)$$

Genüge leistet. Unter dieser Bedingung giebt es also jedesmal zwei Punkte, welche der gestellten Aufgabe entsprechen. Bei genauerer Untersuchung findet sich, dass die gestellte Forderung auf die Relation

$$\Theta < \vartheta \frac{\delta - h}{2h}, \quad \text{oder } \Theta < \vartheta \frac{K^2}{2h(\delta + h)} \; ^{*})$$

zurückkommt, also einfach bedeutet, dass Θ das Maximum von ϑ' nicht überschreiten darf, was von selbst klar ist.

57) Es sei $\Theta = n\vartheta$ und n eine beliebige gegebene Zahl, so geht die obige Gleichung in

$$nx^2 - ax + (n+1)K^2 = 0$$

über, und dies giebt

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4K^2(n^2+n)}}{2n}.$$

Beide Wurzeln sind reell und positiv, so lange

$$a^2 - 4K^2(n^2+n) > 0.$$

Wenn daher der freiwillige Mittelpunkt des Körpers vom Schwerpunkte hinlänglich entfernt ist, um der Bedingung

$$a > 2K\sqrt{n^2+n}$$

Genüge zu leisten, so giebt es in diesem Körper auf der Seite des Stossmittelpunktes zwei Punkte mit der Eigenschaft, dass, wenn einer von ihnen

---

*) Mittelst der Substitutionen $a = \frac{K^2}{h}$, $K^2 = \delta^2 - h^2$.

Anm. d. Uebers.

auf ein Hinderniss stösst, der Körper mit dem $n$fachen seiner anfänglichen Winkelgeschwindigkeit rückwärts rotirt. — Ist $a = 2K\sqrt{n^2+n}$, so fallen diese beiden Punkte in einen zusammen, welcher um die Strecke $\frac{a}{2n}$ vom Schwerpunkte absteht.

58) In gleicher Weise kann man ein negatives n voraussetzen und gelangt dabei zu dem Resultate, dass der Körper beim Bestehen der Ungleichung

$$a > 2K\sqrt{n^2-n}$$

zwei Punkte enthält, in deren einem er ein festes Hinderniss zu treffen hat, wenn seine Winkelgeschwindigkeit auf das $n$fache anwachsen soll, ohne dass die Drehrichtung geändert wird. — Ist endlich $a = 2K\sqrt{n^2-n}$, so schmelzen diese beiden Punkte wieder in einen zusammen, der im Abstande $-\frac{a}{2n}$ vom Schwerpunkte gelegen ist.

59) Soll die Drehbewegung des Körpers in ihr directes Gegentheil umschlagen, so dass er mit einer ebenso grossen Winkelgeschwindigkeit, als er vor dem Stosse besass, nach demselben in entgegengesetztem Sinne rotirt, so hat man

$$\vartheta' = -\vartheta$$

oder auch in den Formeln von Nr. 57

$$n = 1$$

zu setzen. Man erhält hieraus

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8K^2}}{2},$$

zwei Werthe, die unter der Voraussetzung, dass

$$a^2 - 8K^2 > 0,$$

beide reell und positiv sind.

60) Wollte man

$$\vartheta' = \vartheta \text{ oder } n = -1$$

annehmen, so würde man

$$x^2 + ax = 0$$

und hieraus die beiden Werthe

$$x = 0 \text{ und } x = -a$$

finden, von denen der eine dem Schwerpunkte, der andere dem freiwilligen Drehungsmittelpunkt entspricht. In der That leuchtet ein, dass, mag man dem einen oder andern dieser Punkte ein Bewegungshinderniss entgegenstellen, in beiden Fällen die Rotation nicht geändert werden kann. U. s. w.

Bemerkungen.

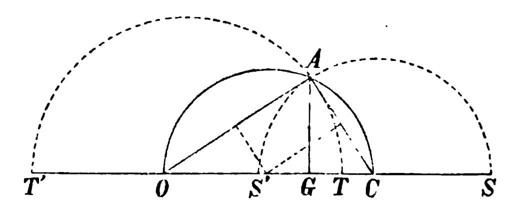
61) Es ist unnöthig, die Aufzählung der einzelnen auf die Achsendrehung bezüglichen Fälle noch weiter zu treiben, da die ganze Unter-

suchung analog bleibt mit der auf Abänderung der fortschreitenden Bewegung bezüglichen, und überhaupt keine besonderen Schwierigkeiten darbietet. Man muss übrigens bemerken, dass die untersuchten Punkte, so weit sie sich auf gegebene Abänderungen der Bewegung beziehen, nicht einzig in ihrer Art sind, so dass sie etwa durch die vorhandenen Bewegungsumstände des in Betracht gezogenen Körpers vollständig bestimmt wären. Sie existiren vielmehr in unendlicher Zahl. Will man z. B. diejenigen Punkte ausfindig machen, mittelst deren der bewegte Körper mit einer gegebenen Intensität stösst, so besitzen nicht allein die beiden oben bestimmten Punkte diese Eigenschaft, sondern es giebt noch eine unendliche Menge andere, denen dieselbe Eigenthümlichkeit zukommt. Später wird gezeigt werden, dass alle diese Punkte gleichen Stosses auf der Peripherie einer bestimmten Ellipse im Körper gelegen sind. Die Punkte des Maximalstosses oder der stärksten Zurückwerfung u. a. sind dagegen nur einmal vorhanden; solche Punkte verdienen daher vor allen beachtet zu werden.

Was die Lage und gegenseitige Abhängigkeit dieser besonders wichtigen Punkte in einem Körper betrifft, so lässt sich dieselbe noch durch eine geometrische Figur klar machen und gewissermaassen vor Augen legen. Durch einfache geometrische Betrachtungen wird es möglich werden, die gefundenen Lehrsätze auf eine für das Gedächtniss bequeme Form zu bringen.

Geometrischer Ausdruck der Hauptresultate der vorhergehenden Untersuchung.

62) Es sei G der Schwerpunkt des Körpers und C der Stossmittelpunkt, d. h. der Angriffspunkt des ursprünglichen Impulses.



Man ziehe CG und errichte im Punkt G auf dieser Linie eine Senkrechte GA, deren Länge dem Trägheitsarme K des Körpers gleich zu machen ist. Beschreibt man hierauf über CA als Sehne einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf die Gerade CG fällt, so ist der Punkt O, in welchem seine Peripherie die Verlängerung von CG schneidet, der freiwillige Drehungsmittelpunkt.

Geht man umgekehrt vom Punkte O als gegeben aus, verbindet O mit A und beschreibt über OA als Sehne einen Kreis, dessen durch O gehender Durchmesser mit OG zusammenfällt, so erhält man den Stossmittelpunkt im Punkte C, worin die Peripherie die Verlängerung von OG schneidet.

Die beiden wechselseitigen Punkte C und O, zwischen welche der Schwerpunkt G des Körpers fällt, können folglich als die beiden Enden

eines Kreisdurchmessers betrachtet werden, dessen dem Punkte G entsprechende Ordinate die Länge K darstellt, durch welche das Trägheitsmoment des Körpers bestimmt wird.

63) Trägt man auf dem Durchmesser vom Punkte O aus eine der anliegenden Sehne OA gleiche Strecke OT ab, und ebenso nach der andern Seite auf der Verlängerung des Durchmessers eine gleiche Länge OT', so sind die beiden Punkte T und T' die Angriffspunkte des Maximalstosses. Der Punkt T entspricht dem stärksten Stosse im Sinne der fortschreitenden Bewegung des Körpers, der Punkt T' dem stärksten Stosse von entgegengesetzter Richtung, d. h. einem solchen, wobei der Körper mittelst seiner Rotation in einem seinem Vorschreiten im Raume entgegengesetzten Sinne das Hinderniss trifft.

64) Dieselben Punkte T und T' bedingen zu gleicher Zeit die grössten Aenderungen der fortschreitenden Bewegung, und zwar giebt der Punkt T die stärkste Zurückwerfung des Schwerpunktes in einer seiner vorhergegangenen Bewegung entgegengesetzten Richtung; liegt dagegen das Hinderniss in T', so wird der Schwerpunkt mit möglichst grosser Geschwindigkeit im Sinne der vorhandenen Bewegung vorwärts geschnellt.

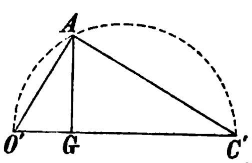
65) Nimmt man ferner auf der Richtung des Durchmessers zu beiden Seiten des Punktes C die beiden Strecken CS und CS' gleich der anliegenden Sehne CA, so findet man die Punkte S und S', in denen das Hinderniss anzubringen ist, wenn es gilt, die grössten Aenderungen der Rotation hervorzubringen. Der auf der Verlängerung des Durchmessers gelegene Punkt S erzeugt die grösste Winkelgeschwindigkeit des Körpers in einem der vorhandenen Rotation entgegengesetzten Sinne; der andere S' bedingt eine möglichst grosse Rotation, ohne dass die vorherige Drehrichtung geändert wird.

66) Die einfache bekannte Figur des rechtwinkligen Dreiecks mit der aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällten Senkrechten enthält also Alles, was sich auf Lage und gegenseitige Abhängigkeit der besonders bemerkenswerthen Punkte eines Körpers bezieht, welcher um eine seiner Hauptachsen rotirt, während sein Schwerpunkt in einer zu dieser Achse senkrechten Richtung fortschreitet. Dieselbe Figur zeigt zugleich klar, was geschieht, wenn nur eine dieser beiden Bewegungen vorhanden ist.

1°. Hat der Körper seinen Antrieb von einer durch den Schwerpunkt gehenden Kraft erhalten, so fällt der Stossmittelpunkt C mit G zusammen; die Kathete CA verschmilzt dann mit der Senkrechten $GA = K$, und die andere Kathete AO geht in eine Parallele zur Hypotenuse über. Der Angriffspunkt T des stärksten positiven Stosses (im Sinne der vorhandenen Bewegung) fällt hierbei, wie leicht zu ersehen, in den Schwerpunkt G, während der dem grössten negativen Stosse zugehörige Punkt T' in eine unendliche Entfernung rückt. Die Punkte S und S' endlich liegen im Abstande $CA = GA = \pm K$ zu beiden Seiten von G.

2°. Rührt die Bewegung des Körpers von einem Kräftepaar her, so sind der freiwillige Mittelpunkt O und der Schwerpunkt identisch; es fällt daher die Kathete OA mit der Senkrechten GA zusammen, und AC wird parallel zur Hypotenuse. Die Punkte des stärksten Stosses T und T' liegen folglich im Abstande $OA = \pm K$ vom Schwerpunkte G, während von den Punkten grösster Aenderung der Rotation S in unendliche Entfernung rückt und S' mit dem Schwerpunkte zusammenfällt.

67) Will man noch die Stosskraft eines beliebig auf der Verbindungsgeraden der Punkte C und O gelegenen Punktes C' *) untersuchen, so ziehe man wieder die Linien $C'A$ und $O'A$ rechtwinklig gegen einander. Nimmt man hierauf den Bruchtheil $\frac{\overline{GA}^2}{\overline{C'A}^2} M$ der ganzen Masse M des in Rede stehenden Körpers, so kann man sagen, dass dieser Punkt ebenso wirkt, wie ein freier Punkt, in welchem jener Theil der Masse concentrirt wäre. Der zu C' wechselseitige Punkt O' würde ferner dieselbe Wirkung haben, wie ein freier Punkt, welcher den noch übrigen Theil der ganzen Masse enthielte. Die beiden wechselseitigen Punkte C' und O' theilen also die Masse des Körpers unter sich im umgekehrten Verhältnisse mit $\overline{C'A}^2$ und $\overline{O'A}^2$, oder, was dasselbe ist, in zwei Theile, welche mit ihren Abständen $C'G$ und $O'G$ vom Schwerpunkte umgekehrt proportional sind.



68) Es scheint uns, dass Wahrheiten, die in so klarer und einfacher Form auftreten, gewissermaassen neue Elemente bilden, welche man der Wissenschaft hinzufügt, und die nicht ermangeln können, zu ihrer Vervollkommnung beizutragen. Denn man muss bekennen, dass der menschliche Verstand die wesentlichsten Fortschritte durch Vereinfachung der Grundideen macht, durch Einführung neuer Werkzeuge, die er mit grösserer Leichtigkeit zu handhaben versteht. Ich habe daher geglaubt, dass die vorhergehenden Untersuchungen der Aufmerksamkeit der Mathematiker nicht unwürdig wären, und dass sie ebensowohl wegen ihrer Neuheit, als wegen der Anwendungen, die davon in der Mechanik gemacht werden können, alle die Einzelheiten der Entwickelung verdienten, welche im vorliegenden Aufsatze gegeben sind.

Diese so eleganten Lehrsätze lassen sich aber selbst wieder als Folgerungen aus noch allgemeineren Sätzen darstellen, wie im folgenden Capitel gezeigt werden soll.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

*) Das Original enthält in dieser Nummer andere Bezeichnungen. Die hier gebrauchten schliessen sich unmittelbar an die in Nr. 15 u. f. vom Verfasser angewendeten an. Anm. d. Uebers.

Kleinere Mittheilungen.

XIII. Auflösung der algebraischen Gleichungen in Form bestimmter Integrale. Von R. HOPPE. Im Folgenden will ich zwei bestimmte Integrale entwickeln, deren eins die Anzahl, das andere die Summe der reciproken Werthe der zwischen beliebigen Grenzen enthaltenen Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung ausdrückt. Es sei

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

mithin

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{x - a_k},$$

dann ist

$$\frac{f'(c e^{iu})}{f(c e^{iu})} + \frac{f'(c e^{-iu})}{f(c e^{-iu})} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2c \cos u - 2a_k}{c^2 - 2c a_k \cos u + a_k^2}.$$

Dieser Ausdruck mit du multiplicirt und integrirt giebt

$$-\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{a_k} \left\{ u + 2 \operatorname{arc} tg \left(\frac{a_k + c}{a_k - c} \, tg \frac{u}{2} \right) \right\}.$$

Es seien zuerst alle a_k reell. Dann geht für $u = \pi$ der Arcus in $\frac{\pi}{2}$ oder in $-\frac{\pi}{2}$ über, je nachdem $a_k^2 > $ oder $< c^2$ ist. Nimmt man also das Integral zwischen den Grenzen 0 und π, so verschwinden alle Glieder der Summe, für welche $a_k^2 < c^2$ ist. Wir denken die a so nach ihrer Grösse geordnet, dass dem absoluten Werthe nach die μ ersten $> c$, die übrigen $< c$ sind. Dann kommt

$$1) \qquad \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{1}{a_k} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{f'(c e^{iu})}{f(c e^{iu})} + \frac{f'(c e^{-iu})}{f(c e^{-iu})} \right\} du.$$

Ebenso erhält man

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{f'(ce^{iu})\, ce^{iu}}{f(ce^{iu})} + \frac{f'(ce^{-iu})\, ce^{-iu}}{f(ce^{-iu})} \right\} du =$$

$$\int_0^\pi du \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \frac{ce^{iu}}{ce^{iu} - a_k} + \frac{ce^{-iu}}{ce^{-iu} - a_k} \right\} =$$

$$\int_0^\pi du \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ 2 + a_k \frac{2c\cos u - 2a_k}{c^2 - 2ca_k \cos u + a_k^2} \right\}$$

$$= 2n\pi - 2\mu\pi,$$

woraus

$$3) \quad \mu = n - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{f'(ce^{iu})\, ce^{iu}}{f(ce^{iu})} + \frac{f'(ce^{-iu})\, ce^{-iu}}{f(ce^{-iu})} \right\} du.$$

Beide Integrale sind in reeller Form auszuführen, wodurch jede Vieldeutigkeit vermieden wird.

Sind ferner einige der a_k imaginär, und man schreibt für eins derselben $a + ib$, so hat man

$$2 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{a + ib + c}{a + ib - c} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) =$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2(a^2 + b^2 - c^2)\{(a-c)^2 + b^2\} \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{\{(a-c)^2 + b^2\}^2 - \{(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2\} \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}$$

$$+ \frac{i}{2} \log \frac{\left\{[(a-c)^2 + b^2] \cot \frac{u}{2} - 2bc\right\}^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2}{\left\{[(a-c)^2 + b^2] \cot \frac{u}{2} + 2bc\right\}^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2}.$$

Beide Theile des Ausdrucks verschwinden für $u = 0$ und $u = \pi$. Der letztere, welcher durchaus stetig ist, verschwindet demnach im bestimmten Integrale. Der Nenner im ersten Theile geht einmal vom Positiven durch Null ins Negative über, während das Vorzeichen des Zählers allein vom Factor $a^2 + b^2 + c^2$ abhängt. Folglich ist der Arcus zwischen den Grenzen 0 und π genommen $= \pi$ oder $= -\pi$, je nachdem $a^2 + b^2 > c^2$ oder $< c^2$ ist.

Die Gleichungen 1) und 2) bleiben demnach gültig, wenn beliebige a_k imaginär sind, sobald nur in der Bestimmung ihrer Reihenfolge für die imaginären a ihre Module setzt.

Es ist leicht zu sehen, wie man die genannten Gleichungen zur Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ benutzen kann, wo $f(x)$ nach Potenzen von x entwickelt gegeben ist. Den Werth des Integrals 2) findet man für irgend ein c, indem man zwei um weniger als 1 von einander verschiedene

Näherungswerthe sucht, zwischen welchen es enthalten ist: die einzige ganze Zahl, welche zwischen beiden liegt, ist der genaue Werthe von $n-\mu$.

Kennt man für zwei Werthe von c und c' die entsprechenden μ und μ', so ist $\mu-\mu'$ die Anzahl der Wurzeln zwischen c und c'. Setzt man voraus, es seien aus der Gleichung $f(x)=0$ bereits alle vielfachen Wurzeln ausgeschieden, so kann man allmälig eine Reihe von verschiedenen c aufstellen, der Art, dass die entsprechende Reihe der μ immer um 1 oder um 2 steigt. Jeder Differenz $\mu-\mu'=1$ entspricht dann eine reelle Wurzel zwischen c und c', jeder Differenz $\mu-\mu'=2$ der Modul zweier conjugirter imaginärer Wurzeln zwischen c und c'. Die Gleichung 1), deren rechte Seite $=S$ sei, giebt im ersten Fall:

$$S-S'=\frac{1}{a},$$

im zweiten

$$S-S'=\frac{1}{a+ib}+\frac{1}{a-ib}=\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

Setzt man statt der Function $f(x)$ die Function $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\frac{1}{c}$, für c, so erhält man auf dieselbe Weise und für dieselben Werthe von c und c' in beiden Fällen resp.

$$S'-S=a \text{ und } =2a,$$

Durch Division ergiebt sich dann das Quadrat des Modulus a^2+b^2, und hieraus der Cosinus der Amplitude

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

In allen Fällen lassen sich also sämmtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch Integrale von der Form S darstellen.

Berlin.

XIV. Ueber die Auflösung der linearen endlichen Differenzengleichungen mit variabeln Coefficienten. Von D. G. Zehfuss, provisorischem Lehrer der höhern Mathematik an der höhern Gewerbschule zu Darmstadt. Die allgemeine Auflösung der endlichen Differenzengleichungen mit variabeln Coefficienten hat, vorzüglich wegen der Wichtigkeit derselben für die Theorie der Linsensysteme, mehrere Analysten, unter Anderen Euler, Lagrange, Libri und Binet beschäftigt. Nehmen wir

1) $$y_{x+2}=y_{x+1}+p_x y_x$$

als die aufzulösende Gleichung an, welche nach und nach

$$y_2 = p_0 y_0 + y_1$$
$$y_3 = p_0 y_0 + y_1 (1 + p_1)$$
$$y_4 = p_0 y_0 (1 + p_2) + y_1 (1 + p_1 + p_2)$$
$$y_5 = p_0 y_0 (1 + p_2 + p_3) + y_1 (1 + p_1 + p_2 + p_3 + p_1 p_3)$$

u. s. w. liefert, so haben die genannten Geometer, unter welchen ich besonders Binet hervorheben möchte, (*vid. Mémoires de l'Institut etc. T.* 19) hauptsächlich gestrebt, das combinatorische Gesetz anzugeben, nach welchem die Coefficienten von y_0 und y_1 in dem independenten Ausdrücke von y_x gebildet sind. Ich werde nun eine auf ganz neuen Principien beruhende Auflösung auseinandersetzen.

Bezeichnet man nämlich durch $P_{1,x}$ das Product der Factoren

$$\begin{array}{l} (1^{\alpha_1} + 1^{\alpha_2}).1^{-\alpha_1} \times \\ .(p_1 1^{\alpha_1} + 1^{\alpha_2} + 1^{\alpha_3}).1^{-\alpha_2} \\ .(p_2 1^{\alpha_2} + 1^{\alpha_3} + 1^{\alpha_4}).1^{-\alpha_3} \\ .(p_3 1^{\alpha_3} + 1^{\alpha_4} + 1^{\alpha_5}).1^{-\alpha_4} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ .(p_{x-4} 1^{\alpha_{x-4}} + 1^{\alpha_{x-3}} + 1^{\alpha_{x-2}}) 1^{-\alpha_{x-3}} \\ .(p_{x-3} 1^{\alpha_{x-3}} + 1^{\alpha_{x-2}} + 1^{\alpha_{x-1}}) 1^{-\alpha_{x-2}} \\ \times (p_{x-2} 1^{\alpha_{x-2}} + 1^{\alpha_{x-1}}) 1^{-\alpha_{x-1}}, \end{array}$$

und ebenso durch $P_{2,x}$ das Product

$$\begin{array}{l} (1^{\alpha_2} + 1^{\alpha_3}).1^{-\alpha_2} \times \\ .(p_2 1^{\alpha_2} + 1^{\alpha_3} + 1^{\alpha_4}).1^{-\alpha_3} \\ .(p_3 1^{\alpha_3} + 1^{\alpha_4} + 1^{\alpha_5}).1^{-\alpha_4} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ .(p_{x-3} 1^{\alpha_{x-3}} + 1^{\alpha_{x-2}} + 1^{\alpha_{x-1}}) 1^{-\alpha_{x-2}} \\ \times (p_{x-2} 1^{\alpha_{x-2}} + 1^{\alpha_{x-1}}).1^{-\alpha_{x-1}}, \end{array}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ lauter von einander unabhängige Variabeln vorstellen, und Kürze halber

$$\cos 2\pi\alpha + \sqrt{-1}\,\sin 2\pi\alpha = 1^\alpha$$

gesetzt wurde, so ist die allgemeine Auflösung der Gleichung 1):

$$y_x = p_0 y_0 \int\!\!\int\!\ldots\!\int_0^1 P_{2,x}\, \partial\alpha_2 \partial\alpha_3 \ldots \partial\alpha_{x-1} + y_1 \int\!\!\int\!\ldots\!\int_0^1 P_{1,x}\, \partial\alpha_1\, \partial\alpha_2 \ldots \partial\alpha_{x-1},$$

wo y_0 und y_1 die Stelle der willkührlichen Constanten vertreten.

Es ist leicht, sich durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung 1) nach einigen einfachen Transformationen von dessen Richtigkeit zu überzeugen, weshalb wir diess hier übergehen wollen. Die Methode,

welche mich zu vorstehendem Ausdrucke geführt hat, lässt sich auch leicht auf die linearen endlichen Differenzengleichungen höherer Ordnungen ausdehnen.

Ich bemerke nur noch bei dieser Gelegenheit, dass jede Determinante

$$\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$$

durch ein vielfaches Integral ausgedrückt werden könne. Setzt man nämlich das Product der Factoren

$$\begin{aligned} 1^{\alpha_1} . 1^{\alpha_2} . 1^{\alpha_3} \ldots 1^{\alpha_n} & \times (1^{\alpha_2} - 1^{\alpha_1}) \\ & \times (1^{\alpha_3} - 1^{\alpha_2})(1^{\alpha_3} - 1^{\alpha_1}) \\ & \times (1^{\alpha_4} - 1^{\alpha_3})(1^{\alpha_4} - 1^{\alpha_2})(1^{\alpha_4} - 1^{\alpha_1}). \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (1^{\alpha_n} - 1^{\alpha_{n-1}}) \ldots\ldots . (1^{\alpha_n} - 1^{\alpha_1}) \end{aligned}$$

gleich Q, und stellen S und Π die gebräuchlichen Summen- und Productenzeichen vor, so hat man

$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} = \int_0^1\!\!\int \ldots \int Q . \Pi^n_{\nu\,1}\, S^n_{\mu\,1}\, a_{\mu,\nu}\, 1^{-\nu \alpha_\mu} . \partial\alpha_1\, \partial\alpha_2 \ldots \partial\alpha_n,$$

oder auch

$$= \int_0^1\!\!\int \ldots \int Q . \Pi^n_{\mu\,1}\, S^n_{\nu\,1}\, a_{\mu,\nu}\, 1^{-\nu \alpha_\mu} . \partial\alpha_1\, \partial\alpha_2 \ldots \partial\alpha_n,$$

So ist z. B. für $n = 4$, wenn Q gleich

$$1^\alpha . 1^\beta . 1^\gamma . 1^\delta (1^\delta - 1^\gamma)(1^\delta - 1^\beta)(1^\delta - 1^\alpha) . (1^\gamma - 1^\beta)(1^\gamma - 1^\alpha) . (1^\beta - 1^\alpha)$$

und P gleich dem Producte

$$\begin{aligned} &(a_1\, 1^{-\alpha} + b_1\, 1^{-\beta} + c_1\, 1^{-\gamma} + d_1\, 1^{-\delta}) \\ &(a_2\, 1^{-2\alpha} + b_2\, 1^{-2\beta} + c_2\, 1^{-2\gamma} + d_2\, 1^{-2\delta}) \\ .\, &(a_3\, 1^{-3\alpha} + b_3\, 1^{-3\beta} + c_3\, 1^{-3\gamma} + d_3\, 1^{-3\delta}) \\ .\, &(a_4\, 1^{-4\alpha} + b_4\, 1^{-4\beta} + c_4\, 1^{-4\gamma} + d_4\, 1^{-4\delta}) \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$\Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3\, d_4 = \int_0^1\!\!\int\!\!\int\!\!\int P\, Q\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta.$$

XV. Aufstellung derjenigen linearen Differentialgleichung, welcher genügt wird durch folgendes particuläre Integrale:

$$y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log \left[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)\right] . du$$

Von Simon Spitzer, Professor für Merkantilrechnen an der Wiener Handelsakademie. Ich habe in der Abhandlung: Bemerkungen über die Integration der linearen Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

gezeigt, dass dieser Gleichung, in dem Falle, als der Bruch

$$\frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0}$$

eine Zerlegung auf folgende Weise gestatte:

$$m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}.$$

und A und B positive Zahlen sind, oder imaginäre mit positiven reellen Bestandtheilen, genügt wird, durch folgenden Ausdruck:

$$1) \qquad y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} u$$

und dass ferner, wenn

$$A + B = 1$$

ist, dass 2. particuläre Integral die Gestalt habe:

$$y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log \left[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)\right] du.$$

Ich will nun suchen jene lineare Differentialgleichung, welcher genügt wird durch den in 2) angegebenen Werth, wenn

$$A + B \gtrless 1$$

ist unter A und B ebenfalls positive oder imaginäre Zahlen mit positiven reellen Bestandtheilen verstanden.

Es ist, wie man sich durch unmittelbare Substitution und darauf vorgenommene Reduction überzeugt:

$$3) \quad (a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1 - b_2^2}{a_2 + b_2 x} \int_\alpha^\beta e^{ux} V \, du,$$

wenn y den in 2) angegebenen Werth hat, und

$$V = e^{mu} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}$$

ist. Setzt man der Kürze halber

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = P,$$

so ist die Gleichung 3) von folgender Gestalt:

$$4)\qquad (a_2+b_2x)P=(a_1b_2-a_2b_1-b_2^2)\int_\alpha^\beta e^{ux}V\,du.$$

Wird nun diese Gleichung zweimal nach einander differenzirt, so erhält man:

$$5)\qquad [(a_2+b_2x)P]'=(a_1b_2-a_2b_1-b_2^2)\int_\alpha^\beta u\,e^{ux}V\,du$$

$$6)\qquad [(a_2+b_2x)P]''=(a_1b_2-a_2b_1-b_2^2)\int_\alpha^\beta u^2e^{ux}V\,du$$

und multiplicirt man jetzt

die Gleichung 4) mit (a_0+b_0x)
" " 5) " (a_1+b_1x)
" " 6) " (a_2+b_2x)

und addirt die 3 so erhaltenen Producte, so erhält man einerseits:

$$(a_2+b_2x)[(a_2+b_2x)P]''+(a_1+b_1x)[(a_2+b_2x)P]' \\ +(a_0+b_0x)(a_2+b_2x)P,$$

andererseits aber erhält man Null, weil

$$y=\int_\alpha^\beta e^{ux}V\,du$$

ein Integral der Gleichung

$$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0$$

ist. — Es ist somit folgende lineare Differentialgleichung 4. Ordnung

$$(a_2+b_2x)[(a_2+b_2x)P]''+(a_1+b_1x)[(a_2+b_2x)P] \\ +(a_0+b_0x)(a_2+b_2x)P=0$$

diejenige, welche erfüllt wird, durch

$$y=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du,$$

wobei m, A, B, α, β hervorgehen aus der identischen Gleichung

$$\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+b_1u+b_0}=m+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta}$$

und A und B positiv sind, oder imaginär mit positiven reellen Bestandtheilen.

XVI. Ueber eine unendliche Reihe. Angesichts der bekannten Gleichung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

liegt es sehr nahe, die Summe der unendlichen für alle x convergirenden Reihe

$$1) \qquad F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.3} + \frac{x^3}{1.3.5} + \dots$$

aufzusuchen, worin die Nenner auf dieselbe Weise aus den ungeraden Zahlen gebildet sind wie die Nenner der Exponentialreihe aus den natürlichen Zahlen. Auch kann man nachher $x\sqrt{-1}$ an die Stelle von x treten lassen und die hieraus entspringenden neuen Funktionen

$$2) \qquad \Phi(x) = 1 - \frac{x^2}{1.3} + \frac{x^4}{1.3.5.7} - \frac{x^6}{1.3\dots 11} + \dots$$

$$3) \qquad \Psi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.3.5} + \frac{x^5}{1.3.5.7.9} - \dots$$

welche mit $F(x)$ durch die Gleichung

$$4) \qquad F(x\sqrt{-1}) = \Phi(x) + \sqrt{-1}\,\Psi(x)$$

verbunden sind, weiterer Betrachtung unterwerfen. Eine kurze Ausführung dieses Gedankens geben wir in Folgendem.

Nach einer sehr bekannten Formel ist

$$\frac{2.4.6\dots(2n)}{3.5.7\dots(2n+1)} = \int_0^1 (1-u^2)^n\,du$$

mithin

$$\frac{x^n}{3.5.7\dots(2n+1)} = \int_0^1 \frac{x^n(1-u^2)^n}{2^n.2.3\dots n}\,du;$$

wir setzen hier $n = 1, 2, 3, \dots$ und addiren alle entstehenden Gleichungen nebst der folgenden

$$1 = \int_0^1 du,$$

es wird dann

$$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3.5} + \frac{x^3}{3.5.7} + \dots = \int_0^1 e^{\frac{1}{2}x(1-u^2)}\,du.$$

Durch Multiplication mit x und beiderseitige Addition der Einheit ergiebt sich nun

$$5) \qquad F(x) = 1 + x\int_0^1 e^{\frac{1}{2}x(1-u^2)}\,du = 1 + x\,e^{\frac{1}{2}x}\int_0^1 e^{\frac{1}{2}xu^2}\,du.$$

Bei positiven x kann man noch die Substitution $\frac{1}{2}xu^2 = v$ anwenden und erhält

$$6)\qquad F(+x) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\, e^{\frac{1}{2}x} \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v}\, dv,$$

und entsprechend bei negativen x

$$7)\qquad F(-x) = 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\, e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{+v}\, dv.$$

Diese beiden Formeln zeigen, dass $F(x)$, je nachdem x positiv oder negativ ist, von der einen oder anderen der beiden Transcendenten

$$\int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v}\, dv \quad \text{und} \quad \int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{+v}\, dv$$

abhängt und daher nicht durch die einfachen Funktionen der Analysis ausgedrückt werden kann.

Bei positiven x ist die numerische Berechnung von $F(x)$ sehr einfach. Mittelst der Substitution $v = t^2$ wird nämlich

$$F(+x) = 1 + \sqrt{2x}\, e^{\frac{1}{2}x} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}x}} e^{-t^2}\, dt$$

$$= 1 + \sqrt{2x}\, e^{\frac{1}{2}x} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt - \int_{\sqrt{\frac{1}{2}x}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \right\}$$

d. i.

$$8)\qquad F(+x) = 1 + \sqrt{2x}\, e^{\frac{1}{2}x} \left\{ \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_{\sqrt{\frac{1}{2}x}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \right\},$$

und da bereits eine von Kramp berechnete, das Intervall $T = 0$ bis $T = 3$ umfassende Tafel des Integrales

$$\int_T^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

existirt, so kann man aus dieser unmittelbar die Werthe von $F(x)$ innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 18$ herleiten. Für grössere x bedient man sich einer halbconvergenten Reihe, welche bekanntlich durch mehrmalige Anwendung der Recursionsformel

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dv}{v^k} e^{-v} = \frac{1}{\xi^k} - k \int_{\xi}^{\infty} \frac{dv}{v^{k+1}} e^{-v}$$

erhalten wird. Diese Reihe ist

$$\int_{\xi}^{\infty}\frac{dv}{v^k}e^{-v}$$

$$=\frac{e^{-\xi}}{\xi^k}\left\{1-\frac{k}{\xi}+\frac{k(k+1)}{\xi^2}-\ldots+(-1)^n\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{\xi^n}\right\}$$

$$+(-1)^{n+1}k(k+1)\ldots(k+n)\int_{\xi}^{\infty}\frac{dv}{v^{k+n+1}}e^{-v};$$

im letzten Integrale liegt e^{-v} zwischen $e^{-\xi}$ und $e^{-\infty}=0$, mithin ist der Werth des Integrales zwischen 0 und

$$e^{-\xi}\int_{\xi}^{\infty}\frac{dv}{v^{k+n+1}}=e^{-\xi}\frac{1}{(k+n)\,\xi^{k+n}}$$

enthalten. Bezeichnet ϑ einen nicht näher bestimmten positiven ächten Bruch, so kann jenes Integral, der vorigen Bemerkung zufolge, unter der Form

$$\frac{\vartheta\, e^{-\xi}}{(k+n)\,\xi^{k+n}}$$

dargestellt werden. Für $k=\frac{1}{2}$ und $\xi=\frac{1}{2}x$ hat man also

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\infty}\frac{dv}{\sqrt{v}}e^{-v}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{\frac{1}{2}x}}\left\{1-\frac{1}{x}+\frac{1.3}{x^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{x^n}\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\vartheta\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{x^n}\right\},$$

woraus für $v=t^2$, $dv=2t\,dt$, das in Nr. 8 vorkommende Integral sogleich hervorgeht; nach Substitution dieses Werthes gelangt man zu der Gleichung

$$F(+x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi x}\,e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{x}-\frac{1.3}{x^2}+\frac{1.3.5}{x^3}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{x^n}+(-1)^{n+1}\vartheta\frac{1.3\ldots(2n-1)}{x^n},$$

worin der letzte Ausdruck den Rest der Reihe darstellt, dessen absoluter Werth immer einen Bruchtheil von dem absoluten Werthe des zuletzt gerechneten Reihengliedes ausmacht. Diese Formel gestattet eine sehr leichte Rechnung und zeigt ausserdem, dass $F(+x)$ um so weniger von $\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}\,e^{\frac{1}{2}x}$ differirt, je grösser x ist.

Bei negativen x kann man sich folgende Bemerkung zu Nutze machen. Nach Formel 5) ist

$$F(-x)=1-x\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x(1-u^2)}\,du$$

und für $1-u^2=\omega$

$$F(-x) = 1 - \tfrac{1}{2}x\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\omega}}\, e^{\;\frac{1}{2}x\omega}\, d\omega.$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}x\int\limits_0^1 \left(1 + \tfrac{1}{2}\omega + \frac{1.3}{2.4}\,\omega^2 + \ldots\right) e^{-\frac{1}{2}x\omega}\, d\omega;$$

durch Integration der einzelnen Glieder entsteht hieraus ein Resultat von der Form

$$10)\qquad F(-x) = 1 - X_0 - \tfrac{1}{2}X_1 - \frac{1.3}{2.4}\,X_2 - \ldots,$$

wobei zur Abkürzung

$$X_n = \tfrac{1}{2}x\int\limits_0^1 \omega^n\, e^{-\frac{1}{2}x\omega}\, d\omega$$

gesetzt worden ist. Den Werth von X_0 kennt man unmittelbar und hieraus leitet man die Werthe von X_1, X_2 etc. durch eine Recursionsformel ab, welche man durch theilweise Integration sogleich erhält; die Berechnung der X geht dann nach den Formeln

$$11)\qquad X_0 = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}, \quad X_n = \frac{2n}{x}\,X_{n-1} - e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Bei kleinen x ist es am bequemsten $F(-x)$ direct nach Nr. 1 zu berechnen, bei grossen x dagegen würde diese Formel unbrauchbar sein und dann bedient man sich der Formel 10).

Setzt man in der Gleichung 5) $x\sqrt{-1}$ für x und vergleicht beiderseits die reellen sowie die imaginären Theile, so gelangt man zu den beiden Formeln

$$\Phi(x) = 1 - x\int\limits_0^1 \sin\left[\tfrac{1}{2}x(1-u^2)\right] du,$$

$$\Psi(x) = x\int\limits_0^1 \cos\left[\tfrac{1}{2}x(1-u^2)\right] du,$$

woraus nach Auflösung der Sinus und Cosinus und nach Substitution von $\frac{1}{2}xu^2 = v$ die folgenden werden

$$\Phi(x) = 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\,\sin\tfrac{1}{2}x\int\limits_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\cos v}{\sqrt{v}}\, dv + \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\,\cos\tfrac{1}{2}x\int\limits_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin v}{\sqrt{v}}\, dv,$$

$$\Psi(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\,.\cos\tfrac{1}{2}x\int\limits_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\cos v}{\sqrt{v}}\, dv + \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\,\sin\tfrac{1}{2}x\int\limits_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin v}{\sqrt{v}}\, dv.$$

Diese Formeln zeigen, dass die Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ von den beiden Transcendenten

$$\int_0^\xi \frac{\cos v}{\sqrt{v}}\,dv \quad \text{und} \quad \int_0^\xi \frac{\sin v}{\sqrt{v}}\,dv$$

abhängen, und es ist diese Reduction namentlich in dem Falle von Vortheil, wo x einen so bedeutenden Werth hat, dass die unter Nr. 2) und 3) angegebenen Reihen ihre Brauchbarkeit verlieren. Wir setzen nämlich

$$\int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin v}{\sqrt{v}}\,dv = \int_0^\infty \frac{\sin v}{\sqrt{v}}\,dv - \int_{\frac{1}{2}x}^\infty \frac{\sin v}{\sqrt{v}}\,dv,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\cos v}{\sqrt{v}}\,dv = \int_0^\infty \frac{\cos v}{\sqrt{v}}\,dv - \int_{\frac{1}{2}x}^\infty \frac{\cos v}{\sqrt{v}}\,dv,$$

wo die beiden ersten Integrale rechter Hand den gemeinschaftlichen Werth $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ haben, und erhalten

$$12)\quad \Phi(x) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi x}\cos(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) + \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\int_{\frac{1}{2}x}^\infty \frac{\sin(\frac{1}{2}x - v)}{\sqrt{v}}\,dv,$$

$$13)\quad \Psi(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi x}\sin(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) - \sqrt{\tfrac{1}{2}x}\int_{\frac{1}{2}x}^\infty \frac{\cos(\frac{1}{2}x - v)}{\sqrt{v}}\,dv.$$

Um das erste der noch übrigen Integrale zu entwickeln gehen wir von der folgenden durch zweimalige theilweise Integration leicht zu beweisenden Reductionsformel aus

$$\int_\xi^\infty \frac{\sin(\xi - v)}{v^k}\,dv = -\frac{1}{\xi^k} - k(k+1)\int_\xi^\infty \frac{\sin(\xi - v)}{v^{k+2}}\,dv$$

und wenden dieselbe mehrmals nach einander an; diess giebt

$$\int_\xi^\infty \frac{\sin(\xi - v)}{v^k}\,dv$$

$$= -\frac{1}{\xi^k}\left[1 - \frac{k(k+1)}{\xi^2} + \ldots + (-1)^n \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+2n-1)}{\xi^{2n}}\right]$$

$$+ (-1)^n k(k+1)\ldots(k+2n+1)\int_\xi^\infty \frac{\sin(\xi - v)}{v^{k+2n+2}}\,dv$$

Das letzte Integral ist ein positiver oder negativer Bruchtheil von

$$\int_\xi^\infty \frac{1}{v^{k+2n+2}}\,dv = \frac{1}{(k+2n+1)\,\xi^{k+2n+1}}$$

und kann daher

$$=\frac{\varrho}{(k+2n+1)\,\xi^{k+2n+1}}$$

gesetzt werden, wenn ϱ eine nicht näher bekannte zwischen -1 und $+1$ liegende Grösse bezeichnet. Für $k=\frac{1}{2}$, $\xi=\frac{1}{2}x$ ist nun

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\infty}\frac{\sin(\frac{1}{2}x-v)}{\sqrt{v}}\,dv$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x}}\left[1-\frac{1.3}{x^2}+\frac{1.3.5.7}{x^4}-\ldots+(-1)^n\frac{1.3\ldots(4n-1)}{x^{2n}}\right]$$
$$+\varepsilon\frac{1.3.5\ldots(4n+1)}{\sqrt{\frac{1}{2}x}\,.\,x^{2n+1}},$$

wobei ε für $(-1)^n\varrho$ geschrieben wurde; die Gleichung 12) geht zufolge dieser Entwickelung in nachstehende über:

$$14)\qquad \Phi(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi x}\cos(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)$$
$$+\frac{1.3}{x^2}-\frac{1.3.5.7}{x^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(4n-1)}{x^{2n}}$$
$$+\varepsilon\frac{1.3.5\ldots(4n-1)(4n+1)}{x^{2n+1}}.$$

Die Gleichung 13) gestattet eine ganz ähnliche Behandlung und wird dann zur folgenden

$$15)\qquad \Psi(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi x}\sin(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)$$
$$-\frac{1}{x}+\frac{1.3.5}{x^3}-\ldots+(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(4n-3)}{x^{2n-1}}$$
$$+\varepsilon\frac{1.3.5\ldots(4n-3)(4n-1)}{x^{2n}}.$$

Abgesehen von den Resten, findet man dieselben Reihen, wenn man in Formel 9) $x\sqrt{-1}$ an die Stelle von x treten lässt, doch wäre diess keine genaue Ableitung der Gleichungen 14) und 15). Die Formel 9) verdankt nämlich mehrmaligen Integrationen zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}x$ und ∞ ihre Entstehung; diese Integrationen müssten nachher auf die Grenzen $\frac{1}{2}x\sqrt{-1}$ und ∞ bezogen werden und würden dabei, wie alle Integrale zwischen imaginären Grenzen, vieldeutig sein. Auch zeigt die verschiedene Form der Reste in in Nr. 9) und Nr. 14) oder 15), dass der Uebergang vom Reellen zum Imaginären hier nicht ohne Weiteres gestattet ist.

Die Formeln 14) und 15) sind bei einigermaassen grossen x sehr bequem zur numerischen Berechnung von $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$, sie geben ferner zu erkennen, dass $\Phi(x)$ um so genauer mit $\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}\cos(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)$ und $\Psi(x)$ um so näher mit $\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}\sin(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)$ zusammenfällt, je grösser x ist. Setzt man in Nr. 14) $x=\pm(2m+\frac{1}{2})\pi$, unter m eine ganze positive etwas grosse Zahl verstanden, so verschwindet der Cosinus, der Werth der Reihe beträgt nur wenig und es ist daher beinahe $\Phi(x)=0$. Man ersieht hier-

aus, dass die Gleichung $\Phi(x)=0$ unendlich viel reelle Wurzeln besitzt, welche um so genauer von der Form $x=\pm(2m+\frac{1}{2})\pi$ sind, je grösser die Zahl m ist; der Unterschied zweier aufeinander folgenden Wurzeln hat bei unendlich wachsenden m die Grösse 2π zur Grenze. An die Formel 15) knüpft sich eine ähnliche Consequenz; die Wurzeln der Gleichung $\Psi(x)=0$ sind näherungsweis von der Form $x=\pm(2m-\frac{1}{2})\pi$, und die Differenz zweier Nachbarwurzeln convergirt gleichfalls gegen die Grenze 2π. Will man die Wurzeln der Gleichungen $\Phi(x)=0$ und $\Psi(x)=0$ genauer berechnen, so nimmt man die ebenerwähnten Werthe als erste Näherungswerthe und corrigirt dieselben nach bekannten Methoden.

Wir berühren schliesslich noch mit wenigen Worten die Differentialgleichungen, denen die Functionen $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ genügen. Für die erste gilt, wie man aus Nr. 1) sehr leicht findet, die Beziehung

$$16)\qquad 2x\,F'(x)-(1+x)F(x)+1=0$$

und es ist daher $F(x)$ ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$17)\qquad 2x\,Y'-(1+x)\,Y+1=0.$$

Um das allgemeine Integral derselben zu erhalten, substituiren wir $Y=F(x)+z$ und gelangen mit Rücksicht auf Nr. 16) zu der Gleichung

$$2xz'-(1+x)\,z=0;$$

diese ist auf gewöhnlichem Wege integrabel und liefert

$$z=C\sqrt{x}\,e^{\frac{1}{2}x},$$

woraus folgt, dass

$$18)\qquad Y=C\sqrt{x}\,e^{\frac{1}{2}x}+F(x)$$

das allgemeine Integral der Gleichung 17) ist.

Man überzeugt sich ferner sehr leicht von der Richtigkeit der beiden Relationen

$$-2\Phi'(x)+\frac{1}{x}\,\Phi(x)-\frac{1}{x}=\Psi(x),\quad 2\Psi'(x)-\frac{1}{x}\,\Psi(x)=\Phi(x);$$

substituirt man den Werth von $\Psi(x)$ aus der ersten Gleichung in die zweite, so kommt

$$19)\qquad 4x^2\Phi''(x)-4x\,\Phi'(x)+(3+x^2)\,\Phi(x)-3=0,$$

und wenn umgekehrt $\Phi(x)$ aus der zweiten Gleichung in die erste eingesetzt wird,

$$20)\qquad 4x^2\,\Psi''(x)-4x\,\Psi'(x)+(3+x^2)\,\Psi(x)-x=0.$$

Zufolge der Gleichung 19) ist $\Phi(x)$ ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$21)\qquad 4x^2\,U''-4x\,U'+(3+x^2)\,U-3=0,$$

deren allgemeines Integral auf dieselbe Weise wie vorhin gefunden wird; dasselbe ist

$$22)\qquad U=A\sqrt{x}\,\cos(\tfrac{1}{2}x+\alpha)+\Phi(x),$$

worin A und α die willkührlichen Constanten bedeuten. Nach Nr. 20 genügt $\Psi(x)$ der Differentialgleichung

$$23)\qquad 4x^2 V'' - 4x V' + (3 + x^2) V - x = 0,$$

für deren allgemeines Integral sich ergiebt

$$24)\qquad V = B\sqrt{x}\,\sin(\tfrac{1}{2}x + \beta) + \Psi(x).$$

Da $F(x)$, $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ durch bestimmte Integrale ausgedrückt wurden, so sind die Integrale der erwähnten Differentialgleichungen in jener geschlossenen Form dargestellt, die man heut zu Tage als eine der besten für für die Integrale von Differentialgleichungen überhaupt anerkennt.

Schlömilch.

XVII. Ueber die Vergleichung zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel. Den gewöhnlichen Beweis des Satzes, dass das arithmetische Mittel aus beliebig vielen absoluten Zahlen grösser ist als deren geometrisches Mittel, eröffnet man mit der Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}(a_1 + a_2) > \sqrt{a_1 a_2},$$

man zieht hieraus die weiteren Relationen

$$\tfrac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) > \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4},$$

$$\tfrac{1}{8}(a_1 + a_2 + \ldots + a_8) > \sqrt[8]{a_1 a_2 \ldots a_8}$$

u. s. f.

und betrachtet zuletzt den allgemeinen Fall, bei welchem die Anzahl der vorhandenen Grössen keine Potenz der 2 ist (s. z. B. *Cauchy*, *Cours d'Analyse* p. 457—459). Diese Umständlichkeit lässt sich vermeiden, wenn man eine in die Lehre von den Wurzeln beliebiger Grade gehörende Ungleichung voraussetzen kann, die überhaupt wegen mancher anderer sich anknüpfender Folgerungen einen Platz in den Lehrbüchern der Arithmetik verdienen dürfte. Die Sache ist folgende.

Aus der bekannten, für $\alpha > \beta$ und jedes ganze positive n geltenden Ungleichung

$$1)\qquad (n+1)\alpha^n > \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} > (n+1)\beta^n$$

erhält man mittelst der Substitutionen

$$\alpha = \frac{n+z}{n+1}, \quad \beta = 1,$$

wobei die Bedingung $\alpha > \beta$ durch $z > 1$ ersetzt wird,

$$\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^{n+1} - 1 > z - 1,$$

oder nach Weglassung der Einheiten und Ausziehung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Wurzel

$$2)\qquad \frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}; \qquad z > 1.$$

Nimmt man zweitens

$$\alpha = 1, \qquad \beta = \frac{n+z}{n+1},$$

indem man $z < 1$ voraussetzt, um $\beta < \alpha$ zu erhalten, so findet man aus Nr. 1)

$$1 - z > 1 - \left(\frac{n+z}{n+1}\right)^{n+1},$$

und weiter

$$3) \qquad \frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}, \qquad z < 1.$$

Die Ungleichungen 2) und 3) führen zusammengenommen zu dem Satze, dass die Beziehung

$$\frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}$$

für jedes positive von der Einheit differirende z besteht. Mittelst der Substitution

$$z = \frac{y}{x^{\frac{1}{n}}}$$

erhält man daraus noch die folgende Ungleichung

$$4) \qquad n x^{\frac{1}{n}} + y > (n+1)(xy)^{\frac{1}{n+1}},$$

welche nur in dem Falle $x = y^n$ ihre Giltigkeit verliert und zu einer Gleichung wird.

Nach dieser Vorbereitung ist der Beweis des anfangs erwähnten Satzes sehr kurz. Für $n = 1$, $x = a$, $y = b$ hat man

$$a + b > 2(ab)^{\frac{1}{2}};$$

ferner ist

$$a + b + c > 2(ab)^{\frac{1}{2}} + c$$

und durch Anwendung der Formel 4) für $n = 2$, $x = ab$, $y = c$,

$$a + b + c > 3(abc)^{\frac{1}{3}}.$$

Addirt man beiderseits d und benutzt rechter Hand die Formel 4) für $n = 3$, $x = abc$, $y = d$, so gelangt man zu

$$a + b + c + d > 4(abcd)^{\frac{1}{4}},$$

u. s. w.

Das harmonische Mittel zweier Zahlen ist bekanntlich einerlei mit dem reciproken arithmetischen Mittel aus den reciproken Werthen der gegebenen Zahlen; dieser Eigenschaft entsprechend verstehen wir unter dem harmonischen Mittel aus den Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)}.$$

Um denselben mit dem geometrischen Mittel vergleichen zu können, gehen wir von der Ungleichung aus

$$\frac{1}{n}(a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1})$$

$$> (a_1^{n-1} a_2^{n-1} a_3^{n-1} \ldots a_n^{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

d. i.

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) a_1 a_2 \ldots a_n > (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1-\frac{1}{n}};$$

nach beiderseitiger Hebung mit $a_1 a_2 \ldots a_n$ giebt dies

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)}.$$

Das arithmetische Mittel ist also grösser als das geometrische und dieses wiederum grösser als das harmonische Mittel. SCHLÖMILCH.

XVIII. Zur praktischen Geometrie. Die geometrische Aufgabe: „ein Viereck ist durch Messung seiner Seiten und Diagonalen mehr als bestimmt; es sollen die wahrscheinlichsten Werthe dieser Dimensionen gefunden werden“, wird gewöhnlich mit Benutzung trigonometrischer Functionen aufgelöst; sie kann aber, wie es scheint, einfacher und kürzer mit Hilfe rechtwinkliger Coordinaten bearbeitet werden. Wir betrachten zu diesem Zwecke ein Viereck OP_1QP_2, worin die Linien $OP_1 = a_1$, $OP_2 = a_2$, $P_2Q = a_3$, $P_1Q = a_4$, $P_1P_2 = a_5$ und $OQ = a_6$ gemessen worden sind, nehmen O zum Anfangspunkte, OQ zur x-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems und bezeichnen die Coordinaten von P_1 und P_2 mit $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$. Berechnet man letztere aus der Diagonale OQ und den Seiten des Vierecks und leitet dann aus den so gefundenen Coordinaten die Länge der anderen Diagonale P_1P_2 ab, so giebt die Vergleichung derselben mit dem durch Messung für sie gefundenen Maasse eine Bedingungsgleichung.

Wären $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, X_1, X_2, Y_1, Y_2$ die wahren Werthe der mit dem kleinen Alphabet bezeichneten Linien, so bestände in aller Strenge die Bedingungsgleichung:

$$A_5^2 - (X_2 - X_1)^2 - (Y_2 - Y_1)^2 = 0.$$

Sind aber die entsprechenden Maasse Thatsachen, also mit Fehlern, wie klein diese auch sein mögen, behaftet, so wird zwischen dem aus der Messung hervorgegangenen a_5^2 und dem berechneten $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ein Unterschied k liegen. Wir haben also thatsächlich:

$$a_5^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 = k.$$

Wollen wir diesen Widerspruch aufheben und zu diesem Ende den

Maassen a_5, x_1, x_2, y_1, y_2 kleine Verbesserungen α_5, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ beifügen, so erhalten wir für diese die Bedingungsgleichung:

$$2a_5\alpha_5 + 2(x_2 - x_1)\mathfrak{x}_1 - 2(x_2 - x_1)\mathfrak{x}_2 + 2(y_2 - y_1)\mathfrak{y}_1 - 2(y_2 - y_1)\mathfrak{y}_2 = -k.$$

Es kann jetzt nur noch darauf ankommen, aus dieser Gleichung die Bedingungsgleichung für die Verbesserungen der durch Messung unmittelbar erhaltenen Maasse a_1, a_2, a_3 u. s. w., nämlich für α_1, α_2, α_3 u. s. w. zu entwickeln und zugleich diese Verbesserungen der Bedingung zu unterwerfen, dass die Summe ihrer Quadrate ein Minimum sein soll.

Wir haben zunächst:

$$x_1 = \frac{a_1^2 - a_4^2 + a_6^2}{2a_6}; \qquad y_1^2 = a_1^2 - x_1^2$$

$$x_2 = \frac{a_2^2 - a_3^2 + a_6^2}{2a_6}; \qquad y_2^2 = a_2^2 - x_2^2$$

sodann nach der Differenzirung:

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{a_1}{a_6}\alpha_1 - \frac{a_4}{a_6}\alpha_4 - \frac{a_1^2 - a_4^2 - a_6^2}{2a_6^2}\alpha_6 = \frac{a_1}{a_6}\alpha_1 - \frac{a_4}{a_6}\alpha_4 + \frac{a_6 - x_1}{a_6}\alpha_6$$

$$\mathfrak{x}_2 = \frac{a_2}{a_6}\alpha_2 - \frac{a_3}{a_6}\alpha_4 - \frac{a_2^2 - a_3^2 - a_6^2}{2a_6^2}\alpha_6 = \frac{a_2}{a_6}\alpha_2 - \frac{a_3}{a_6}\alpha_3 + \frac{a_6 - x_2}{a_6}\alpha_6$$

$$\mathfrak{y}_1 = \frac{a_1}{y_1}\alpha_1 - \frac{x_1}{y_1}\mathfrak{x}_1 = \frac{a_1(a_6 - x_1)}{a_6 y_1}\alpha_1 + \frac{a_4 x_1}{a_6 y_1}\alpha_4 - \frac{(a_6 - x_1)x_1}{a_6 y_1}\alpha_6$$

$$\mathfrak{y}_2 = \frac{a_2}{y_2}\alpha_2 - \frac{x_2}{y_2}\mathfrak{x}_2 = \frac{a_2(a_6 - x_2)}{a_6 y_2}\alpha_2 + \frac{a_3 x_2}{a_6 y_2}\alpha_3 - \frac{(a_6 - x_2)x_2}{a_6 y_2}\alpha_6$$

Werden diese Ausdrücke für $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ in die obige Bedingungsgleichung substituirt, so erhalten wir nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned}
-k = {} & 2\frac{a_1}{y_1}\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{a_6} + y_2 - y_1\right) \cdot \alpha_1 \\
& - 2\frac{a_2}{y_2}\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{a_6} + y_2 - y_1\right) \cdot \alpha_2 \\
& + 2\frac{a_3}{y_2}\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{a_6}\right) \cdot \alpha_3 \\
& - 2\frac{a_4}{y_1}\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{a_6}\right) \cdot \alpha_4 \\
& + \qquad 2a_5 \cdot \alpha_5 \\
& + 2\left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{a_6} + y_2 - y_1\right) \cdot \alpha_6
\end{aligned}$$

oder, wenn wir die vorstehenden Coefficienten der Verbesserungen der Reihe nach mit l_1, l_2, l_3 u. s. w. bezeichnen:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l_4\alpha_4 + l_5\alpha_5 + l_6\alpha_6 = -k.$$

Fügen wir nun dieser Gleichung die Minimalbedingung bei, nämlich:

$$\alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 + \alpha_3\alpha_3 + \alpha_4\alpha_4 + \alpha_5\alpha_5 + \alpha_6\alpha_6 = \text{Minimum},$$

und behandeln beide Gleichungen nach dem bekannten Verfahren der Methode der kleinsten Quadrate; differenziren wir sie, multipliciren wir das Differenzial der ersteren Gleichung mit einem unbestimmten Factor, etwa I,

setzen endlich die Coefficienten beider Gleichungen von $\partial \alpha_1$, $\partial \alpha_2$, $\partial \alpha_3$ u. s. w. einander gleich, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= l_1 \,.\, I \\ \alpha_2 &= l_2 \,.\, I \\ \alpha_3 &= l_3 \,.\, I \\ \alpha_4 &= l_4 \,.\, I \\ \alpha_5 &= l_5 \,.\, I \\ \alpha_6 &= l_6 \,.\, I \end{aligned}\right\},$$

und durch Substitution dieser Werthe in die erstere Gleichung:

$$I = \frac{-k}{l_1 l_1 + l_2 l_2 + l_3 l_3 + l_4 l_4 + l_5 l_5 + l_6 l_6},$$

endlich durch Anwendung des so gefundenen Zahlenwerthes für I der Reihe nach α_1, α_2, α_3 u. s. w.

Die scheinbare Schwerfälligkeit der Ausdrücke für die Coefficienten l_1, l_2, l_3 u. s. w. vermindert sich erheblich durch den Umstand, dass die zusammengesetzten Factoren ganz oder theilweise mehreren Gliedern der Bedingungsgleichung gemeinschaftlich sind.

Der geneigte Leser möge entschuldigen, wenn ich dieses an einem praktischen Beispiele zu zeigen suche.

Zur Herstellung eines Mikrometers maass der Herr Professor Gerling (Ausgleichungsrechnungen Seite 315)*) auf einer Spiegelfläche vermittelst eines Transversal-Maassstabes die sechs Dimensionen eines eingeritzten Vierecks und zwar:

$a_1 = 4{,}06$ Millim. es ist also $a_1^2 = 16{,}4836$
$a_2 = 30{,}03$ „ „ „ „ $a_2^2 = 901{,}8009$
$a_3 = 3{,}85$ „ „ „ „ $a_3^2 = 14{,}8225$
$a_4 = 30{,}13$ „ „ „ „ $a_4^2 = 907{,}8169$
$a_5 = 30{,}21$ „ „ „ „ $a_5^2 = 912{,}6441$
$a_6 = 30{,}98$ „ „ „ „ $a_6^2 = 959{,}7604$

Durch Zusammensetzung der Quadrate finden wir:

$$a_1^2 - a_4^2 + a_6^2 = 68{,}4271 = M$$
$$a_2^2 - a_3^2 + a_6^2 = 1846{,}7388 = N$$

und dann in gewöhnlicher Weise

$$\log x_1 = \log \frac{M}{2a_6} = 0{,}0431167; \qquad x_1 = +\ 1{,}10437$$
$$\log x_2 = \log \frac{N}{2a_6} = 1{,}4742941; \qquad x_2 = +\ 29{,}80534$$
$$\log y_1 = \tfrac{1}{2} \log (a_1 + x_1)(a_1 - x_1) = 0{,}5918337_n; \qquad y_1 = -\ 3{,}90691$$
$$\log y_2 = \tfrac{1}{2} \log (a_2 + x_2)(a_2 - x_2) = 0{,}5642418; \qquad y_2 = +\ 3{,}66642$$

Ferner:

$$2 \log (y_2 - y_1) = 1{,}7585737; \quad (y_2 - y_1)^2 = 57{,}35532$$
$$2 \log (x_2 - x_1) = 2{,}9157937; \quad (x_2 - x_1)^2 = 823{,}74568$$

Quadrat des gemessenen $a_5 = 912{,}64410$

Fehler $k = +\ 31{,}5431$,

*) Hamburg bei Perthes 1843.

durch Zusammensetzung obiger Logarithmen:

$$\log x_2 y_1 = 2{,}06613_n;\quad x_2 y_1 = -116{,}447$$

$$\log x_1 y_2 = 0{,}60736;\quad x_1 y_2 = +\ \ 4{,}049$$

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = -120{,}496$$

$$\log (x_2 y_1 - x_1 y_2) = 2{,}08097_n$$

$$Cp.\ \log a_6 = 8{,}50892$$

$$\log \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{a_6} = 0{,}58989_n;\quad \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{a_6} = -3{,}8895 = P$$

$$y_2 - y_1 = +7{,}5733$$

$$\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{a_6} + y_2 - y_1 = 3{,}6838 = Q$$

$$\log \frac{x_2}{y_2} = 0{,}91005;\quad \frac{x_2}{y_2} = +8{,}1293$$

$$\log \frac{x_1}{y_1} = 9{,}45128;\quad \frac{x_1}{y_1} = -0{,}2827$$

$$\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_1}{y_1} = +8{,}4120 \qquad = R.$$

Nach dieser Vorbereitung ist die Ausgleichungs-Rechnung:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
	+	—	+	—	+	+	
log 2 =	0,30103	0,30103	0,30103	0,30103	0,30103	0,30103	
log Q =	0,56631	0,56631				0,56631	
log P =			$0{,}58989_n$	$0{,}58989_n$			
log a =	0,60853	1,47756	0,58546	1,47900	1,48015		
log R =						0,92490	
Comp. log y =	$9{,}40817_n$	9,43576	9,43576	$9{,}40817_n$			
log l =	$0{,}88404_n$	$1{,}78066_n$	$0{,}91214_n$	$1{,}77809_n$	1,78118	1,79224	
2 *log l* =	1,76808	3,56132	1,82428	3,55618	3,56236	3,58448	
[*ll*] =	58,6	+3141,8	+ 66,7	+3599,0	+3650,6	+3841,3	= 14858,0
log [*ll*] =							= 4,17196
log k =							$= 1{,}49890_n$
$\log \frac{[ll]}{k} = \log I =$							$= 7{,}32694_n - 10$
log l . I =	8,21098	9,10760	8,23908	9,10513	$9{,}10812_n$	9,11918	
α =	+0,0163	+0,1281	+0,0173	+0,1274	-0,1283	-0,1316	
Herr Professor Gerling fand:	+0,0164	+0,1282	+0,0173	+0,1277	-0,1285	-0,1296	

Bei der Längenmessung auf einem Transversal-Maassstabe kann von einer Verschiedenheit in der Zuverlässigkeit der gefundenen Maasse nicht die Rede sein, daher in der Rechnung jedem das Gewicht i zugedacht wurde. Hätte es sich aber um ein im Felde mit der Messlatte oder der Messkette gemessenes Viereck gehandelt, so dürfte nicht unberücksichtigt

bleiben, dass auf einer kürzeren Linie ein so grosser Fehler als auf einer längeren nicht vermuthet werden kann. Das Ausgleichungsverfahren hätte dann einer, die Zuverlässigkeitsverhältnisse berücksichtigenden Abänderung bedurft. Von den Verbesserungen der Längen selbst hätten wir auf jene der Maasseinheit zurückgehen müssen, die wir im Allgemeinen mit dem Buchstaben ε bezeichnen wollen. Wir hätten gesetzt:

$$l_1 a_1 \varepsilon_1 + l_2 a_2 \varepsilon_2 + l_3 a_3 \varepsilon_3 + l_4 a_4 \varepsilon_4 + l_5 a_5 \varepsilon_5 + l_6 a_6 \varepsilon_6 = -k$$

$$a_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3 \varepsilon_3 + a_4 \varepsilon_4 \varepsilon_4 + a_5 \varepsilon_5 \varepsilon_5 + a_6 \varepsilon_6 \varepsilon_6 = \text{Minimum.}$$

Demnächst

$$\alpha_1 = a_1 \varepsilon_1 = l_1 a_1 \,.\, I$$

$$\alpha_2 = a_2 \varepsilon_2 = l_2 a_2 \,.\, I$$

$$\alpha_3 = a_3 \varepsilon_3 = l_3 a_3 \,.\, I$$

u. s. w.

endlich:

$$I = \frac{-k}{a_1 l_1 l_1 + a_2 l_2 l_2 + a_3 l_3 l_3 + a_4 l_4 l_4 + a_5 l_5 l_5 + a_6 l_6 l_6}.$$

Minden, den 24. October 1857. J. J. Vorländer.

XIX. Ueber das Verhalten eines kleinen Springbrunnens innerhalb einer elektrischen Atmosphäre. Von Albert Fuchs, Professor am evangel. Lyceum zu Pressburg. (Aus den „Verhandlungen des im Jahre 1856 gegründeten Vereins für Naturkunde zu Pressburg“ Jahrg. 1, Sitzungsberichte §. 79.) Lässt man das Wasser eines kleinen Springbrunnens durch eine so kleine Oeffnung strömen, dass ein Druck von beiläufig 26″ den Strahl kaum 12″ treibt, so wird sich dasselbe in viele kleine Tropfen auflösen, die in Parabeln von sehr kleinen Parametern nach allen Seiten auseinander gehen und nicht weit von der Oeffnung niederfallen. Bringt man in die Nähe dieses Strahles einen elektrisirten Körper, etwa ein mit Seide geriebenes Glasrohr, so wird in dem Abstand von 4 bis 5 Schritten alles Tropfenwerfen aufhören, der Strahl zieht sich in eine Säule zusammen, und steigt, ähnlich dem Pistille einer Lilie, vollkommen ungetheilt in die Höhe. Hält man den elektrischen Körper ganz nahe an den Strahl, so stiebt er in äusserst feinen Tröpfchen auseinander. Die Erscheinung ist dieselbe, ob man Glas- oder Harzelektrisität anwendet, sie wird nur modificirt durch die Stärke des Springbrunnens und durch die Kraft der Elektricität des genäherten Körpers.

Die Ursache der Erscheinung mag in Folgendem liegen. Das Tropfenwerfen des ursprünglichen Strahls ist eine rein mechanische Wirkung der Adhäsion des Wassers an den Wänden des Mundstücks, verbunden mit der freiern Bewegung der Wassertheilchen in der Axe des Strahls. Hält man

den elektrischen Körper in grösserer Distance, so werden die einzelnen, nicht elektrischen und isolirten Tropfen durch Vertheilung elektrisch, und wenden sich wechseitig die entgegengesetzt elektrischen Seiten zu; sie ziehen sich hiermit an und der Strahl wird eine ungetheilte Säule. Bringt man den elektrischen Körper ganz nahe, so wird die ganze Masse des Wassers durch Vertheilung stark homogen elektrisch, die kleinsten Wassertheilchen stossen sich ab, und werden nun eines Theils durch elektrische, andern Theils durch mechanische Kräfte aus einander geworfen.

Im ersten Theile der erwähnten „Verhandlungen", welcher die Abhandlungen der Gesellschaft enthält, wird die eben beschriebene Erscheinung vom Herrn Verfasser ausführlicher untersucht. Unter anderen wird darin die grosse Empfindlichkeit eines feinen Springbrunnens hervorgehoben, die so beträchtlich sei, dass sie der eines Goldblatt-Elektrometers, nicht nur gleichkomme, sondern auch sie bei feuchter Luft übertreffe. Hält man z. B. den Kopf in 12 bis 18 Zoll Entfernung, und fährt mit der Hand nur einmal durch die Haare, so zieht sich der Strahl augenblicklich zusammen, wenn auch nur auf kurze Zeit. Schliesslich wird folgendes angeführt: „Als vor ungefähr 20 Jahren zu Egerdes (Ungarn) in der Werkstatt des Mechanikus Gustav Liedemann, der sich auch mit Anfertigung von physikalischen Schulapparaten beschäftigte, Experimente mit einem Elektrophor angestellt wurden, hat man zufällig an einem in der Nähe springenden Heronsbrunnen das Zusammenziehen des Wasserstrahls bemerkt."

XX. Von einer ökonomischen Art, einen elektrischen Strom durch den Erdmagnetismus zu erzeugen. Von Herrn Lamy. (*Compt. rend. T. XLV., p.* 807.) Bekanntlich giebt es in jeder Dampfmaschine ein Rad von Gusseisen, um die Bewegung zu regeln, d. i. das Schwungrad. Im Zustand der Ruhe wird dasselbe vom Erdkörper magnetisirt; desgleichen auch während seiner Bewegung, aber der Magnetismus ist anders vertheilt und er verändert sich beständig in einem gegebenen Stück der Felge. Umwickelt man daher einen Theil dieser Felge, winkelrecht gegen ihre Richtung, mit einem mit Seide oder Baumwolle übersponnenen Draht, so hat man eine Drahtrolle, ähnlich wie in der Clarke'schen Maschine, mit dem Unterschiede jedoch, dass sie sich nicht vor künstlichen Magneten, sondern vor dem Magnet der Erde dreht. Ueberdiess kann man wegen der Grösse des metallischen Kerns die Menge des Kupferdrahtes bedeutend vermehren, ehe man die Grenze der inductiven Wirkung erreicht, und damit vermehrt man zugleich sehr den Widerstand der Kette und die Spannung des Stromes. — Man wird bemerken, dass man durch diese Einrichtung eine nothwendige Be-

wegung benutzt. Einige Dutzende Kilogramme Draht, hinzugefügt zu einem Schwungrad von 4 bis 5000 Kilogramm, können nicht als ein beträchtlicher Widerstand oder als schädlich für den Effect der Maschine betrachtet werden, weil ein bedeutendes Gewicht nothwendig ist für die Regelmässigkeit des Ganges und der Arbeit. — Die besondere Abhandlung hierüber giebt an: Die Dimensionen, das Gewicht und die Orientirung des benutzten Schwungrades, den Magnetismus desselben im Zustand der Ruhe und Bewegung, den directen Einfluss der Erde auf die Drahtwindungen der Felge und endlich die Grenzlängen, die für die Umdrehungsgeschwindigkeit des Schwungrades den Drahtgewinden zu geben sein dürften. Es wurden drei Drahtgewinde von 27 bis 33 Centimeter Länge respective mit Kupferdraht von $1^{mm},85$, $1^{mm},1$ bis $1^{mm},4$ und $0^{mm},6$ bis $0^{mm},62$ Dicke construirt, Der Draht Nr. 1 war 600 Meter lang, Nr. 2 2000, und Nr. 3 5450 Meter. — Mit der Rolle Nr. 2 erhielt man einen schwachen Funken, aber energische Schläge durch den Extrastrom. Nr. 3 allein oder, der Länge nach, mit Nr. 2 verbunden gab Spannungseffecte, die denen der Säule von zwei Bunsen'schen Elementen vergleichbar waren. Alle dem Versuchen unterworfenen Salzlösungen, Brunnenwasser, selbst destilirtes, vollkommen reines Wasser, wurden bei Anwendung von Elektroden aus Platindrähten zersetzt.

Wo ein eisernes Schwungrad vorhanden ist, können auf diese ökonomische Weise elektrische Ströme erzeugt werden, und die Möglichkeit, nützliche Anwendung hiervon zu machen, möchte nicht ganz abgewiesen werden.

XXI. Akustisches Phänomen. Von Prof. Dr. Meister. In der Geschichte der Akustik finden wir Fälle aufgezählt, dass Gläser durch Hineinschreien zersprengt wurden, und neben diesen werden auch Fälle angeführt, wobei ein solches Zerspringen eingetreten sein soll, wenn der dem Glase eigenthümliche Ton auf einer Violinsaite stark angegeben worden war, allein letztere Thatsachen werden von Vielen bezweifelt, daher glaube ich nachstehende wohlverbürgte Thatsache mit Nebenumständen veröffentlichen zu müssen.

Im Laufe des vorigen Monats, der auch hier ein ungewöhnlich warmer war, zersprang plötzlich während des Clavierunterrichts in einem Privathause ein sogenanntes (ziemlich dickes) Schoppenglas, das leer auf einem Porzellanteller und Komodenkasten in einiger Entfernung vom Clavier gestanden hatte, und zwar laut Mittheilung des Unterrichtenden (es ist der sehr tüchtige und gründliche Musiklehrer des hiesigen Schullehrer-Seminars Herr Kirnberger) und der gleichzeitig anwesenden, ebenfalls musikalischen Mutter der Schülerin unter folgenden nähern Umständen und Erscheinungen: Die Schülerin, welche einen kräftigen Anschlag hat, spielte das *gis* der zweigestrichenen Octave, welches zufällig im Instrumente stärker

als die übrigen Töne klingt, mit voller Kraft an; gleichzeitig vernahm man mit diesem Tone einen anderen der Höhe nach gleichliegenden, der sich jedoch von dem Tone des Instruments durch ein eigenthümliches „Schrillen oder Gellen" unterschied und gleich darauf sahen die Anwesenden, dass das erwähnte Glas, aus dem kurz vorher ein Brausetrank genommen worden, zersprungen war, und zwar war der Bruch ein peripherischer laut Autopsie etwas über dem dicken Boden hinlaufender, doch hielt dasselbe vorerst noch zusammen. Dieses zersprungene Glas gab darauf einen (um eine Quarte) tiefern Ton.

Dieses sind die nähern von den verlässigsten Zeugen constatirten Umstände des akustisch-merkwürdigen Factums.

(*Poggend. Ann. Bd.* 102, *p.* 479.)

XXII. Neue stereoskopische Erscheinung. Herr Cima, Professor der Physik in Turin, hat dem Herausgeber des Kosmos (p. 353. Vol. XI. seiner Zeitschrift), die Beschreibung eines stereoskopischen Versuchs übersandt, der nicht ohne Interesse ist. Er nimmt eine Abbildung, gleichviel in Kreide, Steindruck oder Kupferstich, die einen Kopf von vorne darstellt, etwa 3 bis 4 Centimeter hoch. Diese schneidet er in 2 Theile, längs einer Linie, die mit der Verticalaxe der Nase zusammenfällt; mit jeder Hand fasst er eine dieser Hälften und, beide immer in derselben lothrechten Ebene haltend, bringt er sie vor den Augen in einen Abstand, der kleiner ist, als der des deutlichen Sehens; dann lässt er die gleichen Achsen convergiren, und nähert oder entfernt die beiden Zeichnungen, bis es ihm gelingt von jeder derselben zwei Bilder zu sehen und bis die beiden mittleren Bilder sich decken, so dass sie den Eindruck eines ganzen Gesichts machen. Wenn man diesen Versuch zum ersten Male macht, sagt Herr Cima, wird man mit Erstaunen sehen, dass dass Vollgesicht, welches so mit aus der Ueberdeckung der Bilder beider Hälften entstanden ist, in sehr hohem Grade den Eindruck eines körperlichen Gegenstandes macht. Die Halbdunkel zerfliessen und vermischen sich wie in einer modellirten Figur; die Nase sondert sich sehr gut vom Gesichte ab; Augenbraunen, Lippen und Kinn sind sehr hervortretend, die ganze Gestalt hebt sich ab von dem Grunde, auf dem sie gezeichnet ist, und gewinnt einen auffallenden, man möchte sagen, lebenden Ausdruck. Der zur Hervorbringung des grössten Effectes erforderliche Abstand der beiden Halbgesichter von einander und von den Augen des Beobachters ist verschieden von einem Individuum zum andern und kann nur durch Probiren gefunden werden. Je mehr man die beiden Bilder fixirt, desto mehr verstärkt sich die Empfindung des Reliefs.

X.

Ueber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik,

oder

das Princip des kleinsten Zwanges, sowie über ein anderes neues Grundgesetz der Mechanik mit einer Excursion über verschiedene, die mechanischen Principien betreffenden Gegenstände.

Vom Baurath Dr. Hermann Scheffler.

1.

Entwicklung des Gauss'schen Gesetzes.

In der Abhandlung Nr. 18 des Crelle'schen Journals für Mathematik Band 4, S. 232, hat unser grosser Mathematiker Gauss die Mechanik durch ein allgemeines Grundgesetz bereichert, welches neben dem d'Alembertschen Principe und dem der virtuellen Geschwindigkeiten in keinem Lehrbuche der analytischen Mechanik fehlen sollte, da dasselbe für sich allein, ohne Zuhilfenahme eines zweiten Grundsatzes, zur Bestimmung der Bewegung und des Gleichgewichtes irgend eines Systemes von Körpern vollkommen ausreicht, also zur Grundlage der gesammten Mechanik genommen werden kann. Wenngleich die höhere principielle Einfachheit des Gauss'schen Gesetzes nicht immer eine grössere praktische Einfachheit oder analytische Kürze bei der Behandlung specieller Fälle bedingt, vielmehr in manchen Fällen das d'Alembert'sche Princip in Verbindung mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten eine leichtere Handhabung gestattet; so giebt es doch auch Fälle, wo das Gauss'sche Gesetz eine directere und bequemere Verwendung zulässt: ausserdem aber deckt dasselbe eine höchst interessante Eigenschaft jedes in Bewegung und jedes in Gleichgewicht befindlichen Körpersystems auf, welche an sich schon zu manchen wichtigen Betrachtungen Veranlassung giebt, zumal darin ein Kriterium der Gesetze in Bewegung und der Ruhe mit gleicher Allgemeinheit ausgedrückt ist.

Dass dieses Gesetz sich nicht einer allgemeineren Bekanntschaft erfreut, hat vielleicht seinen Grund in der dem Erfinder eigenen gelehrten Kürze der Darstellung, wodurch das eigentliche Wesen jenes Gesetzes, und seine Beziehung zu den übrigen allgemeinen Grundgesetzen der Mechanik

Manchem nicht klar genug vor Augen getreten sein mag. Demnach dürfte es rathsam sein, die Aufmerksamkeit des mathematischen Publikums auf jenes wichtige Gesetz mit einigem Nachdruck zu lenken und zu diesem Ende das Gesetz selbst etwas ausführlicher zu erläutern und die Anwendung desselben an speciellen Fällen zu veranschaulichen.

Ausserdem aber werden wir diese Gelegenheit zu einer weitern Digression über die Grundgesetze der Mechanik benutzen und selbst noch ein neues hinzufügen.

Gauss definirt sein Gesetz, welches man dem d'Alembert'schen Principe gegenüber füglich das Gauss'sche Princip oder nach seinem Inhalte das Princip des kleinsten Zwanges nennen kann, wörtlich folgendermaassen:

„Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblicke in möglich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, oder **unter möglich kleinstem Zwange**, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.“

Sind also (Taf. II., Fig. 1)

$m, m', m'' \ldots$ die Massen der materiellen Punkte,

$a, a', a'' \ldots$ ihre Plätze zur Zeit t,

$b, b', b'' \ldots$ die Plätze, welche sie nach dem unendlich kleinen Zeittheilchen dt, in Folge der während dieser Zeit auf sie wirkenden (darauf angebrachten) Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten und Richtungen annehmen würden, wenn sie alle vollkommen frei wären,

$c, c', c'' \ldots$ die Plätze, welche sie am Ende des Zeittheilchens dt wirklich einnehmen;

so sind diese wirklichen Plätze nach dem obigen Princip von allen mit den Bedingungen des Systems vereinbarlichen Plätzen diejenigen, für welche der Ausdruck

$$1) \qquad m(cb)^2 + m'(c'b')^2 + m''(c''b'')^2 + \ldots$$

ein Minimum wird.

Das Gleichgewicht ist offenbar nur ein specieller Fall des allgemeinen Bewegungsgesetzes. Da hierfür die wirklichen Plätze $c, c', c'' \ldots$ mit den ursprünglichen $a, a', a'' \ldots$ zusammenfallen, insofern das Gleichgewicht im Zustande der Ruhe besteht, so muss für ein im Gleichgewichte befindliches System der Ausdruck

$$2) \qquad m(ab)^2 + m'(a'b')^2 + m''(a''b'')^2 + \ldots \text{ ein Minimum}$$

sein. Hieraus folgt zugleich, dass das Beharren des Systems im Zustande der Ruhe der freien Bewegung der einzelnen Punkte näher liege, als jedes mögliche Heraustreten aus demselben.

Das Gauss'sche Gesetz lässt sich aus den d'Alembert'schen und dem der virtuellen Geschwindigkeiten folgendermaassen ableiten. Es sei (Taf. II., Fig. 2)

p, die auf den materiellen Punkt a angebrachte Kraft, welche während des Zeittheilchens dt wirkt und diesen Punkt, wenn er vollkommen frei wäre, unter Berücksichtigung der am Ende der Zeit t erlangten Geschwindigkeit und Richtung nach b führen würde,

q, die durch die Verbindung des Systemes erzeugte, auf den Punkt a wirkende Kraft, in Folge welcher derselbe in der Zeit dt als ganz freie Masse aus dem Zustande der Ruhe von b nach c abgelenkt wird,

r, die Resultante von p und q, durch deren Wirkung der Punkt a während des Zeittheilchens dt unter Berücksichtigung der am Ende der Zeit t erlangten Geschwindigkeit und Richtung als ganz freie Masse wirklich von a nach c gelangt, also die sogenannte wirksame Kraft für den Punkt a.

Da der Punkt a unter der Wirkung der Kraft p und der Verbindungen des Systems sich so bewegt, wie wenn er frei und lediglich von der Kraft r afficirt wäre, so folgt, dass wenn ausser jener Kraft p die Kraft r in entgegengesetzter Richtung, also die Kraft $-r$ auf ihn angebracht wäre, wenn er mithin unter den übrigen Bedingungen des Systems der aus p und $-r$ zusammengesetzten Kraft $-q$, welche den ganz freien Punkt in der Zeit dt durch den Raum cb führen würde, ausgesetzt wäre, das System sich im Zustande des Geichgewichtes befinden müsste. In der That stellen die Kräfte $-q$, $-q'$, $-q''$... die sogenannten verlorenen Kräfte dar, welche sich nach dem d'Alembert'schen Principe unter den übrigen Bedingungen des Systems im Gleichgewichte erhalten müssen.

Wenden wir, um die Bedingungsgleichung für dieses Gleichgewicht aufzustellen, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten an, so seien γ, γ', γ''... von c, c', c''... verschiedene, aber mit den Bedingungen des Systems verträgliche Plätze, in welche die Punkte a, a', a''... während der Zeit dt möglicherweise gelangen könnten. Offenbar sind jetzt $c\gamma$, $c'\gamma'$, $c''\gamma''$... auch die virtuellen Bewegungen, welche die Punkte c, c' c''... nach den Verbindungen des unter den Kräften $-q$, $-q'$, $-q''$... im Gleichgewichte befindlichen Systems annehmen könnten.

Fällt man von jedem dieser Punkte γ, γ', γ''..., z. B. von γ (Taf. II., Fig. 3) auf cb das Perpendikel $\gamma\beta$, so ist, da die Kraft $-q$ parallel zu cb wirkt, $-q(c\beta)$ das virtuelle Moment dieser Kraft, oder wenn man die Winkel $bc\gamma$, $b'c'\gamma'$, $b''c''\gamma''$..., welche $c\gamma$, $c'\gamma'$, $c''\gamma''$... mit cb, $c'b'$, $c''b''$... einschliessen, resp. mit φ, φ', φ'' ... bezeichnet, so sind $-q(c\gamma)\cos\varphi$,

$-q'(c'\gamma')\cos\varphi'$, $-q''(c''\gamma'')\cos\varphi''\ldots$ die virtuellen Momente der Kräfte $-q, -q', -q''\ldots$.

Da die Kraft $-q$ von der Art ist, dass sie die als ganz **frei** gedachte Masse m in der Zeit dt aus dem Zustande der Ruhe durch den Raum cb treiben würde; so ist sie dem Produkte $m(cb)$ proportional. Setzen wir also für die Kräfte $-q, -q'', -q''\ldots$ die ihnen proportionalen Werthe $m(cb)$, $m'(c'b')$, $m''(c''b'')\ldots$; so sind ihre virtuellen Momente

$$m(cb)(c\gamma)\cos\varphi,\quad m'(c'b')(c'\gamma')\cos\varphi',\quad m''(c''b'')(c''\gamma'')\cos\varphi''\ldots$$

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten muss die Summe dieser Momente **gleich Null** sein. Man hat also

$$3)\qquad \Sigma m(cb)(c\gamma)\cos\varphi = 0.$$

Da nun

$$(\gamma b)^2 = (cb)^2 + (c\gamma)^2 - 2(cb)(c\gamma)\cos\varphi$$

oder

$$4)\qquad (cb)^2 = (\gamma b)^2 - (c\gamma)^2 + 2(cb)(c\gamma)\cos\varphi$$

also

$$\Sigma m(cb)^2 = \Sigma m(\gamma b)^2 - \Sigma m(c\gamma)^2 + 2\Sigma m(cb)(c\gamma)\cos\varphi$$

ist; so folgt wegen Gleichung 3)

$$5)\qquad \Sigma m(cb)^2 = \Sigma m(\gamma b)^2 - \Sigma m(c\gamma^2).$$

Die Länge cb ist die **wirkliche** Abweichung der Masse m von der **freien** Bewegung, γb stellt **jede mögliche andere** Abweichung dar. Da nun nach Gleichung 5) $\Sigma m(cb)^2$ stets $< \Sigma m(\gamma b)^2$ ist, so liegt darin der Beweis des oben ausgesprochenen **Princips des kleinsten Zwanges**, wonach nämlich die Summe der Produkte der wirklichen Ablenkungen der einzelnen materiellen Punkte vor der freien Bewegung in die Massen dieser Punkte ein Minimum, d. h. kleiner ist, als die Summe der Produkte irgend welcher andern nach den Bedingungen des Systems möglicher Ablenkungen in dieselben Massen.

Für das Gleichgewicht im Zustande der Ruhe wird Gleichung 5)

$$5\text{a})\qquad \Sigma m(ab)^2 = \Sigma m(\gamma b)^2 - \Sigma m(a\gamma)^2.$$

2.

Erläuterung dès Gauss'schen Gesetzes.

Das vorstehende Gesetz macht einige Erläuterungen wünschenswerth, und für gewisse Fälle ist behuf der Anwendung desselben eine Transformation der Gleichung 5) oder des Wortlautes des darin liegenden Princips durchaus nothwendig.

Wenn die auf eine freie Masse m wirkende Kraft p fähig ist, dieser Masse in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit g zu ertheilen, so dass g die Beschleunigung der Kraft p in der Masse m darstellt, so besteht bekanntlich die Beziehung

$$6)\qquad p = mg.$$

Der vom Zustande der Ruhe aus in der Zeit t durchlaufene Weg s ist

7) $$s = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

In dem Zeitelemente dt wird der Weg $ds = gt\,dt$ durchlaufen. Dieser Weg würde für das erste Zeitelement, welches auf den Zustand der Ruhe folgt, für welches man also $t = 0$ hat, nach dieser Formel selbst $= 0$ werden. Dieses Nullwerden von ds für $t = 0$ lehrt aber nur, dass für $t = 0$ der Werth von ds nicht mehr eine unendlich kleine Grösse ersten Grades in Beziehung zu dt ist, sondern von einem höheren Grade sein wird. In der That findet man, wenn man entweder unmittelbar dt für t in Gleichung 7) setzt, oder auch, wenn man in dem Werthe des vollständigen Inkrementes von s, also in

$$\Delta s = \frac{ds}{dt} \cdot dt + \frac{1}{1.2} \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot dt^2 + \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3 s}{dt^3} dt^3 + \ldots$$
$$= g\,t\,dt + \tfrac{1}{2} g\,dt^2$$

$t = 0$ setzt, für den im ersten Zeitelemente durchlaufenen Weg

8) $$\Delta s = \tfrac{1}{2} g\,dt^2.$$

Ist nun (Fig. 3)

$-q$, $-q_1$, $-q_2$ resp. die Kraft, welche die freie Masse m des materiellen Punktes a im Zeitelemente dt von c nach γ treiben würde,

f, f_1, f_2 resp. die Beschleunigung der Kraft $-q$, $-q_1$, $-q_2$ pro Zeiteinheit in der Masse m;

so hat man

9) $$-q = mf, \qquad -q_1 = mf_1, \qquad -q_2 = mf_2$$

10) $$cb = \tfrac{1}{2} f\,dt^2, \qquad \gamma b = \tfrac{1}{2} f_1\,dt^2, \qquad c\gamma = \tfrac{1}{2} f_2\,dt^2.$$

Durch Substitution der Werthe 10) nehmen die Formeln 3) und 5) die Gestalt

11) $$\Sigma m f f_2 \cos\varphi = 0,$$

12) $$\Sigma m f^2 = \Sigma m f_1^2 - \Sigma m f_2^2$$

an und durch Einführung der Kräfte q, q_1, q_2 aus Gleichung 9) verwandeln sich dieselben in

13) $$\Sigma q f \cos\varphi = 0,$$

14) $$\Sigma q f = \Sigma q_1 f_1 - \Sigma q_2 f_2.$$

Wenn man will, kann man diese Formeln auch schreiben,

15) $$\Sigma q\,(c\gamma) \cos\varphi = 0,$$

16) $$\Sigma q\,(cb) = \Sigma q\,(\gamma b) - \Sigma q\,(c\gamma).$$

In der Form der Gleichung 12) sind die Grössen, um welche es sich beim Principe des kleinsten Zwanges handelt, von den unendlich kleinen Wegen befreit. Man hat es in dieser Form nur mit endlichen Werthen zu thun, indem als Maass des Zwanges für jeden materiellen Punkt jetzt das Produkt seiner Masse in das Quadrat der Beschleunigung der ablenkenden Kraft erscheint.

In der Form der Gleichung 14) sind statt der Massen m die ablenkenden Kräfte q selbst eingeführt. Das Maass des Zwanges ist

jetzt das Produkt der ablenkenden Kraft in deren Beschleunigung.

Die Elimination der Masse m eines Punktes a vermittelst der Formeln gestaltet sich in dem Falle zu einer unerlässlichen Nothwendigkeit, wenn dieser Punkt selbst gar keine Masse hat, sondern nur einen geometrischen Ort des Systems darstellt, auf welchen die Kraft p wirkt. Denn da für jeden Punkt dieser Art die Masse $m = 0$ wird, eine endliche Kraft p aber einer unendlich kleinen Masse eine unendlich grosse Beschleunigung ertheilt, so rückt der Punkt b (Fig. 3) in unendliche Ferne hinaus. Es wird also cb und $b\gamma$ oder auch f und f_1 unendlich gross, und hierdurch entstehen in den obigen Formeln Glieder von der Form $0.\infty$ oder von der Form ∞, welche jene Formeln unbrauchbar machen. Nur die Gleichung 13) bliebe auch für diese Fälle immer anwendbar.

Was die übrigen Formeln betrifft, so ist klar, dass es durchaus nicht nothwendig ist, die Summe Σ mit einem Male für sämmtliche Punkte des Systems zu nehmen: man könnte auch erst die Summe S für einen gewissen Complex von Punkten und darauf die Summe $\mathfrak{S}$ für die übrigen Punkte nehmen, so dass dann $\Sigma = S + \mathfrak{S}$ wäre. Hierdurch wird zunächst Gleichung 3)

$$17) \qquad Sm(cb)(c\gamma)\cos\varphi + \mathfrak{S}m(cb)(c\gamma)\cos\varphi = 0$$

und Gleichung 5), wenn man darin $\Sigma m(cb)^2$ in $Sm(cb)^2 + \mathfrak{S}m(cb)^2$ trennt und darauf für die Partialsumme $\mathfrak{S}m(cb)^2$ den ihr nach Gleichung 4) entsprechenden Werth substituirt,

$$18) \qquad Sm(cb)^2 + \mathfrak{S}m(cb)(c\gamma)\cos\varphi = Sm(\gamma b)^2 - Sm(c\gamma)^2.$$

Wollte man in Gleichung 18) die Summe $\mathfrak{S}$ mit Hilfe der Gleichung 17) eliminiren, so erhielte man zwar eine Gleichung nur mit dem Summenzeichen S, welche sich also nur auf einen beliebigen Theil der Massen des Systems bezöge: man findet jedoch leicht, dass diese Gleichung nur ein Ausfluss der Gleichung 4) sein, also nur eine geometrische, keine mechanische Beziehung zwischen den betreffenden Massen derselben würde.

Substituirt man unter dem Summenzeichen $\mathfrak{S}$ für das Produkt $m(cb)$ mittelst der Beziehungen 9) und 10) den Werth $m(cb) = \frac{1}{2}(-q)\,dt^2$ ist, so ergiebt sich statt 17) und 18)

$$19) \qquad Sm(cb)(c\gamma)\cos\varphi + \tfrac{1}{2}dt^2\,\mathfrak{S}(-q)(c\gamma)\cos\varphi = 0,$$

$$20) \qquad Sm(cb)^2 + dt^2\,\mathfrak{S}(-q)(c\gamma)\cos\varphi = Sm(\gamma b)^2 - Sm(c\gamma)^2.$$

Soll sich das Zeichen $\mathfrak{S}$ nur auf diejenigen Punkte des Systems beziehen, welche keine Masse haben; so beachte man, dass für jeden solchen Punkt cb parallel zu ab, also die verlorene Kraft $-q$ nach Grösse und Richtung genau der auf den Punkt a angebrachten Kraft p gleich wird (Fig. 2). Demnach hat man für diese Voraussetzung

$$21) \qquad Sm(cb)(c\gamma)\cos\varphi + \tfrac{1}{2}dt^2\,\mathfrak{S}p(c\gamma)\cos\varphi = 0,$$

$$22) \qquad Sm(cb)^2 + dt^2\,\mathfrak{S}p(c\gamma)\cos\varphi = Sm(\gamma b)^2 - Sm(c\gamma)^2,$$

in welchen Formeln nun unendlich grosse oder unbestimmte Grössen nicht mehr vorkommen.

Wollte man in den letzteren Formeln auch unter dem Zeichen S statt der Masse m die verlorene Kraft $-q$ erscheinen lassen, wie diess in Gleichung 15) und 16) geschehen ist, so erhielte man,

23) $$S(-q)(c\gamma)\cos\varphi + \mathfrak{S}p\,(c\gamma)\cos\varphi = 0,$$

24) $$S(-q)(cb) + 2\mathfrak{S}p\,(c\gamma)\cos\varphi = S(-q)(\gamma b) + S(-q)(c\gamma).$$

Es wird, zur präcisen Feststellung der Richtungen und des Winkels φ, nochmals darauf aufmerksam gemacht, dass $-q$ die verlorene Kraft ist, welche in der Richtung cb wirkt, dass also die ablenkende Kraft q in direct entgegengesetzter Richtung bc wirksam ist, dass aber der Winkel $\varphi = bc\gamma$ zwischen der Richtung cb der verlorenen Kraft $-q$ und der Richtung $c\gamma$ liegt, worin γ irgend einen andern, nach den Verbindungen des Systemes möglichen Verrückungsort des Punktes a bezeichnet.

Was den Fall betrifft, wo sich das System im Gleichgewichte und in Ruhe befände, so fällt für diese Voraussetzung allgemein der Punkt c in a, die ablenkende Kraft q wird $= -p$ oder die verlorene Kraft $-q = p$. Hierfür nehmen die Gleichungen 21) und 22) die Gestalt

25) $$Sm(ab)(a\gamma)\cos\varphi + \tfrac{1}{2}dt^2\,\mathfrak{S}p\,(a\gamma)\cos\varphi = 0,$$

26) $$Sm(ab)^2 + dt^2\,\mathfrak{S}p\,(a\gamma)\cos\varphi = Sm(\gamma b)^2 - Sm\,(a\gamma)^2,$$

und die Gleichungen 23) und 24) die Gestalt

27) $$\Sigma p\,(a\gamma)\cos\varphi = 0,$$

28) $$Sp\,(ab) + 2\mathfrak{S}p\,(a\gamma)\cos\varphi = Sp\,(\gamma b) + Sp\,(a\gamma)$$

an.

Wäre das System nicht gerade im Zustande der Ruhe, sondern in dem einer gleichförmigen Bewegung im Gleichgewichte; so würde zwar nicht der Punkt c in a, sondern in einen andern Punkt a_1 fallen, in welchen die einmal erlangte Geschwindigkeit den Punkt a während des Zeitelementes dt führen würde. Immer aber würde $q = -p$ werden, und die vorstehenden Gleichungen 25) bis 28) behielten für die Voraussetzung Gültigkeit, dass ab den Weg darstellte, welchen der Punkt a nur in Folge der Kraft p, ohne Rücksicht auf die vorher erlangte Geschwindigkeit in der Zeit dt durchlaufen würde, und dass γ einen andern Platz des Punktes a ebenfalls ohne Rücksicht auf diese Geschwindigkeit bezeichnete.

3.

Beziehung des Gauss'schen Gesetzes zu dem d'Alembert'schen und dem der virtuellen Geschwindigkeiten.

Die Gleichung 4) drückt nur eine geometrische Beziehung aus, während die Gleichung 3) der Ausdruck der mechanischen Beziehungen ist, welche in dem gegebenen Systeme herrschen. Da nun die Formel 5) das Resultat der einfachen Combination von 3) und 4) ist, so folgt, dass in

mechanischem Sinne streng genommen die Formel 5) gleichbedeutend ist mit der Formel 3).

Die Formel 3) stellt aber unmittelbar das d'Alembert'sche Princip (wonach das System der verlorenen Kräfte $-q$ im Gleichgewichte sein soll) unter Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten dar, wogegen die Formel 5) der vollständigere Ausdruck des Gauss'schen Princips ist, indem dieselbe nicht blos lehrt, dass $\Sigma m\,(cb)^2$ kleiner als jedes mögliche $\Sigma m\,(\gamma b)^2$, also ein Minimum ist, sondern zugleich nachweisst, um wieviel die erstere Summe kleiner ist, als die letztere.

Hieraus erkennt man, dass das Gauss'sche Princip das d'Alembert'sche in Verbindung mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten enthält, also diejenigen beiden Grundgesetze, welche nach der gewöhnlichen Darstellung die Basis für die Statik und die für die Dynamik bilden, gemeinsam umfasst, und demnach als ein allgemeines oder höheres Princip der Mechanik zu erachten ist.

Gauss selbst sagt in der oben erwähnten Abhandlung:

„Der eigenthümliche Charakter des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, dass es eine allgemeine Formel zur Auflösung aller statischen Aufgaben und so der Stellvertreter aller anderen Principien ist, ohne jedoch das Creditiv dazu so unmittelbar aufzuweisen, dass es sich, sowie es nur ausgesprochen wird, schon von selbst als plausibel empföhle. In dieser Beziehung scheint das Princip, welches ich hier aufstellen werde, den Vorzug zu haben: es hat aber auch den zweiten, dass es das Gesetz der Bewegung und der Ruhe auf ganz gleiche Art in grösster Allgemeinheit umfasst."

Der zweite Vorzug, dass das Gauss'sche Princip auf einmal den Zustand der Bewegung und der Ruhe charakterisirt, wird aus Vorstehendem hinlänglich erkannt sein. Der erste Vorzug jedoch, dass dieses Princip wie ein mechanischer Grundsatz erscheine, bedarf einer nähern Erläuterung.

Der allgemeine Wortlaut des Gauss'schen Princips, dass die Bewegung eines Systems in jedem Augenblicke in möglich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglich kleinstem Zwange vor sich gehe, erscheint allerdings ganz plausibel und eines Beweises nicht bedürftig. Was ist aber Zwang in streng wissenschaftlichem Sinne? wie bildet sich der mathematische Ausdruck für diesen allgemeinen Begriff? Offenbar muss für jeden materiellen Punkt a (Fig. 3) der Zwang, welcher ihn in der unendlich kleinen Zeit dt von dem Orte b seiner freien Bewegung nach dem Orte c seiner wirklichen Bewegung führt, zunächst proportional sein der Kraft q, welche ihn von dem Punkte b hinweg treibt, und ausserdem der Länge des Weges bc, durch welchen jene Masse getrieben wird, also proportional dem Produkte $q\,(bc)$, welches die Arbeit der ablenkenden Kraft darstellt. Hiernach kann man dieses Produkt selbst

für den fraglichen Zwang nehmen, welchen die Masse m des Produktes a erleidet. Soll nun die Summe des im ganzen Systeme ausgeübten Zwanges so klein als möglich sein; so wird man unmittelbar zu der Bedingung geführt, dass $\Sigma q\,(bc)$ ein Minimum sei.

Wenn m die Masse des Punktes a bezeichnet, so kann man, da nach Gleichung 9) und 10) die Kraft q dem Produkte $m\,(cb)$ proportional ist, auch die Forderung stellen, dass $\Sigma m\,(cb)^2$ ein Minimum sei, worin der mathematische Ausdruck des Gauss'schen Princips besteht.

Wenn man auf diese Weise das Gauss'sche Princip an die Spitze der Mechanik gestellt hat; so ergeben sich die übrigen Grundgesetze, namentlich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten durch folgendes Schlussverfahren.

Aus rein geometrischen Gründen ist wegen Gleichung 4)

$$\Sigma m\,(cb)^2 = \Sigma m\,(\gamma b)^2 - \Sigma m\,(c\gamma)^2 + 2\,\Sigma m\,(cb)\,(c\gamma)\cos\varphi.$$

Da nun $m\,(cb)^2$ ein Minimum, also stets kleiner als $\Sigma m\,(\gamma b)^2$ ist; so muss die Grösse $2\Sigma m\,(cb)\,(c\gamma)\cos\varphi$ entweder nur negativ, oder wenn sie positiv ist, kleiner als $\Sigma m\,(c\gamma)^2$ sein, welche Lage auch der Punkt γ annehmen möge.

Nun sei (Taf. II., Fig. 4) $c\gamma$ irgend eine unendlich kleine Bewegung, welche der Punkt c nach den Verbindungen des Systems anzunehmen im Stande ist, und $c\gamma_1$ die Fortsetzung der rückgängigen Bewegung, welche dieser Punkt bei der Rückkehr von γ nach c einschlägt. Es leuchtet ein, dass jeder zwischen γ und γ_1 liegende Punkt γ_2 als Endpunkt der Bewegung $c\gamma_2$ angesehen werden kann. Ist nun $X\,dx$ der analytische Ausdruck für $c\gamma$, worin X die Funktion irgend einer Grösse x ist, welche für sämmtliche Punkte des ganzen Systems ein und dieselbe Bedeutung hat, so dass also $X\,dx$, $X'\,dx$, $X''\,dx \ldots$ sich resp. auf die materiellen Punkte $a, a', a'' \ldots$ oder $c, c', c'' \ldots$ beziehen, so stellt $X\,dx$ offenbar jede zwischen γ und γ_1 liegende unendlich kleine Bewegung wie $c\gamma_2$ dar, wenn man nur für dx den entsprechenden Werth substituirt, und es ist klar, dass die Bewegungen für sämmtliche Punkte des Systems innerhalb der unendlich nahen Gränzen γ und γ_1 proportional wachsen und abnehmen, auch gleichzeitig das Zeichen wechseln.

Da nach dieser Bezeichnung $2\Sigma m\,(cb)\,(c\gamma)\cos\varphi = 2\,dx\,\Sigma m\,(cb)\,X\cos\varphi$ und $\Sigma m\,(c\gamma)^2 = dx^2\,\Sigma m\,X^2$ ist, so erkennt man sofort, dass bei geeigneter Wahl von dx die in die erste Potenz von dx multiplicirte Grösse $2\,\Sigma m\,(cb)$ $(c\gamma)\cos\varphi$ stets positiv und auch stets grösser, als die in die zweite Potenz von dx multiplicirte Grösse $\Sigma m\,(c\gamma)^2$ würde werden können, wenn dieselbe überhaupt irgend einen von Null verschiedenen Werth besässe.

Hieraus folgt, dass allgemein

$$\Sigma m\,(cb)\,(c\gamma)\cos\varphi = 0$$

sein muss, womit denn die Gleichung 3) gewonnen ist.

Da $m\,(cb)$ der ablenkenden oder auch der in umgekehrter Richtung ge-

dachten Kraft $-q$ proportional ist, welche man die verlorene Kraft nennt; so geht die vorstehende Gleichung über in

$$\Sigma(-q)(c\gamma)\cos\varphi = 0 \text{ oder } \Sigma(-q)(c\beta) = 0.$$

Unter diesen verlorenen Kräften $-q$ muss aber, wie das an sich selbst einleuchtende und eines Beweises überall nicht bedürftige d'Alembert'sche Princip besagt, Gleichgewicht bestehen. Die vorstehende Formel drückt also ein Grundgesetz für im Gleichgewichte befindliche Kräfte aus, und man erkennt darin das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches auf diesem Wege seine Begründung durch das Gauss'sche Princip empfängt.

4.
Einfacher Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

Im Obigen ist einmal das Gauss'sche Princip aus dem d'Alembert'schen und dem der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitet; alsdann aber ist gezeigt, wie, wenn das Gauss'sche Princip vorausgestellt wird, das der virtuellen Geschwindigkeiten daraus sich ergiebt.

In der Regel wird man wohl den ersteren Entwicklungsgang vorziehen, theils weil das d'Alembert'sche Princip und das der virtuellen Geschwindigkeiten sich durch elementarere Anschauungen ergiebt und einwandsfreiere Beweise zulässt, theils aber auch, weil in den meisten Fällen die letzten beiden Principien eine unmittelbarere und einfachere Anwendung auf gegebene Fälle gestatten.

In letzterer Hinsicht muss man nämlich beachten, dass, da $a, a', a''\dots$ ebenso wie $c, c', c''\dots$ Oerter sind, welche die Massen $m, m', m''\dots$ nach den Verbindungen des Systems wirklich einnehmen, die ersteren nämlich im Anfange und die letzteren am Ende des Zeitelementes dt, man bei der Anwendung des d'Alembertschen Princips und das der virtuellen Geschwindigkeiten unmittelbar von den gegebenen Oertern $a, a', a''\dots$ jener Massen am Ende der Zeit t als den Angriffspunkten der verlorenen Kräfte $(-q)$, $(-q')$, $(-q'')\dots$ ausgehen kann, während die Anwendung des Gauss'schen Princips die Berücksichtigung der fingirten Oerter $b, b', b''\dots$, in welche jene Massen, wenn sie ganz frei wären, am Ende des Zeitelementes dt gelangen würden, sowie der Oerter $c, c', c''\dots$, in welche sie zu dieser Zeit wirklich gelangen, erfordert, ausserdem auch die Bedingungen, unter welchen $\Sigma m(cb)^2$ ein Minimum oder nach Gleichung 5) gleich $\Sigma m(\gamma b)^2 - \Sigma m(c\gamma)^2$ wird, in der Regel umständlicher zu entwickeln sind, als die Bedingungen, unter welchen die Summe der virtuellen Momente der auf $a, a', a''\dots$ wirkenden verlorenen Kräfte gleich Null wird.

Immer aber wird man durch das Gauss'sche Princip bei geeigneter Behandlung der betreffenden Formeln gewisse Beziehungen einfacher und directer ableiten können, als durch die anderen beiden Principien.

Wenn man indessen diese anderen beiden Principien voranstellt, wird ein möglichst einfacher Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten erwünscht sein. Ich erlaube mir daher einen solchen hier mitzutheilen.

Das fragliche Princip lautet: Wenn die Angriffspunkte eines im Gleichgewichte befindlichen Systems von Kräften unendlich wenig und zwar dergestalt verrückt werden, wie es die Verbindungen des Systems gestatten, so ist die Summe der Produkte aus den Kräften und den parallel zu ihren directen Richtungen durchlaufenen Wegen gleich Null.

Beschreibt also bei dieser Bewegung der Angriffspunkt irgend einer der Kräfte P den Weg δp in einer Richtung, welche mit der directen Richtung der Kraft P den Winkel φ einschliesst, so ist

29) $$\Sigma P\,\delta p \cos\varphi = 0.$$

Betrachten wir zunächst ein starres System von Punkten, d. h. ein solches, in welchem alle Punkte starr miteinander verbunden sind. An demselben seien

X, Y, Z die Componenten der auf den Punkt a wirkenden Kraft P, parallel zu drei rechtwinkligen Coordinatenachsen,

α, β, γ die Neigungswinkel der directen Richtung von P gegen diese Achsen,

α_1, β_1, γ_1 die Neigungswinkel der directen Richtung, in welcher die unendlich kleine Verrückung δp des Angriffspunktes von P erfolgt, gegen dieselben Achsen, während

φ den Neigungswinkel von P gegen δp darstellt,

x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes a,

δx, δy, δz die Verrückungen dieses Punktes in Beziehung zu den drei Achsen oder die Projectionen von δp.

Jede Bewegung eines starren Körpers besteht, wie sich ganz einfach, ohne alle Rechnung darthun lässt (vergl. meinen Situationskalkul S. 191) aus einem geradlinigen Fortschritte und einer Drehung um irgend eine Achse. Fortschritt kann in drei Fortschrittsbewegungen parallel zu drei gegebenen rechtwinkligen Achsen, also parallel zu unseren Coordinatenachsen und die letzt erwähnte Drehung in drei Drehungen um diese Coordinatenachsen aufgelöst werden. Demnach erfordert das Gleichgewicht des Systems, dass die Kräfte P kein Bestreben zur Bewegung in der Richtung irgend eine Achse haben, dass also

30) $$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0$$

sei. Ausserdem erfordert dasselbe, dass kein Bestreben zur Drehung um eine Achse stattfinde, dass also die Momentengleichungen

31) $$\Sigma(xX - yX) = 0, \quad \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0$$

bestehen.

Fassen wir eine Bewegung ins Auge, bei welcher nur Drehung um die Axe der z stattfindet, für welche also die erste der Gleichungen 31) gilt, und

bezeichnet man den unendlich kleinen positiven Drehungswinkel von rechts nach links mit φ, so verändert sich, wie sich aus Fig. 5 leicht entnehmen lässt, die Ordinate x um die Grösse $an = -\varphi y$ und die Ordinate y um die Grösse $nm = \varphi x$. Bei einer ähnlichen Drehung um die Achse der x um den Winkel ψ verändert sich die Ordinate y um $-\psi z$ und die Ordinate z um ψy. Ebenso verändert sich bei einer Drehung um die Achse der y um den Winkel χ die Ordinate z um $-\chi x$ und die Ordinate x um χz. In Folge aller dieser drei Drehungen verändert sich also

die Ordinate x um $\delta x = -\varphi y + \chi z$
„ „ y „ $\delta y = -\psi z + \varphi x$
„ „ z „ $\delta z = -\chi x + \psi y$.

Multiplicirt man nun die erste, zweite, dritte der Gleichungen 31) mit φ, ψ, χ und addirt dann alle drei, so kommt

$$\Sigma[(-\varphi y + \chi z)X + (-\psi z + \varphi x)\,Y + (-\chi x + \psi y)Z] = 0,$$

oder

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0. \tag{32}$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass diese eine Gleichung nicht bloss die vorstehenden drei, auf die Drehung bezüglichen, sondern auch die drei auf den Fortschritt bezüglichen Gleichungen 30) vollständig ersetzt. Denn je nachdem man δz oder δy oder δx gleich Null setzt, erhält man die betreffende der drei Gleichungen für die Drehung um eine Achse, und je nachdem δz und δy oder δx und δz oder δx und δy gleich Null setzt, die betreffende der drei Gleichungen für den Fortschritt.

Die Gleichung 32) ist also für das Gleichgewicht nothwendig und ausreichend.

Setzt man jetzt noch

$$X = P\cos\alpha, \qquad Y = P\cos\beta, \qquad Z = P\cos\gamma,$$
$$\delta x = \delta p\cos\alpha_1, \quad \delta y = \delta p\cos\beta_1, \quad \delta z = \delta p\cos\gamma_1,$$

so wird

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = P\,\delta p\,(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)$$
$$= P\,\delta p\cos\varphi.$$

Hierdurch nimmt die Gleichung 32), welche das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrückt, wie zu beweisen war, die einfachste Form

$$\Sigma P\,\delta p\cos\varphi = 0 \tag{33}$$

an.

Reihet sich nun an dieses starres System ein zweites ebenfalls starres System dergestalt an, dass in den Berührungspunkten keine starre, sondern eine bewegliche Verbindung stattfindet, so wird hierdurch die Bewegung ersten Systemes in gewisser Weise beschränkt, d. h. gewisse Verrückungen, welche früher möglich waren, sind nun unmöglich geworden.

Offenbar muss das erste System für sich unter allen darauf wirkenden Kräften im Gleichgewichte sein, wenn man zu diesen Kräften nicht bloss die darauf angebrachten P, sondern auch diejenigen Q rechnet, welche das

zweite damit verbundene System in den Berührungspunkten auf dasselbe ausübt.

Unter Berücksichtigung aller Kräfte P und Q gilt also die Gleichung 33) für jede beliebige, also offenbar auch für jede der möglich gebliebenen Verrückungen des ersten Systems. Man hat also dafür

$$\Sigma P \delta p \cos \varphi + \Sigma Q \delta q \cos \psi = 0.$$

Ebendasselbe gilt von dem zweiten Systeme, für welches man, wenn man alle seine Kräfte der Deutlichkeit wegen accentuirt,

$$\Sigma P' \delta p' \cos \varphi' + \Sigma Q' \delta q' \cos \psi' = 0$$

hat. Beachtet man jetzt, dass in jedem Berührungspunkte der beiden Systeme der Druck des einen dem Gegendrucke des andern gleich, also $Q' = Q$, dass ferner bei jeder möglichen Verrückung die virtuelle Bewegung des Angriffspunktes von Q' der von Q entgegengesetzt, $\delta q' \cos \psi' = -\delta q \cos \psi$ ist, so ergiebt sich $\Sigma Q' \delta q' \cos \psi' = -\Sigma Q \delta p \cos \psi$. Addirt man also die vorstehenden beiden Gleichungen, so verschwinden alle Glieder in Q und es bleibt nur die Form der Gleichung 33) zurück, in welcher nun P alle Kräfte bezeichnet, welche auf das aus den beiden einzelnen zusammengesetzte bewegliche Gesammtsystem angebracht sind und die Verrückungen auf die nach der Verbindung beider Systeme noch möglich bleibenden beschränkt sind.

In derselben Weise kann man ein drittes und viertes starres System durch eine bewegliche, aber auf unmittelbarer Berührung basirte Verbindung mit dem früheren vereinigen, ohne dass das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aufhört zu gelten.

Erwägt man schliesslich, dass es bei der vorstehenden Betrachtung gleichgültig ist, ob eins oder mehrere der betrachteten Systeme endliche oder endlich kleine Dimensionen hat, in welchem letzteren Falle sich dasselbe auf einen materiellen Punkt reducirt; so folgt, dass das fragliche Princip überhaupt auf jedes System anwendbar bleibt, wie auch die Verbindungen durch starre, biegsame, dehnbare, pressbare Körper u. s. w. beschaffen sein mögen, weil jeder nicht starre endliche Körper sich in unendlich kleine Theile, welche man als starr betrachten kann, zerlegen lässt.

Ich muss an dieser Stelle bemerken, dass der Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, welchen Moseley in dem Werke „*The mechanical principles of engineering and architecture*" giebt, und welcher auch in meine unter den Titel „Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und Architectur" erschienene Bearbeitung §. 127, S. 170 übergegangen ist, unrichtig ist. Dieser Beweis geht nämlich von der Annahme aus, dass sowohl das System parallelen Componenten X, wie auch das der Y und das der Z für sich im Gleichgewichte, also $\Sigma X \delta x = 0$, $\Sigma Y \delta y = 0$, $\Sigma Z \delta z = 0$ sein, woraus allerdings sehr einfach $\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0$ folgen würde. Diese Annahme ist aber unzulässig, da zwar die Summe der Kräfte in jedem der drei parallelen Systeme gleich Null, also $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$,

$\Sigma Z = 0$, aber keineswegs immer die Summe der Momente dieselben zu irgend einer Axe gleich Null ist, vielmehr im Allgemeinen jedes der drei Systeme sich auf ein Kräftepaar reducirt, welches keinen Gleichgewichtszustand darstellt.

5.

Besondere Bemerkung von Gauss über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

In der mehr erwähnten Abhandlung macht Gauss über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten folgende Bemerkung:

„es sei richtiger zu sagen, die Summe der virtuellen Momente könne niemals positiv werden, während man gewöhnlich sage, sie müsse gleich Null sein. Denn der gewöhnliche Ausdruck setze stillschweigend solche Bedingungen voraus, dass die jeder möglichen Bewegung entgegengesetzte gleichfalls möglich" — oder die jeder unmöglichen Bewegung entgegengesetzte gleichfalls unmöglich — „sei, wie z. B. dass ein Punkt auf einer bestimmten Fläche zu bleiben genöthigt, dass die Entfernung zweier Punkte von einander unveränderlich sei, und dergleichen. Allein diess sei eine unnöthige Beschränkung. Die Oberfläche eines undurchdringlichen Körpers zwinge einen auf ihr befindlichen materiellen Punkt nicht, auf ihr zu bleiben, sondern verwehre ihr blos das Austreten auf die eine Seite; ein gespannter, nicht ausdehnbarer, aber biegsamer Faden zwischen zwei Punkten mache nur die Zunahme, nicht die Abnahme der Entfernung unmöglich, u. s. w. Warum wollte man also das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten nicht lieber gleich anfangs so ausdrücken, dass es alle Fälle umfasse?"

Auf diese Bemerkung und Frage glaube ich, liesse sich etwa Folgendes entgegnen. Allerdings verwehren feste Punkte, Linien und Flächen oft nur gewisse Bewegungen, gestatten aber die direct entgegengesetzten. So lange nun die Festigkeit solcher Punkte wirklich in Anspruch genommen, also ein Bestreben zur Bewegung in der unmöglichen Richtung obwaltet, existiren an diesen Punkten als Widerstände jener Punkte Kräfte, welche für das Gleichgewicht des Systems durchaus nothwendig sind. Sowie aber eine Verrückung nach der möglichen Richtung eintritt, welche die Widerstandsfähigkeit dieser Punkte ausser Thätigkeit setzt, verschwinden die durch jene Widerstände repräsentirten Kräfte aus dem Systeme, welche allerdings, wenn sie fortbeständen, für eine solche Bewegung lauter positive virtuelle Momente hätten, also durch ihr Verschwinden eine negative Summe für die Momente der übrigen Kräfte zurücklassen. Durch das Verschwinden eines Theils der ursprünglichen Kräfte bleibt aber das System nicht mehr dasselbe, und tritt sogar aus dem Zustande des Gleichgewichts heraus; auch würden solche Bewegungen niemals geeignet sein, die zum Gleichgewichte nothwendigen Widerstände der

festen Punkte, welche ganz die Rolle äusserlich angebrachter Kräfte spielen, mitzubestimmen, also die Bedingungen des Gleichgewichts vollständig zu entwickeln. Demgemäss müssen solche Bewegungen, welche den unmöglichen direct entgegenliegen, wenn sie eine Veränderung des gegebenen Systems von Kräften zur Folge haben, ebenfalls für unzulässig gehalten werden. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erfordert also, wenn dasselbe zur vollständigen Bestimmung der zum Gleichgewichte nöthigen Kräfte und Widerstände in Anwendung gebracht werden soll, immer die Annullirung der Summe der virtuellen Momente.

Liegt z. B. das Gewicht P (Taf. II., Fig. 6) auf einer festen Fläche; so muss dieselbe mit einer gewissen Kraft P' Widerstand leisten. Ueberhaupt besteht das ganze Kriterium eines festen Körpers in mechanischer Hinsicht nur darin, dass derselbe fähig sei, jeden eben erforderlichen Widerstand zu leisten: die Unverrückbarkeit an sich ist dabei eine Nebensache, und im Sinne des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten kann man ganz davon absehen, wenn man statt des festen Hindernisses seinen Widerstand als äussere Kraft substituirt.

Eine wesentliche Bedingung des vorstehenden Systems ist aber, dass bei der virtuellen Verrückung die Berührung beider Körper bestehen bleibt. Diess führt, wenn man eine gemeinschaftliche Verrückung nach oben oder unten um den Weg δp vornimmt, zu der Formel $P\delta p - P'\delta p = 0$, also $P = P'$. Wollte man dagegen eine einseitige Bewegung des Gewichtes nach oben ohne ebenmässige Verrückung der Ebene vornehmen, so erhielte man zwar für $\Sigma P\delta p$ den negativen Werth $-P\delta p$, wie Gauss richtig bemerkt; allein dann ist der Widerstand P' der Ebene verschwunden, das ganze System verändert und keine Formel mehr vorhanden, aus welcher sich die zum Gleichgewichte erforderlichen Kräfte bestimmen liessen.

Ein ähnlicher Fall tritt ein, wenn das Gewicht P nach Fig. 7 vermittelst eines biegsamen Fadens an einem festen Punkt A aufgehängt ist. Dieser Punkt muss mit der Kraft $P' = P$ Widerstand leisten. Hebt man also blos das Gewicht nach oben, ohne den festen Punkt mit zu verrücken, so verschwindet jener Widerstand P' und das System der zum Gleichgewichte erforderlichen Kräfte ist nicht mehr vorhanden.

In derartigen Fällen würde mithin, wenn man, wie hier, die Festigkeit gewisser Punkte ganz absolut nehmen und die von ihnen zu erzeugenden Widerstandskräfte ganz ausser Acht lassen wollte, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten eine ebenso unvollständige Antwort geben, welche darin bestände, dass das Gewicht P jeden beliebigen Werth haben könne, was zwar an sich richtig ist, aber die wesentliche Thatsache nicht erkennen lässt, dass der feste Punkt mit der Kraft jenes Gewichtes Widerstand zu leisten habe.

Eine derartige rein äusserliche Auffassung des Begriffs der Verbindungen eines Systemes von materiellen Punkten ohne strenge Berück-

sichtigung der Widerstände der festen oder überhaupt in ihren Bewegungen beschränkten Punkte könnte sogar leicht zu ganz irrthümlichen Schlussfolgerungen führen. Hierher gehört z. B. der Fall elastischer Verbindungen. Derartige Verbindungen gestatten, absolut betrachtet, nach ihren mechanischen Eigenschaften beliebige Dehnungen, Kompressionen und Biegungen. Man kann also nicht leugnen, dass jede Bewegung eines durch ein elastisches Band mit dem übrigen Systeme verbundenen Punktes eine den Bedingungen des Systems entsprechende, also eine virtuelle sei. Uebersieht man aber die dabei auftretenden inneren Widerstände und die sonstigen nothwendigen Veränderungen der auf das System angebrachten Kräfte, so erhält man ganz falsche Resultate.

Denn angenommen, das Gewicht P in Fig. 7 sei an dem festen Punkt A mittelst eines elastischen Fadens aufgehängt, so ist eine Dehnung desselben, also eine Bewegung des Gewichtes P in der Richtung seiner directen Richtung nach unten sehr wohl möglich, ohne dass sich gleichzeitig der feste Punkt A mit bewegt. Eine solche virtuelle Bewegung liefert aber ein virtuelles Moment $P\delta p$, welches weder gleich Null, noch negativ, vielmehr entschieden positiv ist. Das ganze Resultat ist aber deshalb falsch, weil dabei unberücksichtigt geblieben ist, dass die Dehnung des Fadens nicht ohne Ueberwindung der inneren Elasticitätskräfte und streng genommen auch nicht ohne Vermehrung des Gewichtes P geschehen kann.

Alle diese Betrachtungen führen uns zu folgenden, bei der Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zu beachtenden Regeln.

6.

Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Kräfte und inneren Widerstände bei der virtuellen Bewegung eines Körpers.

Nach dem Obigen kann als eine virtuelle Bewegung des Systems ohne Weiteres eine solche angesehen werden, welche nach den Verbindungen des Systems möglich ist, d. h. bei welcher sich diese Verbindungen, abgesehen von den geometrisch zulässigen absoluten und relativen Bewegungen, nicht ändern, bei welcher also kein anderer Kraftaufwand zu machen ist, als welcher den virtuellen Momenten der auf das System äusserlich angebrachten Kräften entspricht, indem die virtuellen Momente der innern Widerstände zwischen je zwei Berührungspunkten des Systems sich gegenseitig vernichten, also aus der Gleichung 33) von selbst verschwinden.

Dieser Fall tritt immer ein, wenn die Verbindungen des Systems von den darauf angebrachten Kräften unabhängig sind, wie z. B. bei einem Systeme, welches aus lauter starren, um gewisse Punkte drehbaren oder auf ihren Oberflächen verschiebbaren Körper zusammengesetzt ist.

Wenn aber im entgegengesetzten Falle die Verbindungen von den darauf wirkenden Kräften abhängig sind, oder wenn überhaupt die beabsichtigte

Verrückung des Systems nur unter dem Aufwande gewisser Arbeitsgrössen möglich wäre, welche in den Bändern des Systems erzeugt werden, oder dem Systeme durch besondere äussere Kräfte aufgedrückt werden müssten, kann jene Verrückung immer noch als eine virtuelle angesehen werden, wenn man die sich nicht von selbst vernichtenden virtuellen Momente gehörig mit in Rechnung stellt.

Wäre also z. B. in Fig. 7 das Gewicht P an dem festen Punkte A mittelst eines elastischen Fadens aufgehängt, und wollte man das Gewicht um δp nach unten verrücken; so würde man finden, dass, wie auch das Elasticitätsgesetz des Fadens beschaffen wäre, zur Drehung desselben eine Arbeitsgrösse erforderlich ist, welche den Werth $P\delta p$ hat.

Denn wenn die Länge p des ganzen Fadens sich um δp vermehrt; so vermehrt sich die Länge jedes Elementes dx des Fadens um $\frac{\delta p}{p}dx$. Der zu dieser Längenvermehrung des Elementes dx erforderliche Arbeitsaufwand, welcher die Differenz der Arbeit der am untern Ende desselben Elementes wirkenden Spannung P ist, hat also den Werth $-P\frac{\delta p}{p}dx$. Die Summe dieser Arbeiten für alle Elemente des Fadens ist also $-\int\limits_0^p P\frac{\delta p}{p}dx$. Wie nun auch P von der Länge p abhängt, immer ist diese Spannung für alle Elemente gleich, also von x unabhängig, und demnach ist

$$-\int\limits_0^p P\frac{\delta p}{p}dx = -P\frac{\delta p}{p}\int\limits_0^p dx = -P\delta p.$$

Das Gewicht P erzeugt bei der in Rede stehenden Bewegung das virtuelle Moment $P\delta p$; es realisirt sich also die Gleichung 33) in der Form $P\delta p - P\delta p = 0$.

Etwas Aehnliches ereignet sich bei dem in Fig. 6 dargestellten Systeme, wenn man das Gewicht P auf der festen Fläche horizontal um δx verschieben wollte, aber die Voraussetzung machte, dass zwischen dem Gewichte und der Fläche Reibung stattfände, welche den Betrag fP hätte. In diesem Falle ist die Verrückung zwar möglich und zulässig; sie kann aber nur dann als eine virtuelle angesehen werden, wenn man beachtet, dass sie eine besondere, bis dahin noch nicht gegebene Kraft fP in horizontaler Richtung erfordert, welche das positive virtuelle Moment $fP\delta x$ liefert, und dass gleichzeitig die widerstehende Reibung der festen Fläche zu überwinden ist, welche das gleiche aber entgegengesetzte Moment $-fP\delta x$ ergiebt, so dass nun Gleichung 33) in der Form $fP\delta x - fP\delta x = 0$ erfüllt ist.

7.

Richtige Deutung der unendlich kleinen Grössen in dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten.

In der Formel für das Princip der virtuellen Geschwindigkeit ist δp eine unendlich kleine, also eine solche Grösse, welche fortwährend dem Nullwerthe zustrebt. Da die Gleichung 33) erst für die Grenzwerthe dieser Grössen vollkommene Gültigkeit erlangt, diese Grenzwerthe aber sämmtlich Null sind; so versteht es sich von selbst, dass alle jene unendlich kleinen Grössen δp in ihrem Verhältnisse zu ein und derselben unabhängigen unendlich kleinen Grösse, welche wir mit δs bezeichnen wollen, bestimmt werden müssen, so dass man für δp, $\delta p'$, $\delta p''$ ... resp. die Werthe $\frac{\delta p}{\delta s}\delta s$, $\frac{\delta p'}{\delta s}\delta s$, $\frac{\delta p''}{S s}\delta s$ ..., für Gleichung 33) also, nachdem man mit dem allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor δp dividirt hat, die Formel

$$\Sigma P \frac{\delta p}{\delta s} \cos \varphi = 0 \tag{34}$$

erhält, worin nur noch endliche Grössen $\frac{\delta p}{\delta s}$ enthalten sind.

Wären, je nach der Beschaffenheit des Systems, die Grössen δp nicht sämmtlich von ein und derselben Grundgrösse δs, sondern gruppenweise von mehrern solchen Grundgrössen abhängig, so zerfällt offenbar schon dadurch die Gleichung 33) in ebensoviel besondere Gleichungen, von welchen eine jede die Glieder ein und derselben Gruppe enthält.

Die eben erwähnten endlichen Grössen $\frac{\delta p}{\delta s}$ reduciren sich bei dem Uebergange auf ihre Grenzwerthe auf die ersten Differentialcoefficienten der Funktion p in Beziehung zu der unabhängigen Variabelen s. Es würde also ganz überflüssig sein, das Inkrement δp genauer, als auf sein erstes Differential, welches die Form $A ds$ hat, oder den Quotienten $\frac{\delta p}{\delta s}$ genauer, als auf das erste endliche Glied A zu bestimmen, indem die niedrigeren Glieder von zweiter, dritter und höherer Ordnung unendlich klein gegen dieses erste sind und aus dem Ausdrucke

$$\frac{\delta p}{\delta s} = A + B\, ds + C\, ds^2 + \dots$$

beim Uebergange auf den Grenzwerth sämmtlich verschwinden würden.

Diese Bemerkung ist besonders wichtig für solche Fälle, wo der erste Differentialcoefficient A zufällig genau gleich Null werden sollte, während die höheren Differentialcoefficienten endliche Werthe behalten. In solchen Fällen könnte es auf den ersten Blick scheinen, als ob die Einführung des nächsten nicht verschwindenden Gliedes, also z. B. die Substitution

$\frac{\delta p}{\delta s} = B\,ds$ nothwendig wären, um das wirkliche virtuelle Moment der betreffenden Kraft zu bestimmen. Diese Täuschung verliert sich durch die vorstehende Bemerkung, wonach bei dem Uebergange auf den Grenzwerth für welchen allein die Gleichung 33) gilt, doch das Glied $B\,ds$ und alle höheren effectiv gleich Null werden.

Ein praktischer Fall der letzteren Art ist beispielsweise in Fig. 8 dargestellt. Hierbei ist angenommen, dass in dem tiefsten Punkte eines kreisförmigen Reifes, welcher auf einer horizontalen Ebene rollen kann, ein Gewicht P befestigt ist. Bei jeder noch so kleinen Bewegung des Reifes scheint allerdings das Gewicht P stets eine gewisse Arbeit zu vollbringen, weil es sich um etwas hebt, während die Arbeit des Widerstandes P der Ebene genau gleich Null bleibt, so dass also hier die Gleichung 33) nicht erfüllt zu sein den Anschein hat.

Dieser Irrthum erklärt sich, wenn man beachtet, dass für eine rollende Bewegung um den unendlich kleinen Winkel $\delta\alpha$ die vertikale Hebung des Gewichtes $\delta p = r - r \cos \delta\alpha$ also, bis auf Glieder der zweiten Ordnung genau, $\delta p = \frac{1}{2}(\delta\alpha)^2$, folglich $\frac{\delta p}{\delta\alpha} = \frac{1}{2}\,\delta\alpha$ ist. Bei dem Uebergange auf den Grenzwerth würde mithin nicht blos der erste Differentialcoefficient $\frac{dp}{d\alpha} = 0$, sondern auch der ganze Ausdruck $\frac{\delta p}{\delta\alpha} = 0$ werden.

8.

Richtige Deutung der unendlich kleinen Grössen im Gauss'schen Principe.

Eine weit grössere Aufmerksamkeit erfordern die unendlich kleinen Grössen, welche in die auf das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges bezüglichen Formeln 1), 5) u. s. w. eintreten. Wie die Gleichungen 10) lehren, sind die Linien cb, γb, $c\gamma$ (Fig. 3) unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung, indem sie in dt^2 multiplicirt sind. Gegeneinander verhalten sich dieselben allerdings wie endliche Grössen. In Verbindung jedoch mit den Linien ab, ac, welche selbst Grössen von erster Ordnung sind, sind sie unendlich klein. Dessenungeachtet können sie gegen diese Grössen nicht ohne Weiteres, sondern erst in einem Endresultate vernachlässigt werden, wo sie blos nach ihrem Verhältnisse zu relativ unendlich grösseren Werthen betrachtet werden sollen. In den Zwischenoperationen kann es sich aber häufig ereignen, dass in den durch Addition und Subtraktion verbundenen Gliedern die relativ unendlich grossen Glieder sich gegeneinander aufheben und dass demzufolge eine andere Beziehung zwischen den unendlich kleineren Grössen übrig bleibt, wie wenn man einen

Theil der letzteren schon vorzeitig gegen die unendlich grösseren vernachlässigt hätte.

In dieser Hinsicht machen wir auf Folgendes aufmerksam. Um den Punkt b zu construiren, in welchem sich die Masse m vom Punkte a aus in dem Zeitelemente dt bewegen würde, wenn sie vollkommen frei wäre, und den Punkt c, in welchem sie sich wirklich bewegt, so sei (Fig. 9, Taf. II.)

v die Geschwindigkeit der Masse m im Punkte a am Ende der Zeit t in der Richtung $a\alpha$, also wenn $a\alpha = v\,dt$ genommen wird, α der Punkt, in welchem die Masse m ohne Einwirkung irgend einer Kraft bloss in Folge der erlangten Geschwindigkeit während des Zeitelementes dt gelangen würde,

f, g, h die Geschwindigkeiten, welche resp. die auf die Masse m angebrachte Kraft p, die ablenkende Kraft q und die wirksame Kraft r dieser Masse in der Zeiteinheit mitzutheilen im Stande ist,

φ, ψ resp. die Winkel pav und rav, welche am Ende der Zeit t die angebrachte Kraft p und die wirksame Kraft r mit der Richtung der Geschwindigkeit v oder der Bahn der Masse m bilden, wobei die Winkel positiv oder negativ zu denken sind, je nachdem sie diesseit oder jenseit der Richtung von v liegen,

χ der Winkel par zwischen der angebrachten und der wirksamen Kraft (welcher also $\psi - \varphi$ ist).

Macht man nun αb parallel zu p und gleich $\frac{1}{2} f\,dt^2$; so ist b der Punkt, in welchen die Masse m in dem Zeitelemente dt gelangen würde, wenn sie ganz frei wäre.

Nimmt man bc parallel zu q und gleich $\frac{1}{2} g\,dt^2$, so ist c der Punkt, in welchen die Masse in dieser Zeit wirklich gelangt.

Derselbe Punkt c wird auch erhalten, wenn man αc parallel zu r und gleich $\frac{1}{2} h\,dt^2$ nimmt.

Da bei stetig wirkenden Kräften die Masse m eine stetige Curve beschreiben muss, so wird, je kleiner man das Zeitelement dt wählt, die Linie ac um so mehr in die Tangente va dieser Curve fallen, und ihrer Länge nach $= a\alpha + \alpha c . \cos\psi$ werden, so dass dann diese Linie, welche das Inkrement Δs des am Ende der Zeit durchlaufenen Weges s darstellt, bis auf Glieder der zweiten Dimension genau, den Werth

$$\Delta s = v\,dt + \tfrac{1}{2} h \cos dt^2 \tag{35}$$

hat. In diesem Ausdrucke sind die Grössen beider Dimensionen so lange sorgfältig zu conserviren, als man die Linie $a c$ mit ähnlich gebildeten Linien wie z. B. ab zu vergleichen hat.

Aus Gleichung 35) folgt

$$\frac{\Delta s}{dt} = v + \tfrac{1}{2} h \cos\psi\,dt.$$

Geht man auf die Grenzwerthe, so verschwindet auf der rechten Seite das zweite Glied, und man erhält die bekannte Formel $\frac{ds}{dt} = v$. Ganz falsch würde aber der Schluss sein, dass, weil in dieser Formel die Grösse v auf der rechten Seite um $\frac{1}{2} h \cos\psi\, dt$ vermehrt ist, dieser Zuwachs etwa den Zuwachs darstellte, welchen die Geschwindigkeit v während der Zeit dt, also beim Uebergange der Masse m von dem Punkte a nach dem Punkte c erlitte, so dass man $\frac{\varDelta s}{dt} = v + dv = v + \frac{1}{2} h \cos\psi\, dt$, mithin $dv = \frac{1}{2} h \cos\psi\, dt$ oder $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} h \cos\psi$ setzen könnte.

Der Quotient $\frac{\varDelta s}{dt}$ drückt vielmehr nichts Anderes als diejenige Geschwindigkeit aus, welche der Masse in der Zeit dt oder auf dem Wege ac eigen sein würde, wenn sie diesen Weg mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchliefe und $\frac{1}{2} h \cos dt$ ist der Ueberfluss dieser fingirten Geschwindigkeit über die im Punkte a herrschende.

Da die Bewegung der Masse m im Allgemeinen beschleunigt oder verzögert ist, so unterscheidet sich diese fingirte Geschwindigkeit, welche gewissermaassen die auf dem Wege ac stattfindende mittlere Geschwindigkeit ist, wesentlich von derjenigen, welche am Ende des Zeitelementes dt, also bei der Ankunft im Punkte c stattfindet. Diese letztere Geschwindigkeit ist

$$v + dv = v + h \cos\psi\, dt,$$

als ihr Zuwachs gegen die am Ende der Zeit t herrschenden $dv = h \cos\psi\, dt$, mithin doppelt so gross, als der eben besprochene Zuwachs. Denn ganz allgemein hat man

$$s + \varDelta s = s + \frac{ds}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dt^2} dt^2 + \ldots$$

$$\varDelta s = \frac{ds}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dt^2} dt^2 + \ldots$$

oder

$$\varDelta s = v\, dt + \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} dt^2 + \ldots \tag{36}$$

also durch Vergleichung dieser Formel mit 35)

$$\frac{dv}{dt} = h \cos\psi.$$

Dagegen ist

$$v + \varDelta v = v + \frac{dv}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{dt^2} dt^2 + \ldots$$

und mithin

$$(v + \varDelta v)\, dt = v\, dt + \frac{dv}{dt} dt^2 + \ldots$$

Fehlerhaft würde es aber sein, wenn man die Linie ac, welche wirklich $= \Delta s$ ist, als $(v + \Delta v)\, dt$ ansehen und demgemäss wegen Gleichung 35)

$$v\, dt + \frac{dv}{dt} dt^2 = v\, dt + \tfrac{1}{2} h \cos \psi\, dt^2,$$

also $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} h \cos \psi$ setzen wollte, indem diess so viel hiesse, als annehmen, die Masse m durchlaufe den Weg ac mit der Geschwindigkeit $v + \Delta v$, während doch $v + \Delta v$ die Geschwindigkeit darstellt, welche die Masse m erst im Endpunkte c dieses Weges erlangt.

In Wahrheit hat die Linie ac nach Gleichheit 36) und 35) den Werth

$$38)\qquad ac = \Delta s = v\, dt + \tfrac{1}{2} \frac{dv}{dt} dt^2 = v\, dt + \tfrac{1}{2} h \cos \psi\, dt^2.$$

Ferner ist nach Obigem und nach 27)

$$39)\qquad ac = \tfrac{1}{2} h\, dt^2 = \frac{1}{2 \cos \psi} \frac{dv}{dt} dt^2.$$

Die Linie αb ist

$$40)\qquad \alpha b = \tfrac{1}{2} f\, dt^2$$

Hiernach hat man in dem Dreiecke $b \alpha c$, worin Winkel $b \alpha c = p a r = \chi$ ist, für das Quadrat der Ablenkung cb

$$(cb)^2 = (\alpha b)^2 + (\alpha c)^2 - 2 (\alpha b)(\alpha c) \cos \chi$$

oder

$$41)\qquad (cb)^2 = \tfrac{1}{4} dt^4 (f^2 + h^2 - 2 f h \cos \chi)$$
$$= \tfrac{1}{4} dt^4 \left[f^2 + \left(\frac{1}{\cos \psi} \frac{dv}{dt} \right)^2 - 2 f \frac{dv}{dt} \frac{\cos \chi}{\cos \psi} \right].$$

Wenn man will, kann man statt 41) auch setzen

$$42)\qquad (cb)^2 = \tfrac{1}{4} dt^4 [(f \cos \varphi - h \cos \psi)^2 + (f \sin \varphi - h \sin \psi)^2]$$
$$= \tfrac{1}{4} dt^4 \left[\left(f \cos \varphi - \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(f \sin \varphi - \frac{dv}{dt} \operatorname{tang} \psi \right)^2 \right].$$

9.

Transformation der Gauss'schen Formel für die Zerlegung der Kräfte nach drei rechtwinkligen Achsen.

Zerlegt man die auf die Masse m angebrachte Kraft in ihren Componenten parallel zu drei rechtwinkligen Achsen, so seien

f, g, h die Geschwindigkeiten, welche diese Componenten am Ende der Zeit t der Masse m im Punkte a, dessen Coordinaten x, y, z sind, in der Zeiteinheit mitzutheilen vermögen, also

$\frac{1}{2} f\, dt^2$, $\frac{1}{2} g\, dt^2$, $\frac{1}{2} h\, dt^2$ die Räume, durch welche jene Kräfte die Masse m dem Zustande der Ruhe im Zeitelemente dt treiben würden,

u, v, w die Geschwindigkeiten parallel zu den drei Axen, welche die Masse m am Ende der Zeit t wirklich besitzt, also

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Der **wirkliche** Fortschritt des Punktes a im Laufe des Zeitelementes dt in der Richtung der drei Axen, wenn man die Inkremente Δx, Δy, Δz bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung entwickelt (ac in Fig. 10)

$$43)\quad \begin{cases} \Delta x = \frac{dx}{dt} dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} dt^2 = u\,dt + \frac{1}{2}\frac{du}{dt} dt^2 \\ \Delta y = \frac{dy}{dt} dt + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} dt^2 = v\,dt + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} dt^2 \\ \Delta z = \frac{dz}{dt} dt + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} dt^2 = w\,dt + \frac{1}{2}\frac{dw}{dt^2} dt^2. \end{cases}$$

Die Räume dagegen, welche der Punkt a in der Zeit dt durchlaufen würde, wenn er vollkommen frei wäre (ab in Fig. 10), sind

$$44)\quad \begin{cases} u\,dt + \frac{1}{2} f\,dt^2 \\ v\,dt + \frac{1}{2} g\,dt^2 \\ w\,dt + \frac{1}{2} h\,dt^2. \end{cases}$$

Demnach sind die Ablenkungen, in der Richtung der drei Axen ($cb = ab - ac$ in Fig. 10)

$$45)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} f\,dt^2 - \frac{1}{2}\frac{du}{dt} dt^2 = \frac{1}{2} dt^2 \left(f - \frac{du}{dt}\right) \\ \frac{1}{2} g\,dt^2 - \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} dt^2 = \frac{1}{2} dt^2 \left(g - \frac{dv}{dt}\right) \\ \frac{1}{2} h\,dt^2 - \frac{1}{2}\frac{dw}{dt} dt^2 = \frac{1}{2} dt^2 \left(h - \frac{dw}{dt}\right). \end{cases}$$

Da das Quadrat der wirklichen Ablenkung gleich der Summe der Quadraten der Ablenkungen nach den drei Axen ist, so erfordert das Gauss'sche Princip, dass die Summe

$$46)\quad \Sigma m \left(f - \frac{du}{dt}\right)^2 + \Sigma m \left(g - \frac{dv}{dt}\right)^2 + \Sigma m \left(h - \frac{dw}{dt}\right)^2$$

ein Minimum sei.

Was die Gleichung 5) betrifft, so wird dieselbe, wenn δx, δy, δz die Projektionen irgend einer möglichen **Verrückung** $c\gamma$ (Fig. 3) vom Punkte c bezeichnen, da dann die Projektion irgend einer anderen möglichen **Ablenkung** γb vom Punkte b in der Richtung der Axe der x den Werth $(cb) - \delta x = \frac{1}{2} dt^2 \left(f - \frac{du}{dt}\right) - \delta x$ hat,

$$47)\quad \frac{1}{4} dt^4 \Sigma m \left(f - \frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4} dt^4 \Sigma m \left(g - \frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4} dt^4 \Sigma m \left(h - \frac{dw}{dt}\right)^2$$
$$= \Sigma m \left[\frac{1}{2} dt^2 \left(f - \frac{du}{dt}\right) - \delta x\right]^2 + \Sigma m \left[\frac{1}{2} dt^2 \left(g - \frac{dv}{dt}\right) - \delta y\right]^2$$
$$+ \Sigma m \left[\frac{1}{2} dt^2 \left(h - \frac{dw}{dt}\right) - \delta z\right]^2$$
$$- \Sigma m (\delta x)^2 - \Sigma m (\delta y)^2 - \Sigma m (\delta z)^2.$$

Eine Entwicklung der Quadrate auf der rechten Seite führt sofort auf die bekannte Grundgleichung

$$48)\quad \Sigma m\left(f-\frac{du}{dt}\right)\delta x+\Sigma m\left(g-\frac{dv}{dt}\right)\delta y+\Sigma m\left(h-\frac{dw}{dt}\right)\delta z=0,$$

welche die Stelle der Gleichung 3) vertritt.

Es wird noch darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn gewisse Kräfte des Systems nicht auf Massen m, sondern auf massenlose Punkte wirken, und man die Componenten dieser Kräfte mit X, Y, Z bezeichnet, man in Gleichung 47) das Zeichen Σ in S zu verwandeln und auf der linken Seite die Summe

$$dt^2 \mathfrak{S}\, X\delta x+dt^2 \mathfrak{S}\, Y\delta y+dt^2 \mathfrak{S}\, Z\delta z$$

hinzuzufügen hat, indem sich alsdann das Summenzeichen S auf die materiellen Punkte und das Zeichen $\mathfrak{S}$ auf die massenlosen Punkte bezieht.

10.

Anwendung des Gauss'schen Princips auf die Pendelbewegung und auf das Gleichgewicht am Hebel.

Um die Anwendung des Gauss'schen Princips zu veranschaulichen, wollen wir die Bewegung zweier an den Endpunkten a, a' eines um A drehbaren Hebels befestigten schweren Massen m, m' (Fig. 11) betrachten. Es seien

a, a' die Hebelarme Aa, Aa',
  φ der Winkel BAa, welchen der Hebel am Ende der Zeit t mit der Horizontalen einschliesst,
  v die Winkelgeschwindigkeit desselben zu dieser Zeit,
  g die Geschwindigkeit, welche die Schwere in der Zeitschrift mittheilt,
p, p' resp. $= mg$, $m'g$ die Gewichte der Massen m, m'.

Da sich die Massen nur in den betreffenden Kreislinien bewegen können; so fällt die wirksame Kraft r in die Richtung der Tangente ra dieses Kreises; es ist also der Winkel $rap = BAa = \varphi$. Die Geschwindigkeit der Masse m ist av; nimmt man also $(a\alpha) = av\,dt$, so würde diese Masse vermöge der ihr innewohnenden Geschwindigkeit im Zeitelemente dt nach α gelangen. Macht man die Vertikale $(\alpha b) = \frac{1}{2} g\, dt^2$, so ist b der Punkt, in welchen jene Masse während dieser Zeit gelangen würde, wenn sie ganz frei wäre. Gelangt sie nun wirklich nach c, so dass Winkel $aAc = d\varphi$ und $\frac{d\varphi}{dt} = v$ ist; so sei $(\alpha c) = x$.

Accentuirt man die gleichnamigen Grössen für die Masse m', so erhält man

$$(ac) = (a\alpha) + x = a\,v\,dt + x$$
$$(a'c') = (a'\alpha') + x = a'v\,dt + x'$$

also

$$\frac{a v dt + x}{a} = \frac{a' v dt + x'}{a'},$$

mithin

$$x' = \frac{a'}{a} x.$$

Ferner ist in dem Dreiecke bca

$$(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 - 2(ab)(ac) \cos(bac)$$
$$= \tfrac{1}{4} g^2 dt^4 + x^2 - g\, x \cos \varphi\, dt^2.$$

Für das Dreieck $b'c'a'$ erhält man, da hier Winkel $b'a'c' = \pi - \varphi$ ist,

$$(b'c')^2 = \tfrac{1}{4} g^2 dt^4 \frac{a'^2}{a} x^2 + \frac{a'}{a} g x \cos \varphi\, dt^2.$$

Hiernach ist

$$49) \quad \Sigma m (bc)^2 = \tfrac{1}{4}(m + m') g^2 dt^4 + \frac{a^2 m + a'^2 m'}{a} x^2 - \frac{a m - a' m'}{a} g x \cos \varphi\, dt^2$$

Damit diese Summe nach dem Gauss'schen Principe ein Minimum werde, setzen wir ihr Differential nach x gleich Null. Diess giebt

$$50) \qquad x = \frac{am - a'm'}{a^2 m + a'^2 m'} \cdot \frac{a g \cos \varphi}{2} dt^2.$$

Da die Geschwindigkeit der Masse m am Ende der Zeit t gleich av, also $(ac) = x = \tfrac{1}{2} a \frac{dv}{dt} dt^2$ ist; so erhält man, wenn man diesen Ausdruck dem vorstehenden von x gleich setzt,

$$51) \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{a m - a' m'}{a^2 m + a'^2 m'} g \cos \varphi;$$

oder auch, da $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ ist,

$$52) \qquad \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{am - a'm'}{a^2 m + a'^2 m'} g = \frac{ap - a'p'}{a^2 p + a'^2 p'} g$$

als Grundgleichung für die zu bestimmende Pendelbewegung.

Will man den Winkel φ als unabhängige und die Winkelgeschwindigkeit v als abhängige Veränderliche einführen, so giebt Gleichung 51), da $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = v \frac{dv}{d\varphi}$ ist,

$$v\, dv = \frac{ap - a'p'}{a^2 p + a'^2 p'} g \cos \varphi\, d\varphi$$

oder durch Integration, wenn für $\varphi = 0$ die Winkelgeschwindigkeit $v = v_0$ ist,

$$53) \qquad \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{a p - a' p'}{a^2 p + a'^2 p'} g \sin \varphi.$$

Wollte man die Bedingungen für das G l e i c h g e w i c h t der Massen m, m' oder der Gewichte p, p' an dem Hebel aAa' herstellen, so müsste

$(\alpha c) = x$ aus Gleichung 50) gleich Null sein. Dies giebt die bekannte Beziehung

54) $$ap = a'p'.$$

11.

Anwendung des Gauss'schen Princips auf die Bewegung eines materiellen Punktes in einer gegebenen Fläche oder Linie.

Besonders einfach gestaltet sich die Anwendung des Gauss'schen Princips auf die Bewegung eines materiellen Punktes in einer gegebenen Fläche oder Linie. Nehmen wir sofort den allgemeinsten Fall einer gegebenen Fläche vor Augen. Es sei in Fig. 12

- v die Geschwindigkeit des Punktes a von der Masse m am Ende der Zeit t und
- g die Geschwindigkeit, welche die darauf angebrachte Kraft (etwa die Schwere) dieser Masse in der Zeiteinheit mittheilt.

Ist nun $a\alpha = v\,dt$ und die Linie αb in der Richtung der wirkenden Kraft $= \frac{1}{2} g\,dt^2$, also b der Ort, in welchen die Masse m in der Zeit dt gelangen würde, wenn sie ganz frei wäre, so ist der Ort c der Fläche, in welchen jene Masse wirklich gelangt, der Fusspunkt der von b auf die Fläche gefällten Normalen bc, da diess die kürzeste Linie ist, welche man von b nach der Fläche ziehen kann und offenbar diese kürzeste Linie der Bedingung des Gauss'schen Princips, dass $\Sigma m\,(bc)^2 = m\,(bc)^2$ ein Minimum sei, ein Genüge leistet.

Diese Eigenschaft reicht hin, um alle Bedingungen für die Bewegung des gegebenen Punktes zu entwickeln. Bezeichnet nämlich

- φ den Winkel $b\alpha n$, welchen die Richtung αb der Kraft mit der Normalen αn einschliesst, ein Winkel, welcher bei der unendlichen Kleinheit der in Rede stehenden Figur auch gleich $\alpha b c$ ist,
- ψ den Winkel $c\alpha e$, unter welchem sich der Durchschnitt αc der Normalebene $n\alpha b$ oder $\alpha b c$ mit der Tangentialebene gegen die Richtung $a\alpha e$ der Geschwindigkeit der Masse m am Ende der Zeit neigt, so ist

$$a\alpha = v\,dt, \quad \alpha b = \tfrac{1}{2} g\,dt^2, \quad \alpha c = \tfrac{1}{2}\alpha b . \sin\varphi = \tfrac{1}{2} g \sin\varphi\,dt^2$$

und

$$ac = a\alpha + \alpha c . \cos\psi = v\,dt + \tfrac{1}{2} g \sin\varphi \cos\psi\,dt^2.$$

Da nun auch $ac = v\,dt + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}dt^2$ ist, so hat man die Grundgleichung

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\varphi \cos\psi.$$

12.

Anwendung des Gauss'schen Princips auf den Stoss unelastischer Körper.

Um das Gauss'sche Princip auf den Stoss unelastischer Körper anzuwenden, sei die Geschwindigkeit der beiden in gerader Linie sich bewegenden Massen m, m' vor dem Stosse resp. gleich v, v' und nach dem Stosse gleich V. Träte im Augenblicke des Stosses keine Vereinigung beider Massen, also kein Zwang der Bewegung ein, so würden sich beide Massen in dem Zeitelemente dt, wenn sie ganz frei wären, durch die Räume $v\,dt$, $v'\,dt$ bewegen. Unter den Bedingungen des Systems (als vereinigter Körper) durchlaufen sie beide wirklich den Raum $V\,dt$. Die Ablenkung beträgt also, wenn $v < v'$ ist, resp. $(V - v)\,dt$ und $(v' - V)\,dt$. Hiernach ist der Zwang

$$m\,(V - v)^2\,dt^2 + m'\,(v' - V)^2\,dt^2.$$

Damit dieser Ausdruck nach dem Gauss'schen Princip ein Minimum werde, setzen wir sein Differential nach V gleich Null. Diess giebt die bekannte Beziehung

$$56)\qquad V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

(Schluss im nächsten Hefte.)

XI.

Studien über Differentialgleichungen.

Von Professor Simon Spitzer.

---

§. 1. Ich habe bei einer frühern Gelegenheit für die Gleichung

$$1)\quad (m+x)\,y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]\,y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta\,(m+x)]\,y = 0$$

in dem speciellen Falle, wo

$$2)\qquad A+B=1$$

ist, und die Zahlen gleich positiv sind, oder imaginär, mit reellen positiven Bestandtheilen, das merkwürdige Integral

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} y &= C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \\ &+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log\,[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \end{aligned}\right.$$

gefunden, und für folgende andere Gleichung:

$$4)\quad (m+x)\,y'' + [B-2\alpha(m+x)]\,y' + [A-B\alpha+\alpha^2(m+x)]\,y = 0$$

in dem speciellen Falle, wo

$$5)\qquad B=1$$

ist, das Integral

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} y &= C_1\, e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{2+\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\, du \\ &+ C_2\, e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}} \log\,[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \end{aligned}\right.$$

In der hier vorliegenden Arbeit habe ich zuerst jene lineare Differentialgleichung aufgesucht, welche das Integral:

$$
7)\quad \left\{\begin{aligned}
y = {} & C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du \\
& + C_2 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \\
& + C_3 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \\
& + \cdots\cdots\cdots \\
& + C_r \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} lg^{r-1}[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du
\end{aligned}\right.
$$

hat, unter A und B beliebige positive oder imaginäre Zahlen mit positiven reellen Bestandtheilen verstanden, und nachdem ich eine solche Gleichung gefunden hatte, versuchte ich jene lineare Differenzialgleichung aufzustellen, welcher genügt wird, durch:

$$
8)\quad \left\{\begin{aligned}
y = {} & C_1 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\, du \\
& + C_2 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}} \log[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
& + C_3 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{-2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}} \log^2[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
& + \cdots\cdots\cdots \\
& + C_r e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+x\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-1}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du
\end{aligned}\right.
$$

unter B eine solche positive Zahl verstanden, die grösser als $\frac{1}{2}$ ist. Die Differentialgleichungen zu denen ich hier geführt wurde, sind höchst merkwürdiger Art, und erinnern lebhaft an die einzelnen Glieder der Gleichungen, zu welchen Gauss bei der Kreistheilung kam, und den Gliedern der Gleichungen, welche Abel betrachtete, und welche die Gauss'schen als specielle Fälle umfassen.

Sind

9) $\quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad P_4 = 0, \quad P_5 = 0$ etc. etc.

jene Reihen von Differentialgleichungen, deren Integral die Form 7) oder oder 8) haben, falls r successive die Werthe

1 2 3 4 5 etc. etc.

annimmt, so ist jede der Gleichungen 9) aus der Vorhergehenden auf genau dieselbe Weise abgeleitet, es entsteht nämlich jede Gleichung aus der Vorhergehenden dadurch, dass man in diesen statt y, $(m+x)\,P_1$ setzt, unter P_1 für die Gleichungen, deren Integrale die Form 7) haben soll, den Werth $(m+x)\,y'' + [A+B-(\alpha+\beta)\,(m+x)]\,y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]\,y$ und für Gleichungen, deren Integrale die Form 8) haben soll, den Werth

$$(m+x)\,y'' + [B - 2\alpha(m+x)]\,y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]\,y$$

verstanden.

§. 2. Bevor ich zum Beweise der eben ausgesprochenen Sätze schreite, muss ich mir erlauben, einen Satz über Differentialgleichungen anzuführen, der zwar meines Wissens bisher nirgends bestimmt ausgesprochen wurde, der aber so einfach ist, dass er nur erwähnt zu werden braucht, um vollkommen begriffen zu werden. — Ist nämlich

$$10)\qquad \varphi\,(x, y, y', y'', y''', \ldots) = f\,(x)$$

eine Differentialgleichung, deren Integrale

$$11)\qquad y = F\,(x)$$

ist, und

$$12)\qquad \Psi(x, y, y', y'', y''', \ldots) = 0$$

eine Differentialgleichung, deren Integrale

$$13)\qquad y = f\,(x)$$

ist, so genügt offenbar der Differentialgleichung

$$14)\qquad \Psi\,(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots) = 0$$

in welcher φ der Kürze halber statt $\varphi\,(x, y, y', y'', y''', \ldots)$ gesetzt wurde,

$$11)\qquad y = F\,(x).$$

Denn, setzt man $y = F\,(x)$ in die Gleichung 14) und bedenkt, dass diese Substitution in φ vorgenommen, selbiges in $f\,(x)$ verwandelt, so hat man als Resultat der Substitution von $y = F\,(x)$ in 14)

$$15)\qquad \Psi\,(x, f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots) = 0.$$

Diese Gleichung ist aber wahr weil $y = f\,(x)$ der Gleichung 12) genügt, somit der ausgesprochene Satz bewiesen.

§. 3. Ich führe nun in den Ausdruck.

$$16)\qquad (m+x)\,y'' + [A+B-(\alpha+\beta)\,(m+x)]\,y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta\,(m+x)] = P_1$$

statt y folgenden Werth ein:

$$17)\quad y = \int_\alpha^\beta e^{u\,(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}\,(u-\beta)^{B-1} \log^r[(m+x)\,(u-\alpha)\,(u-\beta)]\,du$$

und suche den hiefür entsprechenden Werth von P_1. Zu dem Behufe bilde ich mir y' und y'', und erhalte:

18) $$\begin{cases} y' = \int_\alpha^\beta u\, e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^r [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \\ + \frac{r}{m+x} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^{r-1} [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \end{cases}$$

ferner:

19) $$\begin{cases} y'' = \int_\alpha^\beta u^2 e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^r [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \\ + \frac{2r}{m+x} \int_\alpha^\beta u e^{u(m+x)} u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^{r-1} [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \\ - \frac{r}{(m+x)^2} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^{r-1} [(m+u)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \\ + \frac{r(r-1)}{(m+x)^2} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^{r-2} [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \end{cases}$$

und somit ist, wenn zur Abkürzung $(m+x)(u-\alpha)(u-\beta) = U$ gesetzt wird,

20) $$\begin{cases} P_1 = (m+x) \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log^r U\, du \\ + \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} [A(u-\beta) + B(u-\alpha)] \log^r U\, du \\ + r \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (2u-\alpha-\beta) \log^{r-1} U\, du \\ + \frac{r(A+B-1)}{m+x} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-} \log^{r-1} U\, du \\ + \frac{r(r-1)}{(m+x)} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^{r-2} U\, du \end{cases}$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks nämlich:

$$(m+x) \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log^r U\, du$$

gestattet folgende Schreibweise

$$\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log^r U \frac{d e^{u(m+x)} du}{du}$$

und giebt nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$-\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} [A(u-\beta)+B(u-\alpha)] \log^{r-1} U\, du$$

$$-r\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (2u-\alpha-\beta) \log^{r-1} U\, du$$

weil der ausser dem Integralzeichen stehende Ausdruck

$$e^{u(m+x)}(u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log^r[(m-x)(u-\alpha)(u-\beta)]$$

für die Werthe $u=\alpha$ und $u=\beta$ unter den vorher für A und B gemachten Voraussetzungen verschwindet. Man erhält durch dies

$$21)\quad \begin{cases} P_1 = \dfrac{r(A+B-1)}{m+x} \displaystyle\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^{r-1} U\, du \\ \quad + \dfrac{r(r-1)}{m+x} \displaystyle\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log^{r-2} U\, du. \end{cases}$$

§. 4. Die jetzt eben erhaltene Gleichung will ich einer sorgfältigen Discussion unterziehen, und setze daher zuerst $r=0$, d. h. mit andern Worten: ich suche jene Differentialgleichung, welcher genügt wird für

$$22)\qquad y=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

und finde hiefür $P_1=0$, oder was dasselbe ist;

1) $m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0,$
was sich auch äusserst leicht verificiren lässt.

§. 5. Ich setze alsdann $r=1$ und bekomme

$$23)\quad P_1=\frac{A+B-1}{m+x}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\alpha)^{B-1} du$$

als Differentialgleichung, deren Integral

$$24)\qquad y=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

ist. Da nun die Gleichung 23) auch so geschrieben werden kann:

$$25)\quad (m+x)P_1=(A+B-1)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

und der 2. Theil dieser Gleichung, vermöge dem vorhergehenden Paragraphe, ein der Gleichung

1) $(m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0$

genüge leistender Werth ist, so hat man durch Anwendung des in §. 2 hingestellten Satzes die Gleichung

$$26)\quad \begin{aligned}(m+x)[(m+x)P_1]''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_1]'\\+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)].(m+x)P_1=0,\end{aligned}$$

welche aber nicht nur durch dieselben Werthe erfüllt wird, als die Gleichung 23), sondern auch noch durch alle jene Werthe von y, welche die Gleichung

$$P_1=0$$

erfüllen. Man hat somit folgendes Integrale der Gleichung 26)

$$27)\quad \left\{\begin{aligned}y=C_1\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du\\+C_2\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du.\end{aligned}\right.$$

Sollte

$$2)\qquad A+B=1$$

sein, so geht die Gleichung 23) über in $P_1=0$, und folglich hat in diesem speciellen Falle die Gleichung $P_1=0$ die beiden in 27) hingestellten partilären Integrale.

§. 6. Ich betrachte jetzt die Gleichung 21) in dem speciellen Falle, wo $r=2$ ist, und erhalte:

$$28)\quad \left\{\begin{aligned}(m+x)P_1=2(A+B-1)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}log\,U\,du\\+2\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\beta)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du\end{aligned}\right.$$

als diejenige Gleichung, welcher genügt

$$29)\quad y=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta^{B-1}log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du.$$

Es ist nun nach dem eben Bewiesenen der zweite Theil der Gleichung 28) ein Ausdruck, welcher statt y in die Gleichung 26) gesetzt, dieselbe in eine identische verwandelt, somit erhält man durch Anwendung des in §. 2 hingestellten Satzes, auch noch eine andere Differentialgleichung, welche durch den in 29) gegebenen Werth von y erfüllt wird, und zwar entsteht diese andere Gleichung aus der Gleichung 26) dadurch, dass man hierein statt y den Werth $(m+x)P_1$ setzt. Um mit Leichtigkeit in die

Gleichung 26) statt y den Ausdruck $(m+x)P_1$ einzuführen, nehme ich diese Substitution vorerst in P_1 vor, da derselbe dreimal in der Gleichung 26) vorkommt. Nun ist aber:

16) $P_1 = (m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y$

und setzt man hierein statt y den Ausdruck $(m+x)P_1$ und nennt das hiebei herauskommende Resultat P_2, so ist:

30) $$P_2 = (m+x)[(m+x)P_1]'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_1]' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)](m+x)P_1$$

und somit die gewünschte Gleichung:

31) $$(m+x)[(m+x)P_2]'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_2]' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)](m+x)P_2 = 0$$

Da diese auch durch die Integrale der Gleichung $P_2 = 0$ erfüllt wird, so hat man folgenden, der Gleichung 31) genügenden Werth:

32) $$\begin{cases} y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du \\ + C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du \\ + C_3 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du \end{cases}$$

Sollte wieder $A+B=1$ sein, so erhielte man statt der Gleichung 28) die einfachere Gleichung

33) $$(m+x)P_1 = 2\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du$$

und da der zweite Theil derselben der Gleichung 1) genügt, so hat man:

$$(m+x)[(m+x)P_1]'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_1]' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)].(m+x)P_1 = 0$$

als Differentialgleichung, welcher ebenfalls durch den in 32) hingestellten Ausdruck genügt wird.

§. 7. Ganz ebenso weiter vorgehend, hat man für $r=3$ die Gleichung

34) $$\begin{cases} (m+x)P_1 = 3(A+B-1)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log^2 U\,du \\ +6\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log U\,du \end{cases}$$

deren Integrale

$$35)\quad y=\int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

ist. Nun genügt der zweite Theil der Gleichung 34) der Gleichung 31); setzt man daher in diese Gleichung 31) statt y, $(m+x)P_1$, so erhält man eine Differentialgleichung, deren Integral ebenfalls 35) ist. Will man nun die eben besprochene Substitution wirklich durchführen, so nehme man sie vorerst in P_2 vor, weil dieses dreimal in der Gleichung 31) vorkommt. Es ist aber:

$$30)\quad P_2=(m+x)[(m+x)P_1]''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_1]' \\ +[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)](m+x)P_1$$

und setzt man hierein statt y, $(m+x)P_1$, so verwandelt sich nach dem Vorhergehenden P_1 in P_2 und bezeichnet man mit P_3 das Substitutions-Resultat von $(m+x)P_1$ statt y in P_2, so hat man:

$$36)\quad P_3=(m+x)[(m+x)P_2]''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x).[(m+x)]P_2]' \\ +[A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)](m+x)P_2$$

und folglich ist die gesuchte Gleichung:

$$37)\quad (m+x)[(m+x)P_3]''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_3]' \\ +[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)].(m+x)P_3=0,$$

Da diese nun, wie man sieht, auch $P_3=0$ erfüllt wird, so hat man für das Integral dieser Gleichung:

$$38)\quad \begin{cases} y=C_1\int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du \\ +C_2\int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du \\ +C_3\int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du \\ +C_4\int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log^3[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du. \end{cases}$$

Der Fall $A+B=1$ giebt wieder eine Vereinfachung der Gleichung 34)

$$39)\quad (m+x)P_1=6\int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

und hierauf die Schlüsse der vorhergehenden Paragraphen angewendet, führen auf die Gleichung

$$31)\quad (m+x)[(m+x)P_2]''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_2]' \\ +[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)](m+x)P_2=0,$$

welche also ebenfalls durch den in 38) hingestellten Ausdruck erfüllt wird.

§. 38. Diese Betrachtungsweise lässt sich mit grosser Leichtigkeit verallgemeinern, und man findet, wenn man wie bisher

$$P_1 = (m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y$$

$$P_2 = (m+x)[(m+x)P_1]'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_1]' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)].(m+x)P_1$$

$$P_3 = (m+x)[(m+x)P_2]'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_2]' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)].(m+x)P_2$$

$$P_4 = (m+x)[(m+x)P_3]'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)].[(m+x)P_3]' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)].(m+x)P_3$$

. . . .

etc. setzt, und die gefundenen Resultate übersichtlich zusammenstellt, für die Gleichung

$$P_1 = 0$$

Das Integral

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

oder

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du$$

je nachdem nämlich $A+B \gtrless 1$ oder $A+B=1$ ist; ferner findet man für die Gleichung

$$P_2 = 0$$

das Integral

$$y = C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

$$+ C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du$$

oder

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-u} du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} log[(m+x)(u-\alpha) u-\beta)] du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

je nachdem nämlich wieder $A+B \gtrless 1$ oder $A+B=1$ ist. Hat man die Gleichung

$$P_3 = 0$$

so ist das Integral derselben entweder

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

$$+ C_3 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

oder aber

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

$$+ C_3 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

$$+ C_4 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1} \log^3[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du$$

je nachdem $A+B \lessgtr 1$ oder $A+B=1$ ist, etc. etc., C_1, C_2, C_3. C_4 ... bedeuten willkürliche Integrationsconstanten.

§. 9. Ganz auf dieselbe Weise lässt sich der zweite der von mir am Anfange ausgesprochenen Sätze beweisen, und es wird auch hier, um diess zu thun, gut sein, wenn ich das Resultat der Substitution von

$$40)\quad y = e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{B-1}{2}} \log^r[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du$$

in den Ausdruck

$$(m+x)y'' + [B-2\alpha(m+x)]y' + [A-B\alpha+\alpha^2(m+x)]y,$$

den ich der Kürze halber Q_1 nennen werde, bestimme. — Aus der Gleichung 40) folgen nachstehende Werthe für y' und y''

$$
41)\left\{
\begin{aligned}
y' &= \alpha e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^r [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
&+ \frac{e^{\alpha x}}{2\sqrt{m+x}} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^r [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
&+ \frac{r e^{\alpha x}}{2(m+x)} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^{r-1} [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
y'' &= \alpha^2 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^r [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
&+ \frac{\alpha e^{\alpha x}}{\sqrt{m+x}} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^r [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
&+ \frac{e^{\alpha x}}{4(m+x)} \cdot \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u^2 e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^r [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
&- \frac{e^{\alpha x}}{4(m+x)\sqrt{m+x}} \cdot \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^r [u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
&+ \frac{\alpha r e^{\alpha x}}{m+x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^{r-1} [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
&+ \frac{r e^{\alpha x}}{2(m+x)\sqrt{m+x}} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^{r-1} [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{r e^{\alpha x}}{2(m+x)^2} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} [(u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^{r-1} [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\
&- \frac{r(r-1) e^{\alpha x}}{4(m+x)^2} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}} \log^{r-2} [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du
\end{aligned}
$$

und diese Werthe eingeführt in Q_1 geben:

$$
43)\left\{\begin{aligned}
Q_1 = {} & \frac{e^{\alpha x}}{4}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}}(log^r[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du \\
& + \frac{(2B-1)e^{\alpha x}}{4\sqrt{m+x}}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\,e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,log^r[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du \\
& + \frac{r\,e^{\alpha x}}{2\sqrt{m+x}}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{+A}} u\,e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,log^{r-1}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du \\
& + \frac{r(B-1)e^{\alpha x}}{2(m+x)}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,log^{r-1}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du \\
& + \frac{r(r-1)e^{\alpha x}}{4(m+x)}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,log^{r-2}(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du
\end{aligned}\right.
$$

Das erste Glied dieses Ausdrücks, nämlich:

$$
\frac{e^{\alpha x}}{4}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}}\,log^r[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du
$$

gestattet folgende Schreibweise:

$$
\frac{e^{\alpha x}}{4\sqrt{m+x}}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} (u^2+4A)^{B-\frac{1}{2}}\,log^r[(u^2+4A)\sqrt{m+x}].\frac{d\,e^{u\sqrt{m+x}}}{du}\,du
$$

und diess giebt nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$
-\frac{(2B-1)e^{\alpha x}}{4\sqrt{m+x}}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\,e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,log^r[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du
$$

$$
-\frac{r\,e^{\alpha x}}{2\sqrt{m+x}}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\,e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,log^{r-1}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du
$$

folglich ist:

$$44)\left\{\begin{aligned} Q_1 &= \frac{r(B-1)e^{\alpha x}}{2(m+x)}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\log^{r-1}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du \\ &+ \frac{r(r-1)e^{\alpha x}}{4(m+x)}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\log^{r-2}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du\end{aligned}\right.$$

§. 10. Setzt man hierein $r=0$, so erhält man $Q=0$, oder

$$4)\quad (m+x)y''+[B-2\alpha(m+x)]y'+[A-B\alpha+\alpha^2(m+x)]y=0$$

und das Integral derselben

$$45)\qquad y=e^{\alpha x}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,du$$

§. 11. Setzt man alsdann 44) $r=1$, so erhält man die Gleichung

$$46)\quad (m+x)Q_1=\frac{(B-1)e^{\alpha x}}{2}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,du$$

und ihr genügt:

$$47)\quad y=e^{\alpha x}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\log[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du.$$

Da der zweite Theil der Gleichung 46) nach dem vorhergehenden Paragraphen der Gleichung 4) genügt, so erhält man durch Anwendung des in §. 2 ausgesprochenen Satzes auch folgende Gleichung

$$48)\quad \begin{aligned}(m+x)[(m+x)Q_1]''+[B-2\alpha(m+x)].[(m+x)Q_1]' \\ +[A-B\alpha+\alpha^2(m+x)].(m+x)Q_1=0,\end{aligned}$$

welche durch 47) erfüllt wird, und da die Gleichung 48) auch durch $Q=0$ erfüllt wird, so hat man für das Integral von 48)

$$49)\left\{\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,du \\ &+ C_2 e^{\alpha x}\int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\log[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du\end{aligned}\right.$$

In dem speciellen Falle, wo

$$B=1$$

ist, folgt auch aus 46) $Q=0$, somit hat diese Gleichung in dem erwähnten Falle ebenfalls die beiden partic. Integrale, die in 49) gegeben sind.

§. 12. Verfolgt man also, wie man sieht, genau den früher eingeschlagenen Weg, so erhält man, wenn man

$$Q_1 = (m+x)y'' + [B - 2\alpha(m+x)]y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]y$$

$$Q_2 = (m+x)[(m+x)Q_1]'' + [B - 2\alpha(m+x)].[(m+x)Q_1]' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)](m+x)Q_1$$

$$Q_3 = (m+x)[(m+x)Q_2]'' + [B - 2\alpha(m+x)].[(m+x)Q_2]' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)](m+x)Q_2$$

$$Q_4 = (m+x)[(m+x)Q_3]'' + [B - 2\alpha(m+x)].[(m+x)Q_3]' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)](m+x)Q_3$$

. . . .

setzt, für das Integral von

$$Q_1 = 0$$

entweder

$$y = C_1 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{B-\frac{3}{2}} du$$

oder

$$y = C_1 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{B-\frac{3}{2}} du$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{B-\frac{3}{2}} \log[(u^2 + 4A)\sqrt{m+x}] du$$

je nachdem nämlich $B \lessgtr 1$ oder $B = 1$ ist. —

Hat man die Gleichung

$$Q_2 = 0,$$

so ist das Integral derselben, entweder

$$y = C_1 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{B-\frac{3}{2}} du$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{B-\frac{3}{2}} \log[(u^2 + 4A)\sqrt{m+x}] du$$

oder aber

$$y = C_1 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{B-\frac{3}{2}} du$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{B-\frac{3}{2}} \log[(u^2 + 4A)\sqrt{m+x}] du$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{B-\frac{3}{2}} \log^2 [(u^2 + 4A)\sqrt{m+x}]\, du$$

je nachdem wieder $B \gtrless 1$ oder $B = 1$ ist etc. etc.

§. 13. Auch der specielle Fall, wo nämlich in Q_1 das $A = 0$, $B > \frac{1}{2}$ ist, und wo somit statt der Gleichung 4) folgende speciellere zu stehen kommt

50) $(m+x)y'' + [B - 2\alpha(m+x)]y' + [-B\alpha - \alpha^2(m+x)]y = 0$

gestattet eine ähnliche Behandlung. Bevor ich diess zeige, will ich aber bemerken, dass die Gleichung 8) durch Substitution von

$$u = 2v\sqrt{-A}$$

auch so geschrieben werden kann:

$$51) \left\{ \begin{aligned} y = {} & B_1 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} e^{2v\sqrt{-A(m+x)}} (1-v^2)^{B-\frac{3}{2}}\, dv \\ & + B_2 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} e^{2v\sqrt{-A(m+x)}} (1-v^2)^{B-\frac{3}{2}} \log [(1-v^2)\sqrt{m+x}]\, dv \\ & + B_3 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} e^{2v\sqrt{-A(m+x)}} (1-v^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^2 [(1-v^2)\sqrt{m+x}]\, dv \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + B_r e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} e^{2v\sqrt{-A(m+x)}} (1-v^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-1} [(1-v^2)\sqrt{m+x}]\, dv. \end{aligned} \right.$$

Setzt man jetzt, da $A = 0$ ist,

$$52) \quad y = e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^r [(1-u^2)\sqrt{m+x}]\, du$$

in

53) $(m+x)y'' + [(B - 2\alpha(m+x)]y' + [-B\alpha + \alpha^2(m+x)]y = M_1,$

so erhält man, da

$$54) \left\{ \begin{aligned} y' = {} & \alpha e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^r [(1-u^2)\sqrt{m+x}]\, du \\ & + \frac{r e^{\alpha x}}{2(m+x)} \int_{-1}^{+} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-1} [(1-u^2)\sqrt{m+x}]\, du \end{aligned} \right.$$

$$55)\left\{\begin{aligned} y'' &= \alpha^2 e^{\alpha x}\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^r[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du \\ &+\frac{r\alpha e^{\alpha x}}{m+x}\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-1}[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du \\ &-\frac{r e^{\alpha x}}{2(m+x)^2}\int\limits_{-1}^{+1}(u-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-1}(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du \\ &+\frac{r(r-1)e^{\alpha x}}{4(m+x)^2}\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-2}[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du \end{aligned}\right.$$

ist, nach verrichteter Substitution und Weglassung der sich aufhebenden Glieder

$$56)\left\{\begin{aligned} M_1 = &\frac{r(B-1)e^{\alpha x}}{2(m+x)}\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-1}[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du \\ &+\frac{r(r-1)e^{\alpha x}}{4(m+x)}\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-2}[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du \end{aligned}\right.$$

ein Ausdruck, welcher die grösste Analogie mit dem in 44) hingestellten hat. Durch Wiederholung der vorher gemachten Schlüsse findet man daher für

$$M_1 = 0$$

Das Integral

$$y = C_1 e^{\alpha x} \text{ oder } y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}\int\limits_{+1}^{-1}\frac{\log[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

je nachdem nämlich

$$B \gtrless 1 \text{ oder } B = 1$$

ist. Setzt man

$$\begin{aligned} M_2 = (m+x)[(m+x)M_1]'' &+ [B-2\alpha(m+x)] . [(m+x)M_1] \\ &+ [-B\alpha + \alpha^2(m+x)](m+x)M_1 \end{aligned}$$

so hat man für die Gleichung

$$M_2 = 0$$

das Integral

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du$$

oder

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} \frac{\log[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$+ C_3 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} \frac{\log^2[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

je nachdem wieder $B \lessgtr 1$ oder $B = 1$ ist. Setzt man ferner

$$M_3 = (m+x)[(m+x)M_2]'' + [B - 2\alpha(m+x)].[(m+x)M_2]'$$
$$+ [-B\alpha + \alpha^2(m+x)](m+x)M_2$$

so hat man für die Gleichung

$$M_3 = 0$$

das Integral

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du$$

$$+ C_3 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^2[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du$$

oder

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} \frac{\log[(1-u^2)\sqrt{m+x}]\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$+ C_3 \int_{-1}^{+1} \frac{\log^2[(1-u)^2\sqrt{m+x}]}{\sqrt{1-u^2}}\,du + C_4 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} \frac{\log^3[(1-u^2)\sqrt{m+x}]}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

je nachdem $B \gtrless 1$ oder $B = 1$ ist etc. etc.

Kleinere Mittheilungen.

XXIII. Ueber die Ableitung der Grundformeln der Logarithmen und der Trigonometrie aus der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1 \pm x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = 0.$$

Euler behandelt im 5. Capitel der 2. Abtheilung des 1. Bandes der „*Institutiones calculi integralis*“, ehe er zur Ableitung seines Additionstheoremes für die elliptischen Integrale übergeht, zuerst diejenige Differentialgleichung, deren einzelne Glieder die Differentiale eines *Arcus sinus* oder *Logarithmus* sind, nämlich die Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{d\xi}{\sqrt{a + 2b\xi + \xi^2}} + \frac{d\eta}{\sqrt{a + 2b\eta + \eta^2}} = 0.$$

Dass sich die Lagrange'sche Methode der Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{\sqrt{A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + E\xi^4}} + \frac{d\eta}{\sqrt{A + B\eta + C\eta^2 + D\eta^3 + E\eta^4}} = 0$$

auch auf die vorhergehende einfache Differentialgleichung übertragen lässt, ist allerdings eine Sache, die sich von selbst versteht; da aber diese Uebertragung meines Wissens noch nicht wirklich ausgeführt ist, und da die Behandlung der elementaren Transcendenten in ähnlicher Weise, wie die elliptischen Transcendenten behandelt worden sind, mir sehr geeignet scheint, das Studium der letzteren zu erleichtern, so erlaube ich mir, die erwähnte Integration hier mitzutheilen.

Bezeichnet man mit ε eine Grösse, die entweder $+1$ oder -1 ist, so geht die Differentialgleichung 1) durch die Substitution

$$x\sqrt{\varepsilon} = \frac{c\xi + b}{\sqrt{ac - b^2}}, \qquad y\sqrt{\varepsilon} = \frac{c\eta + b}{\sqrt{ac - b^2}}$$

in folgende

$$2) \qquad \frac{dx}{\sqrt{1 + \varepsilon x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 + \varepsilon y^2}} = 0$$

über. Integrirt man diese Glied für Glied und bezeichnet mit z denjenigen Werth von y, welcher $x=0$ entspricht, so erhält man für den Fall, dass $\varepsilon=-1$ ist

$$arc\sin x + arc\sin y = arc\sin z$$

und, wenn $\varepsilon=+1$ ist,

$$\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right),$$

und die Aufgabe ist jetzt, durch anderweitige Integration der Differentialgleichung 2) eine algebraische Relation zwischen x, y und z zu finden, welche den vorstehenden transcendenten Relationen gleichgeltend ist.

Betrachtet man mit Lagrange x und y als Functionen einer neuen Veränderlichen t, indem man setzt

$$3)\qquad \frac{dx}{dt}=\sqrt{1+\varepsilon x^2},\quad \text{so folgt } \frac{dy}{dt}=-\sqrt{1+\varepsilon y^2}$$

und

$$4)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=1+\varepsilon x^2,\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1+\varepsilon y^2,$$

woraus sich durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon x,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\varepsilon y$$

ergiebt. Die vollständige Integration dieser beiden Differentialgleichungen liefert, wenn mit a, a', b, b' vier willkürliche Constanten bezeichnet werden, die beiden Gleichungen

$$5)\qquad x=a e^{t\sqrt{\varepsilon}}+a' e^{-t\sqrt{\varepsilon}};\ y=b e^{t\sqrt{\varepsilon}}+b' e^{-t\sqrt{\varepsilon}}$$

aus welchen

$$6)\quad \frac{dx}{dt}=\sqrt{\varepsilon}\left\{a e^{t\sqrt{\varepsilon}}-a' e^{-t\sqrt{\varepsilon}}\right\};\ \frac{dy}{dt}=\sqrt{\varepsilon}\left\{b e^{t\sqrt{\varepsilon}}-b' e^{-t\sqrt{\varepsilon}}\right\}$$

folgt. Man hat jetzt vier willkürliche Constanten, während die Integration der Differentialgleichung 2) nur eine solche mit sich führen soll; betrachtet man z als diese Constante, so müssen a, a', b, b' durch z ausgedrückt werden. Substituirt man die Ausdrücke 5) und 6) in die Gleichungen 4), so erhält man

$$4aa'=1,\quad 4bb'=1,$$

oder

$$a'=\frac{1}{4a},\quad b'=\frac{1}{4b}.$$

Aus den Gleichungen 5) ergiebt sich:

$$e^{t\sqrt{\varepsilon}}=\frac{b'x-a'y}{ab'-a'b},\qquad e^{-t\sqrt{\varepsilon}}=\frac{ay-bx}{ab'-a'b}$$

oder wenn man die Werthe von a' und b' substituirt

$$e^{t\sqrt{\varepsilon}}=\frac{ax-by}{a^2-b^2},\qquad e^{-t\sqrt{\varepsilon}}=\frac{4ab\,(ay-bx)}{a^2-b^2}.$$

Setzt man nun diese Werthe und die für a' und b' gefundenen Ausdrücke

in die Gleichungen 6) hinein, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen 3) die Relationen

$$\sqrt{1+\varepsilon x^2}=\sqrt{\varepsilon}\,.\frac{(a^2+b^2)x-2ab.y}{a^2-b^2};\quad -\sqrt{1+\varepsilon y^2}=\sqrt{\varepsilon}\,.\frac{2abx-(a^2+b^2)y}{a^2-b^2}$$

oder wenn man für $\sqrt{\varepsilon}\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ und $\sqrt{\varepsilon}\,\frac{2ab}{a^2-b^2}$ *resp.* A und B schreibt,

$$\sqrt{1+\varepsilon x^2}=Ax-By,\quad -\sqrt{1+\varepsilon y^2}=Bx-Ay.$$

Setzt man hierin $x=0$ und $y=z$, so ergiebt sich

$$B=-\frac{1}{z},\quad A=\frac{\sqrt{1+\varepsilon z^2}}{z}.$$

Demnach erhält man

$$z\sqrt{1+\varepsilon x^2}=x\sqrt{1+\varepsilon z^2}+y;\quad z\sqrt{1+\varepsilon y^2}=y\sqrt{1+\varepsilon z^2}+x,$$

woraus sich

$$z=\frac{y^2-x^2}{y\sqrt{1+\varepsilon x^2}-x\sqrt{1+\varepsilon y^2}}$$

und wenn man bedenkt, dass

$$y^2-x^2=y^2(1+\varepsilon x^2)-x^2(1+\varepsilon y^2)$$

ist,

$$z=y\sqrt{1+\varepsilon x^2}+x\sqrt{1+\varepsilon y^2} \tag{7}$$

ergiebt. Dies ist die gesuchte algebraische Relation zwischen x, y und z, welche die Grundformeln der Logarithmen und der Trigonometrie in sich schliesst. Denn setzt man für den Fall, dass $\varepsilon=+1$ ist,

$$x+\sqrt{1+x^2}=X,\quad y+\sqrt{1+y^2}=Y,$$

so wird

$$x=\frac{X^2-1}{2X},\quad y=\frac{Y^2-1}{2Y};\quad \sqrt{1+x^2}=\frac{X^2+1}{2X},\quad \sqrt{1+y^2}=\frac{Y^2+1}{2Y},$$

$$z=\frac{X^2Y^2-1}{2XY},\quad \sqrt{1+z^2}=\frac{X^2Y^2+1}{2XY};\quad z+\sqrt{1+z^2}=XY,$$

also

$$\log X+\log Y+=\log(XY)$$

oder, $\log X=u$, $\log Y=v$ gesetzt, $e^{u+v}=e^u\,.\,e^v$.

Setzt man ferner für den Fall, dass $\varepsilon=-1$ ist,

$$\arcsin x=u,\quad \arcsin y=v,$$

so wird

$$x=\sin u,\quad \sqrt{1-x^2}=\cos u;\quad y=\sin v,\quad \sqrt{1-y^2}=\cos v,$$

$$z=\sin(u+v),$$

und es ergiebt sich

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\sin v\,.\,\cos u.$$

Zürich, den 12. Mai 1858.

H. Durège, Dr. phil.,
Privatdocent am Polytechnicum in Zürich.

XXIV. Entwickelung von $e^{\lambda x+\frac{\mu}{x}}$ in unendliche Reihen. Von Professor Simon Spitzer.

Die schöne und lehrreiche Abhandlung Schlömilch's „über die Bessel'sche Function", welche im zweiten Bande dieser Zeitschrift veröffentlicht ist, veranlasste mich zur Entwickelung von

$$1)\qquad y = e^{\lambda x+\frac{\mu}{x}}$$

in unendliche Reihen. Es ist

$$e^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + \frac{\lambda^3 x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{\frac{\mu}{x}} = 1 + \frac{\mu}{x} + \frac{\mu^2}{2!\,x^2} + \frac{\mu^3}{3!\,x^3} + \ldots$$

somit das Produkt dieser beiden Reihen

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \\ + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \ldots \end{aligned}\right.$$

woselbst

$$3)\qquad A_0 = 1 + \lambda\mu + \frac{\lambda^2\mu^2}{2!\,2!} + \frac{\lambda^3\mu^3}{3!\,3!} + \ldots$$

$$4)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1 &= \lambda \left[1 + \frac{\lambda\mu}{1!\,2!} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2!\,3!} + \frac{\lambda^3\mu^3}{3!\,4!} + \ldots\right] \\ A_2 &= \lambda^2 \left[\frac{1}{2!} + \frac{\lambda\mu}{1!\,3!} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2!\,4!} + \frac{\lambda^3\mu^3}{3!\,5!} + \ldots\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_r &= \lambda^r \left[\frac{1}{r!} + \frac{\lambda\mu}{1!\,(r+1)!} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2!\,(r+2)!} + \frac{\lambda^3\mu^3}{3!\,(r+3)!} + \ldots\right] \end{aligned}\right.$$

$$5)\qquad \left\{\begin{aligned} B_1 &= \mu \left[1 + \frac{\lambda\mu}{1!\,2!} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2!\,3!} + \frac{\lambda^3\mu^3}{3!\,4!} + \ldots\right] \\ B_2 &= \mu^2 \left[\frac{1}{2!} + \frac{\lambda\mu}{1!\,3!} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2!\,4!} + \frac{\lambda^3\mu^3}{3!\,5!} + \ldots\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_r &= \mu^r \left[\frac{1}{r!} + \frac{\lambda\mu}{1!\,(r+1)!} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2!\,(r+2)!} + \frac{\lambda^3\mu^3}{3!\,(r+3)!} + \ldots\right] \end{aligned}\right.$$

ist. Setzt man nun der Kürze halber

$$\lambda\mu = u,$$

ferner

$$1 + u + \frac{u^2}{2!\,2!} + \frac{u^3}{3!\,3!} + \ldots = \varphi(u),$$

so hat man

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned} A_0 &= \varphi(u), \\ A_1 &= \lambda\varphi'(u), & B_1 &= \mu\varphi'(u), \\ A_2 &= \lambda^2\varphi''(u), & B_2 &= \mu^2\varphi''(u), \\ A_3 &= \lambda^3\varphi'''(u), & B_3 &= \mu^3\varphi'''(u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

und somit erhält man folgende merkwürdige Reihe:

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} e^{\lambda x+\frac{\mu}{x}} = \varphi(u) + \left(\lambda x + \frac{\mu}{x}\right)\varphi'(u) + \left(\lambda^2 x^2 + \frac{\mu^2}{x^2}\right)\varphi''(u) \\ + \left(\lambda^3 x^3 + \frac{\mu^3}{x^3}\right)\varphi'''(u) + \ldots \end{aligned}\right.$$

woselbst das hier vorkommende $\varphi(u)$ sich durch folgendes bestimmte Integral wiedergeben lässt:

$$8)\quad \varphi(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\sqrt{u}\cos\alpha}\, d\alpha.$$

Da $y = e^{\lambda x + \frac{\mu}{x}}$ das Integral der Differentialgleichung

$$9)\quad x^2 y' + (\mu - \lambda x^2)\, y = 0$$

ist, so hat man hierdurch für diese Gleichung 9) das Integral in einer solchen Reihenform, die zugleich auf- und absteigend nach Potenzen von x entwickelt und für alle Werthe von x convergent ist.

Der specielle Fall $\mu = -\lambda$ führt zu Vereinfachungen, verdeckt aber die, durch die Gleichungen 6) ersichtlichen, sehr einfachen Relationen. Man erhält nämlich

$$A_r = \frac{\lambda^r}{r!} - \frac{\lambda^{r+2}}{1!(r+1)!} + \frac{\lambda^{r+4}}{2!(r+2)!} - \frac{\lambda^{r+6}}{3!(r+3)!} + \ldots$$

oder, wenn man dieselbe Bezeichnungsweise wählt, wie Schlömilch in seiner vorher citirten Abhandlung

$$J_n = \frac{\lambda^n}{n!} - \frac{\lambda^{n+2}}{1!(n+1)!} + \frac{\lambda^{n+4}}{2!(n+2)!} - \frac{\lambda^{n+6}}{3!(n+3)!} + \ldots$$

und man überzeugt sich durch unmittelbare Substitution, dass

$$y = J_n$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$10)\quad \lambda^2 \frac{d^2 y}{d\lambda^2} + \lambda \frac{dy}{d\lambda} + (4\lambda^2 - n^2)\, y = 0$$

ist. Um diese Gleichung durch geschlossene Formen zu integriren, setze ich, nach dem Vorgange des Herrn Petzval (siehe dessen Werk über Integration linearer Differentialgleichungen 1. Band Seite 105)

$$11)\quad y = \lambda^k z$$

woselbst k eine, einstweilen unbestimmte Constante und z eine neue Variable bezeichnet, und erhalte dann:

$$\frac{dy}{d\lambda} = \lambda^k \frac{dz}{d\lambda} + k\lambda^{k-1} z,$$

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} = \lambda^k \frac{d^2 z}{d\lambda^2} + 2k\lambda^{k-1}\frac{dz}{d\lambda} + k(k-1)\lambda^{k-2} z$$

und diese Werthe in die Gleichung 10) eingeführt, geben:

$$12)\quad \lambda^2 \frac{d^2 z}{d\lambda^2} + (2k+1)\lambda \frac{dz}{d\lambda} + (4\lambda^2 + k^2 - n^2)\, z = 0.$$

Für $k=n$ vereinfacht sich diese Gleichung, denn alsdann hat man

$$13)\qquad \lambda\frac{d^2 z}{dt^2}+(2n+1)\frac{dz}{d\lambda}+4\lambda z=0,$$

welche offenbar einfacher ist, da die Coefficienten derselben, bezüglich der unabhängigen Variabeln, blos von der ersten Potenz sind.

Die von Laplace herrührende Methode führt hier unmittelbar zu folgendem Integrale

$$14)\qquad z=C\int_{-2\sqrt{-1}}^{+2\sqrt{-1}} e^{u\lambda}(u^2+4)^{n-\frac{1}{2}}\,du$$

und wenn man hierin

$$u=2\alpha\sqrt{-1}$$

setzt und alsdann die Gleichung $y=\lambda^n z$ berücksichtigt, so hat man

$$y=A\lambda^n\int_{-1}^{+1}(1-\alpha^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{2\alpha\lambda\sqrt{-1}}\,d\alpha$$

oder in vereinfachter Form

$$15)\qquad y=A\lambda^n\int_{-1}^{+1}(1-\alpha^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos 2\alpha\lambda\,.\,d\alpha$$

was bis auf die willkührliche Constante vollkommen mit der von Herrn Dr. Schlömilch gegebenen Formel übereinstimmt.

Dies ist jedoch nur ein particuläres Integral der Gleichung 10). Um das allgemeine zu erhalten, könnte man die Methode der Variation der willkührlichen Constanten benützen oder, wie mir besser dünkt, jene Methode, welche ich Seite 47 des 3. Bandes dieser Zeitschrift mittheilte. Man erhält nämlich für das zweite particuläre Integrale

$$y=B\lambda^n e^{2\lambda\sqrt{-1}}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left\{e^{-4\lambda\sqrt{-1}}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[e^{2\lambda\sqrt{-1}}\int_{-2\sqrt{-1}}^{+2\sqrt{-1}}\frac{e^{u\lambda}\log[\lambda(u^2+4)]}{\sqrt{u^2+4}}\,du\right]\right\}$$

und da n eine ganze positive Zahl ist, so lassen sich die angezeigten $n$fachen Differentiationen mit Leichtigkeit durchführen und alsdann auf die früher gezeigte Weise die imaginären Grenzen beseitigen. Das zweite von mir herrührende particuläre Integrale der Gleichung 10) enthält, wie man sieht, einen logarithmischen Bestandtheil, lässt sich somit, weder auf- noch absteigend nach Potenzen von λ entwickeln.

Durch Vergleichung der beiden für J_n gefundenen Werthe kommt man noch zu folgender beachtenswerthen Formel:

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial u^n}\int_0^\pi e^{2\sqrt{u}\cos\alpha}\,d\alpha\right\}_{u=-\lambda^2}=\frac{2^{n+1}}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^1(1-\alpha^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos 2\alpha\lambda\,.\,d\alpha.$$

XXV. Mathematische Miscellen. Von Dr. G. Zehfuss, Lehrer der höheren Mathematik an der höheren Gewerbschule in Darmstadt.

1) Um die Reihe zu summiren:

$$y_x = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x-1}\right)-\frac{x-1}{x}+\left(\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{2x+1}\right)$$
$$-\frac{x-1}{2x}+\left(\frac{1}{2x+1}\cdots\right) \text{ in inf,}$$

welche als besondere Fälle

$$y_2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{ etc.}$$

$$y_3 = 1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\text{ etc.}$$

$$y_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\text{ etc. etc.}$$

einschliesst, zählen wir derselben den Ausdruck

$$\frac{x}{x}+\frac{x}{2x}+\cdots+\frac{x}{nx}$$

zu und wieder ab, und erhalten, wenn n eine unendlich wachsende Zahl vorstellt;

$$y_x = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{nx}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{nx}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+x-1}\right)$$

Der Grenzwerth des letzteren Ausdruckes ist aber nach dem Fundamentalsätze der Lehre von den bestimmten Integralen gleich

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = lx,$$

welcher Ausdruck demnach das gesuchte Resultat giebt, so dass insbesondere

$$y_2 = l2, \quad y_3 = l3, \quad y_4 = l4, \text{ etc.}$$

2) Erhebt man die für $n = 2, 4, 6$, etc. genau summirbare Reihe

$$S_n = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{ etc.}$$

auf das Quadrat, so entsteht

$$S_n^2 = 1+\frac{2}{2^n}+\frac{2}{3^n}+\frac{3}{4^n}+\frac{2}{5^n}+\frac{4}{6^n}+\frac{2}{7^n}+\frac{4}{8^n}+\text{ etc.}$$

Diese Reihe hat eine ähnliche Eigenschaft, wie die berühmte Lambert'sche, indem der Zähler des das p^{te} Glied bildenden Bruches allemal die Anzahl der Theiler bestimmt, welche die Grundzahl der im Nenner

stehenden Potenz zulässt. Die den Zählern 2 zugehörigen Grundzahlen sind mithin alle Primzahlen.*)

3) Es sei $f(y, y', y'', \text{etc.}) = 0$ eine Differentialgleichung, welche die unabhängige Variable x nicht enthalte. Sind nun, um z. B. bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung stehen zu bleiben, c und c_2 die willkürlichen Constanten, welche die Auflösung $y = y_{x, c_1, c_2}$ mit sich bringt, so muss die Differentialgleichung eine identische Gleichung zwischen den drei unabhängigen Veränderlichen x, c_1, c_2 ausdrücken, sobald man in dieselbe

$$y = y_{x, c_1, c_2}; \qquad y' = \frac{d}{dx} \cdot y_{x, c_1, c_2}; \qquad y'' = \frac{d^2}{dx^2} \cdot y_{x, c_1, c_2};$$

substituirt. Wird diese in Bezug auf jene drei Variabeln nacheinander differentiirt, so entstehen drei lineäre Gleichungen zwischen den Unbekannten $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dy'}$, $\frac{df}{dy''}$, ohne dass ein constantes Glied vorhanden wäre. Die Determinante dieser Gleichungen ist mithin identisch Null, d. h. man hat

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & \frac{dy'}{dx} & \frac{dy''}{dx} \\ \frac{dy}{dc_1} & \frac{dy'}{dc_1} & \frac{dy''}{dc_1} \\ \frac{dy}{dc_2} & \frac{dy'}{dc_2} & \frac{dy''}{dc_2} \end{vmatrix} = 0$$

Man sieht leicht, wie dieser Satz auf Differentialgleichungen höherer Ordnungen ausgedehnt werden kann.

4) Aufgabe und Lehrsätze.

α) Durch n gegebene Puncte n Geraden dergestalt zu legen, dass sie ein, einem gegebenen ähnliches n Eck einschliessen. Für das Quadrat z. B. giebt es vier verschiedene Auflösungen.

---

*) Die glückliche Bemerkung des Herrn Verfassers kann vielleicht auch einiges Licht auf die Lambert'sche Reihe werfen; setzt man nämlich

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \dots$$
$$= x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 2x^5 + \dots$$

so wird

$$\int_0^1 f(x) \left[l\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{n-1} \frac{dx}{x} = \Gamma(n) \left[\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} + \dots \right]$$

d. i.

$$\int_0^1 f(x) \left[l\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{n-1} \frac{dx}{x} = \Gamma(n) S_n^2.$$

Obschon man also die Summe der Lambert'schen Reihe nicht kennt, so kann man doch den Werth eines Integrales angeben, worin dieselbe vorkommt, und diess ist immerhin eine bemerkenswerthe Thatsache. Schl.

β) Wenn der absolute Werth von q kleiner als 1 ist, so ist die Einheit gleich der Summe einer jeden der beiden Reihen

$$\frac{1}{1-q}-\frac{q}{(1-q)(1-q^3)}+\frac{q^4}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)}-\frac{q^9}{(1-q)(1-q^3)..(1-q^7)}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-q}-\frac{q}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}-\frac{q^6}{(1-q)\ .\ .\ .\ (1-q^4)}+\ldots$$

Die Exponenten in den Zahlen sind die Quadrat- und Dreieckszahlen.

γ) Man hat

$$\sin x=\frac{2x}{\pi}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\pi}\left[1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right]+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2x}{\pi}\left[1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{2x}{3\pi}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2x}{\pi}\left[1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{2x}{3\pi}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{2x}{5\pi}\right)^2\right]+\text{etc.}$$

$$\sin x=\frac{x}{\frac{\pi}{2}}-\frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}\frac{\left[x^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{2.3}+\frac{2^2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}\frac{\left[x^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left[x^2-\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2\right]}{2.3.4.5}$$
$$-\frac{2^3x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}\cdot\frac{\left[x^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left[x^2-\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2\right]\left[x^2-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right]}{2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$$

Für $x=0$ ergiebt sich mit Zuziehung des Grenzwerthes von $\frac{\sin x}{x}$, dass

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{1.3}+\frac{1.2}{3.5}+\frac{1.2.3}{3.5.7}+\frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}+\text{etc},$$

was sich für $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ auch aus der bekannten Formel folgern lässt;

$$arc\,(\sin=t)=\sqrt{1-t^2}\,.\left(t+\frac{2}{3}t^3+\frac{2.4}{3.5}t^5+\ldots\right)$$

XXVI. Ueber die Zeichen der einzelnen Glieder einer Determinante. Von Dr. G. ZEHFUSS, Lehrer der höheren Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt.

$$P=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \end{vmatrix}$$

Wir wollen beispielsweise die Permutation $a_3\, b_0\, c_1\, d_2\, e_5\, f_4$ betrachten. Dieselbe stammt aus der mit a_3 multiplicirten Unterdeterminante, wo $P=a_0\frac{\partial P}{\partial a_0}+a_1\frac{\partial P}{\partial a_1}+a_2\frac{\partial P}{\partial a_2}+a_3\frac{\partial P}{\partial a_3}+$ etc., welche dadurch erhalten wird, dass man die in a_3 sich schneidende Reihe und Colonne durchstreicht, und die

übrig bleibenden Elemente zu einer Determinante vereinigt, welche mit $(-1)^3$ multiplicirt, gleich $\frac{\partial P}{\partial a_3}$ wird. In der genannten Permutation bringt also a_3 den Factor $(-1)^3$ mit sich.

Das folgende Element b_0 der Permutation ist wieder in der übriggebliebenen Unter-Determinante enthalten, und zwar bildet alsdann die Colonne, welche b_0 enthält, die erste. Die durch Wegstreichen der in b_0 zusammentreffenden Reihe und Colonne übrigbleibende Unter-Determinante, muss nun wieder mit b_0, und, weil b_0 in der ersten Colonne steht, mit $(-1)^0$ multiplicirt werden. Es sind nun bereits die beiden obersten Horizontalreihen, sowie die die Indices 3 und 0 enthaltenden Colonnen durchstrichen, und die beiden Factoren $a_3\, b_0$ ergeben dabei $(-1)^3.(-1)^0$ zur Bestimmung des Zeichens ihres Productes.

Es wird nun das dritte Element c_1 der neuen Unter-Determinante nicht mehr, wie in der ursprünglichen, in der zweiten, sondern in der ersten Colonne stehen, was darin seinen Grund hat, dass dem Index 1 von c_1 in der gegebenen Permutation der niedere 0 von b_0 vorausgeht, während das Vorausgehen des höheren Index 3 von a_3 ein Durchstreichen einer nachfolgenden Colonne hervorrief, was ohne Einfluss auf das Zeichen der letzten Unter-Determinante ist. Es würde also, wenn nicht schon einzelne Colonnen vor d_2 fehlten, das Zeichen des Factors d_2 durch $(-1)^2$ bestimmt sein; da aber dem Index von d_2 die beiden niederen Indices von b_0 und c_1 vorangehen, so ist der Rang von d_2 in der letzten Unter-Determinante schon um 2 erniedrigt, also stimmt das Zeichen von d_2 mit demjenigen von $(-1)^{2-2}$ überein.

Ebenso bringt e_5 dem Factor $(-1)^{5-4}$ mit sich, weil schon 4 demselben vorangehende Colonnen durchstrichen sind, etc. — Die ganze Permutation erhält mithin das Zeichen von

$$(-1)^{3+0+1+2+5+4-(0+0+1+2+4+4)} = (-1)^{\frac{5.6}{2}-m}$$

wo m die Anzahl der Derangements ist, sofern wir es ein Derangement nennen, wenn ein höheres Element auf ein niederes folgt.

Wenn also m' die Anzahl der Derangements einer anderen Permutation bezeichnet, so ist das relative Zeichen beider mit dem von $(-1)^{m-m'}$ übeinstimmend, also ist ein Glied einer Determinante positiv oder negativ, jenachdem die Anzahl seiner Derangements von derjenigen des Anfangsgliedes $a_0\, b_1\, c_2\, d_3 \ldots$ um eine gerade oder um eine ungerade Anzahl differirt.

Diese Regel scheint ihren Zweck viel leichter als die sonst gebräuchliche zu erreichen. Ich habe sie von keinem Schriftsteller, als von Cramer in seiner *Analyse des lignes courbes* angeführt gefunden, wo sie als Definition gebraucht wird, was dem jetzigen Gebrauche nicht mehr entsprechend sein möchte.

XXVII. Notiz über die harmonische Reihe. Es scheint unbemerkt geblieben zu sein, dass sich auf völlig elementarem Wege zwei Grenzen finden lassen, zwischen denen die Summe der harmonischen Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n}$$

enthalten ist. Aus dem Satze

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\alpha_n < n\sqrt[n]{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n}$$

folgt nämlich

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n} > n\sqrt[n]{n+1}$$

und durch beiderseitige Subtraction von $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\ldots+\frac{n}{n}=n,$

$$\text{a)}\qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right).$$

Man hat ferner nach eben jenem Satze

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1} > n\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}},$$

zieht man beide Seiten der Ungleichung von der Gleichung $\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}=n$ ab und fügt noch $\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$ hinzu, so kommt

$$\text{b)}\qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)$$

Die Grenzen, in welche die harmonische Reihe mittelst der Ungleichungen a) und b) eingeschlossen ist, differiren ungefähr um eine Einheit von einander.

Setzt man $\frac{l(n+1)}{n}=\delta$, so kann man den vorigen Ergebnissen auch folgende Gestalt verleihen

$$\frac{e^\delta-1}{\delta}\,l\,(n+1) < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} < \frac{n}{n+1}+\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}\,l(n+1);$$

nun ist aber aus der allgemeinen Definition der Exponentialgrösse, nämlich

$$e^z = lim\left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^\omega\right],\ \text{für } \omega=\infty$$

leicht zu ersehen dass

$$e^\delta > 1+\delta \text{ oder } 1 < \frac{e^\delta-1}{\delta},$$

$$e^{-\delta} > 1-\delta \text{ oder } \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} < 1$$

sein muss, man hat daher einfacher

$$l\,(n+1) < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < 1+l\,(n+1),$$

wie man auch mittelst der Reihen für $l(1+x)$ und $l(1-x)$ finden kann. Das angegebene Verfahren würde sich auf die allgemeinere Reihe

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}+\ldots+\frac{1}{\alpha+n}$$

mit gleicher Leichtigkeit anwenden lassen.

SCHLÖMILCH.

XXVIII. Ueber die Chasles-Transon'sche Methode zur Construction der Normalen und Krümmungsradien an gewissen ebenen Curven. In der „Geschichte der Geometrie" von Chasles (Uebersetzung von Sohncke S. 649) findet sich folgendes Theorem:

> „Wenn eine ebene Figur eine unendlich kleine Bewegung in ihrer Ebene erfährt, so giebt es immer einen Punkt, der während dieser Bewegung fest bleibt. Die Geraden, welche durch die verschiedenen Punkte der Figur senkrecht auf die Trajectorie, die sie während der unendlich kleinen Bewegung beschreiben, gezogen werden, gehen alle durch diesen festen Punkt".

Diesem Satze, welcher, wie Chasles gezeigt, ein einfaches Mittel bietet, um die Normalen an vielen Curven zu construiren, hat später Abel Transon (vergl. L'Institut 1844 Nr. 574) einen zweiten zugefügt, durch welchen man im Stande ist, für dieselben Curven auch die Krümmungsradien mit Leichtigkeit geometrisch zu bestimmen. Beide Theoreme sind mehrfach erläutert und bewiesen worden (vergl. u. A. eine Abhandlung von Stegmann in Grunert's Archiv Band 7, Nr. 7). Der nachstehende Beweis dürfte sich durch Einfachheit empfehlen.

Die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene ist bestimmt durch die Bewegung von zweien ihrer Punkte. Indem wir ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legen, bezeichnen wir durch die Gleichungen $\beta=\varphi(\alpha)$ und $\nu=\varphi_1(\mu)$ die Bahnen dieser beiden Punkte, wo α und μ die Abscissen, β und ν die zugehörigen Ordinaten sind. Wir verstehen unter „entsprechenden Punkten" jener Bahncurven solche, welche gleichzeitig von den die Bahnen durchlaufenden Punkten der ebenen Figur eingenommen werden. Um sie zu bestimmen, hat man, wenn die constante Entfernung der beiden sich bewegenden Punkte gleich k gegeben ist, die Gleichung

$$g)\qquad (\beta-\nu)^2+(\alpha-\mu)^2=k^2.$$

Sei $\eta=\varphi_2(\xi)$ die Bahn irgend eines dritten Punktes der Figur, dessen Entfernungen von den vorher betrachteten beiden Punkten derselben beständig k_1 resp. k_2 sind, so hat man gleichzeitig mit der vorstehenden Gleichung noch die folgenden

$$g_1)\qquad \begin{cases}(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2=k_1^2,\\ (\eta-\nu)^2+(\xi-\mu)^2=k_2^2,\end{cases}$$

durch welche zu zwei entsprechenden Punkten der Curven $\beta = \varphi(\alpha)$ und $\nu = \varphi_1(\mu)$ ein dritter entsprechender Punkt auf der Curve $\eta = \varphi_2(\xi)$ bestimmt wird.

Der Kürze wegen bezeichnen wir die drei Gleichungen unter $g)$ und $g_1)$ der Reihe nach durch die folgenden

$$1)\qquad \begin{cases} \Phi\ (\beta,\ \alpha,\ \nu,\ \mu) = 0, \\ \Phi_1(\eta,\ \xi,\ \beta,\ \alpha) = 0, \\ \Phi_2(\eta,\ \xi,\ \nu,\ \mu) = 0, \end{cases}$$

denen also die Coordinaten von drei entsprechenden Punkten (α', β'), (μ', ν'), (ξ', η') der drei betrachteten Bahnen gleichzeitig genügen. Ausserdem seien $b = f(a)$, $n = f_1(m)$, $y = f_2(x)$ die auf das frühere Coordinatensystem zu beziehenden Gleichungen dreier Curven, auf denen wieder drei fest mit einander verbundene Punkte sich bewegen, und zwar ebenfalls in den wechselseitigen Abständen k, k_1, k_2, so dass durch die Gleichungen

$$2)\qquad \begin{cases} \Phi\ (b,\ a,\ n,\ m) = 0, \\ \Phi_1(y,\ x,\ b,\ a) = 0, \\ \Phi_2(y,\ x,\ n,\ m) = 0, \end{cases}$$

drei entsprechende Punkte (a', b'), (m', n'), (x', y') bestimmt werden. Nimmt man jetzt an, dass die Curven $\beta = \varphi(\alpha)$ und $\nu = \varphi_1(\mu)$ beziehungsweise mit den Curven $b = f(a)$ und $n = f_1(m)$ einen Punkt gemeinschaftlich haben, so zwar, dass zwei entsprechende Punkte (α', β') und (μ', ν') der ersteren Curven beziehungsweise mit zwei entsprechenden Punkten (a', b') und (m', n') der letzteren zusammenfallen: so ersieht man aus den Gleichungen 1) und 2), dass auch die Curven $\eta = \varphi_2(\xi)$ und $y = f_2(x)$ einen Punkt gemeinschaftlich haben. Es werden nämlich die Punkte (ξ', η') und (x', y') zusammenfallen, von denen der erstere den Punkten (α', β') und (μ', ν'), der letztere den Punkten (a', b') und (m', n') entspricht.

Durch einmaliges Differenziren der Gleichungen 1) erhält man

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right] d\alpha + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right] d\mu = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}\right] d\xi + \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta}\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}\right] d\alpha = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}\right] d\xi + \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \nu}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu}\right] d\mu = 0,$$

und indem man aus diesen Gleichungen die Differentiale $d\alpha$, $d\mu$, $d\xi$ eliminirt, geht eine Gleichung hervor, die wir durch

$$3)\qquad \psi\left(\frac{d\eta}{d\xi},\ \frac{d\beta}{d\alpha},\ \frac{d\nu}{d\mu},\ \eta,\ \beta,\ \nu,\ \xi,\ \alpha,\ \mu\right) = 0$$

bezeichnen. Die auf dieselbe Weise aus den Gleichungen 2) hergeleitete entsprechende Gleichung wird

$$4)\qquad \psi\left(\frac{dy}{dx},\ \frac{db}{da},\ \frac{dn}{dm},\ y,\ b,\ n,\ x,\ a,\ m\right) = 0.$$

Durch die Vergleichung von 1), 2), 3) und 4) gelangt man zu dem nachstehenden Satze:

Haben die Curven $\beta = \varphi(\alpha)$ und $b = f(a)$ die Punkte (α', β') und (a', b'), die Curven $\nu = \varphi_1(\mu)$ und $n = f_1(m)$ die Punkte (μ', ν') und (m', n') gemeinschaftlich, und findet in den gemeinschaftlichen Punkten zugleich ein Contact der ersten Ordnung statt, so gilt ein Gleiches auch für die Curven $\eta = \varphi_2(\xi)$ und $y = f_2(x)$ hinsichtlich der Punkte (ξ', η') und (x', y') — vorausgesetzt, dass (α', β'), (μ', ν'), (ξ', η') einerseits und (a', b'), (m', n'), (x', y') andererseits einander entsprechende Punkte sind: dass also ihre Coordinaten den Gleichungen 1) und 2) gleichzeitig genügen.

Man sieht, dass man durch mehrmaliges Differenziren der Gleichungen 1) und 2) die Richtigkeit dieses Satzes für einen Contact von beliebiger Ordnung darthun kann.

Dies vorausgeschickt, bezeichnen wir jetzt die Curven $\beta = \varphi(\alpha)$, $\nu = \varphi_1(\mu)$, $\eta = \varphi_2(\xi)$ kurzweg durch C, C_1, C_2; drei entsprechende Punkte derselben durch P, P_1, P_2. Wir ziehen in P und P_1 die Normalen, deren Durchschnittspunkt D sei. Beschreibt man aus D mit den Radien DP und DP_1 die Kreise K und K_1 und lässt dieselben von den Punkten P und P_1 so durchlaufen, dass ihre Entfernung PP_1 constant $= k$ bleibt, so beschreibt der in den Entfernungen k_1 und k_2 mit P und P_1 festverbundene Punkt P_2 einen mit K und K_1 concentrischen Kreis K_2. Nun haben aber K und K_1 resp. mit C und C_1 in den ihnen gemeinschaftlichen Punkten P und P_1 einen Contact der ersten Ordnung, also auch nach dem oben bewiesenen Satze K_2 mit C_2 in P_2; d. h. die Normale für C_2 in P_2 geht durch D, womit der von Chasles aufgestellte Satz bewiesen ist.

Abel Transon hat bemerkt, dass die unendlich kleinen Bögen, welche gleichzeitig von P, P_1 und P_2 auf C, C_1 und C_2 beschrieben werden, durch drei gleichgekrümmte unendlich kleine Bögen von Cycloiden, die zu einem und demselben Wälzungskreis gehören, ersetzt werden können, und hieraus in dem Falle, dass die Krümmungsradien für C und C_1 in den Punkten P und P_1 bekannt sind, die Construction des Krümmungsradius für C_2 im Punkte P_2 hergeleitet.

Beschreibt man nämlich in der Ebene der Curven C und C_1 aus irgend einem Punkte M als Mittelpunkt mit dem Radius MD einen Kreis Θ, zieht an denselben eine Tangente T durch D und lässt nun Θ auf der festen Geraden T hinrollen, so beschreiben die drei fest mit Θ verbundenen Punkte P, P_1 und P_2 gleichzeitig drei Cycloiden L, L_1 und L_2. Die Gleichungen irgend einer dieser drei Curven, z. B. der vom Punkte P beschriebenen Cycloide L, sind

$$5) \quad \begin{cases} t = r\varphi - e \sin\varphi, \\ u = r - e \cos\varphi, \end{cases}$$

indem t und u die rechtwinkligen Coordinaten sind für ein System, dessen Abscissenachse mit T zusammenfällt und dessen Anfangspunkt da ist, wo der durch φ bezeichnete Wälzungswinkel des rollenden Kreises Θ verschwindet. Unter e ist die constante Länge MP zu verstehen, unter r der Radius des Kreises Θ. Zieht man in irgend einem Augenblicke der Bewegung durch P eine Normale an L und nennt ω ihren Winkel mit der Abscissenachse, so hat man

$$tang\,\omega = -\frac{dt}{du} = -\frac{u}{e\sin\varphi}$$

d. h. die durch den beweglichen Punkt P an L gezogene Normale geht immer durch denjenigen Punkt Q, welchen der rollende Kreis Θ gerade mit der festen Linie T gemein hat. Es ist dies derjenige Punkt, in welchem sich in jedem Augenblick der Bewegung des Systems die durch die Punkte P, P_1, P_2 gegen ihre Bahnen L, L_1, L_2 gezogenen Normalen schneiden.

Aus dieser Bemerkung, welche bereits Descartes gemacht, folgt, dass, welches auch die ursprüngliche Lage des Mittelpunktes M von Θ sei, die drei Cycloiden L, L_1 und L_2 mit den Curven C, C_1 und C_2 in den gemeinschaftlichen Punkten P, P_1, P_2 einen Contact der ersten Ordnung haben. Man kann indess die ursprüngliche Lage des Punktes M so bestimmen, dass die von den Punkten P, P_1, P_2 beschriebenen Cycloiden L, L_1, L_2 mit den Curven C, C_1, C_2 in ihren gemeinschaftlichen Punkten einen Contact der zweiten Ordnung haben.

Kehren wir zurück zu den Gleichungen 5). Man hat zur Bestimmung des Krümmungsradius R der Cycloide L in irgend einem Punkte P die Gleichung

$$R = \pm\frac{(dt^2 + du^2)^{\frac{3}{2}}}{dt\,d^2u - du\,d^2t}$$

$$= \pm\frac{(u^2 + e^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{e(e - r\cos\varphi)}$$

oder, wenn man durch l das Stück der Normale in P bezeichnet, das von P und von dem augenblicklichen Berührungspunkt Q des Kreises Θ mit T abgegrenzt wird,

$$R = \pm\frac{l^3}{e(e - r\cos\varphi)}.$$

Nun ist aber

$$l^2 = e^2 + r^2 - 2er\cos\varphi$$

$$l^2 - ry = e^2 - er\cos\varphi$$

oder, wenn ϑ der Winkel ist, welchen die Ordinate und Normale in P mit einander bilden,

$$l^2 - rl\cos\vartheta = e^2 - er\cos\varphi$$

$$\frac{l}{e} = \frac{e - r\cos\varphi}{l - r\cos\vartheta},$$

demnach $R = \pm\frac{l^2}{l - r\cos\vartheta}$. In diesem Ausdrucke bedeutet $r\cos\vartheta$ die

Projection des Radius MQ auf PQ. Sei daher F der Fusspunkt der aus M auf PQ gefällten Senkrechten, so stellt $(l - r\cos\vartheta)$ die Länge PF dar. Man muss beachten, dass der Punkt F jederzeit in die Concavität der Cycloide L fällt. Je nachdem nämlich $(l - r\cos\vartheta)$ positiv oder negativ ist, werden die Punkte F und Q auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von P liegen. Man findet aber

$$u\frac{d^2u}{dt^2} = -l(l - r\cos\vartheta).$$

Ist daher $(l - r\cos\vartheta) > 0$, so liegt Q als Punkt der Abscissenachse in der Concavität von L, gleichzeitig also auch F. Ist andererseits $(l - r\cos\vartheta) < 0$, so kehrt L im Punkte P der Abscissenachse ihre Convexität zu; Q fällt also nicht in die Concavität, wohl aber F, weil in diesem Falle F und Q zu entgegengesetzten Seiten von P liegen.

Seien nun ϱ und ϱ_1 die bekannten Krümmungsradien von C und C_1 in den Punkten P und P_1, so hat man, damit L und L_1 mit C und C_1 in den ihnen gemeinschaftlichen Punkten P und P_1 einen Contact der zweiten Ordnung haben, die ursprüngliche Lage des Mittelpunktes M von Θ nur so zu bestimmen, dass den Gleichungen

$$\varrho = \pm\frac{PD^2}{PD - DM\cos MDP},$$

$$\varrho_1 = \pm\frac{P_1D^2}{P_1D - DM\cos MDP_1},$$

gleichzeitig genügt werde. Man bestimme daher zu ϱ und PD die dritte Proportionale $\pm(PD - DM\cos MDP)$ und trage dieselbe von P aus so auf der Normale PD ab, dass sie in die Concavität der Curve C fällt. Der Endpunkt des abgetragenen Stückes sei E. Ebenso bestimme man aus ϱ_1 und P_1D auf der durch P_1 gezogenen Normale P_1D der Curve C_1 einen dem Punkte E entsprechenden Punkt E_1. Der Durchschnittspunkt der in E und E_1 auf den Normalen PD und P_1D errichteten Senkrechten ist der Mittelpunkt M des Kreises Θ, welcher, auf seiner durch D gezogenen festen Tangente hinrollend, die mit ihm fest verbundenen Punkte P, P_1, P_2 drei Cycloiden beschreiben macht, von denen die ersten beiden mit C und C_1 in den gemeinschaftlichen Punkten P und P_1 einen Contact der zweiten Ordnung haben werden. Nach dem zu Anfang bewiesenen Satze wird dann aber auch die dritte Cycloide mit C_2 in dem gemeinschaftlichen Punkte P_2 einen Contact der zweiten Ordnung haben. Bezeichnet man daher den gesuchten Krümmungsradius von C_2 in P_2 durch ϱ_2 und nennt E_2 den Fusspunkt der aus M auf P_2D gefällten Senkrechten ME_2, so hat man die Gleichung $\varrho_2 = \frac{P_2D^2}{P_2E_2}$ zu construiren, woraus sich die Länge von ϱ_2 ergiebt. Dieselbe ist auf P_2D von P_2 aus in der Richtung P_2E_2 abzutragen.

Berlin. C. Wiegers.

XXIX. Wenn man vor einem Punkt auf einer Fläche unendlich viele geodätische (kürzeste) Linien zieht, so schneiden sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig. Aus diesem bekannten Theorem von Gauss lassen sich nachstehende Sätze entwickeln:

1. Auf einer Fläche sind zwei feste Punkte A und B gegeben, man bestimme die Curve (μ), welche durch die Gleichung $MA - MB = \mu$ charakterisirt ist, wo MA und MB die von einem beliebigen Punkt M auf (μ) nach A und B gezogenen geodätischen Linien sind, und $\mu = const.$, so halbirt diese Curve den von MA und MB in M gebildeten Winkel. Man nehme, um dies zu beweisen, auf (μ) einen zweiten Punkt M' an, unendlich nahe bei M, ziehe $M'A$ und $M'B$, bestimme auf MA und MB die Punkte C und D, so dass $CA = M'A$ und $DB = M'B$, ziehe $M'C$ und $M'D$, so sind die rechtwinkligen Dreiecke $MM'C$ und $MM'D$ congruent, woraus sich die Gleichheit der Winkel $M'MC$ und $M'MD$ ergiebt.

2. Wenn umgekehrt die Curve (μ) die Eigenschaft hat, dass sie den Winkel halbirt, welchen die von einem beliebigen Punkte M nach zwei festen Punkten A und B gezogenen geodätischen Linien bilden, so ist $MA - MB = const.$ Man bestimme die Punkte C und D so, dass $M'CM$ und $M'DM$ rechte Winkel sind, so ist $CA = M'A$ und $DB = M'B$; die unendlich kleinen Dreiecke $MM'C$ und $MM'D$ haben in diesem Fall eine Seite und zwei Winkel gleich, also $MA - MB = M'A - M'B$.

3. Die Curve (ν), welche durch die Gleichung $MA + MB = \nu$ charakterisirt ist, halbirt den von MA und MB in M gebildeten Nebenwinkel. Der Beweis ist ähnlich wie in 1.

4. Der Satz 3 lässt sich ebenso umkehren, wie 1.

5. Wenn man den Constanten μ und ν nach und nach verschiedene Werthe giebt, so erhält man zwei orthogonale Systeme von Curven, deren Natur von der Fläche abhängt, auf welcher sie liegen. Ist z. B. diese Fläche eine Ebene, so entstehen zwei Systeme von konfokalen centrischen Kegelschnitten, deren Brennpunkte A und B sind. Bei der Kugel sind es sphärische Kegelschnitte, die auf konfokalen, mit der Kugel concentrischen Kegeln liegen. Wenn A und B zwei Punkte sphärischer Krümmung (Nabelpunkte) eines Ellipsoids sind, so sind die Curven (μ) und (ν) Krümmungslinien, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht. Jede geodätische Linie auf dem Ellipsoid ist durch die Gleichung $p \,.\, d = const.$ bezeichnet; p ist das vom Mittelpunkte auf die Berührungsebene gefällte Perpendikel, d derjenige Durchmesser des Ellipsoids, der mit der Tangente der geodätischen Linie parallel läuft. Bei allen, durch A oder B gehenden geodätischen Linien hat d als Durchmesser eines Kreisschnittes denselben Werth, schneiden sich also in M zwei solche Linien MA und MB, so ist $p \,.\, d = p \,.\, d'$, $d = d'$, mithin wird der von d und d' gebildete Winkel durch die Achsen der Ellipse halbirt, von welcher d und d' Durchmesser sind. Diese Achsen sind aber den Tangenten der durch M gehenden Krümmungslinien parallel,

also halbiren diese den Winkel oder Nebenwinkel der geodätischen Linien MA und MB. Durch Anwendung von 2. ergiebt sich sofort der Satz: Bewegt sich der Punkt M auf einer Krümmungslinie, welche die Nabelpunkte A und B trennt, so ist $MA - MB = const.$ und durch Anwendung von 4: Bewegt sich M auf einer Krümmungslinie, welche A und B einschliesst, so ist $MA + MB = const.$ Beide Sätze hat zuerst Mich. Roberts im Journal von Liouville (tome XI, Seite 1) aufgestellt, und durch Einführung elliptischer Coordinaten bewiesen.

Dem oben angeführten Theorem hat Gauss noch als Corollar angeschlossen: Wenn von allen Punkten einer Curve auf einer Fläche nach derselben Seite hin gleich lange geodätische Linien gezogen werden unter rechten Winkeln, so schneiden diese die Verbindungslinie ihrer Endpunkte auch rechtwinklig. Hierin liegt ein Mittel, die obigen Sätze zu verallgemeinern.

6) Die kürzeste geodätische Linie MA, die sich von einem Punkte M nach einer Curve auf einer Fläche ziehen lässt, schneidet diese Curve rechtwinkelig, denn sonst könnte man auf MA den Punkt C unendlich nahe an A annehmen und CD senkrecht auf die Curve ziehen; nun wäre CD kleiner als CA, mithin $MC + CD$ kleiner als MA. Die Converse fällt sogleich in die Augen.

7) Die Verallgemeinerung der Sätze 1 bis 4 werde nun bloss angedeutet. An die Stelle des einen der festen Punkte A und B, z. B. von B, setze man eine Curve (B) und ziehe von den Punkten $M\ M' \ldots$ von (μ) kürzeste geodätische Linie nach (B). Man kann auch noch den Punkt A durch eine Curve (A) und die Radien MA, $M'A$ durch kürzeste geodätische Linien ersetzen, die sich von $M\ M' \ldots$ nach (A) ziehen lassen.

Böklen.

XXX. Ueber die Transformation durch reciproke Radienvectoren. Die Eigenschaft der transformirten Fläche, wonach ihre Krümmungslinien mit den entsprechenden der gegebenen Fläche auf Kegeln liegen, deren Spitze der Punkt O ist, von welchem aus die Radien gezogen werden, lässt sich noch auf folgende Art beweisen: Man ziehe in einem Punkt M einer Fläche F eine Tangente und lege durch sie Ebenen, so liegen die Krümmungskreise der Schnittkurven für den Punkt M auf einer Kugel, nach dem Satze von Meunier. Jeder Tangente von M entspricht also eine Krümmungskugel, und man erhält so ein System von Kugeln, deren gemeinschaftlicher Berührungspunkt M ist, und deren äusserste den Tangenten T und T' der Krümmungslinien von M entsprechen. Wenn f die transformirte Fläche ist, und m der korrespondirende Punkt von M, so ziehe man in M und m zwei Tangenten, die mit O in einer Linie liegen, die ihnen entsprechenden

Krümmungskugeln von F und f, haben O zum Aehnlichkeitspunkt, woraus sich sofort ergiebt, dass die Systeme der Krümmungskugeln in M und m in derselben Verwandtschaft stehen, wie F und f, also entsprechen sich in beiden Systemen die äussersten, mithin liegen die Tangenten t und t' der Krümmungslinien in m mit T und T' beziehlich in einer Ebene, woraus sich der angeführte Satz sogleich ergiebt.

ABC seien drei beliebige Punkte einer Curve, und abc die entsprechenden der transformirten; die zwei Kreise, welche durch ABC und abc bestimmt sind, liegen auf einer Kugel und auf zwei Kegeln; O ist die Spitze des Einen dieser Kegel. Bei unendlicher Annäherung der Punkte ABC und also auch von abc erhält man Krümmungskreise. Ebenso wird der Satz bewiesen: Die Schmiegkugeln in zwei entsprechenden Punkten der gegebenen Curve und ihrer transformirten haben O zum Aehnlichkeitspunkt. Man bestimme auf einer gegen zwei Achsen symmetrischen ebenen Curve vier Punkte, die ein Rechteck bilden; die Krümmungskreise der entsprechenden Punkte der transformirten liegen auf einer Kugel (wie auch die übrigen Krümmungskreise) und auf 12 verschiedenen Kugeln, wovon drei Paar eine gemeinschaftliche Spitze haben; von diesen Spitzen liegen 3mal 6 und 6mal 3 in gerader Linie. In 4 der 6 gemeinschaftlichen Berührungskreise liegen ebenso, wie die genannten, 4 Krümmungskreise.

Wenn die Fläche F eine Symmetralebene hat, so verwandelt sich diese in eine Kugel, welche die transformirte f rechtwinklig schneidet, und in zwei Theile trennt, die in der gleichen Verwandtschaft zu einander stehen; man darf, um diess zu beweisen, nur durch zwei Paare symmetrisch liegender Punkte von F einen Kreis legen; der entsprechende Kreis auf f schneidet die genannte Kugel rechtwinklig.

Es sei N ein Punkt sphärischer Krümmung auf F, so entspricht allen Tangenten von N eine einzige Krümmungskugel; dasselbe findet also auch statt in dem correspondirenden Punkt n von f; hieraus folgt: der Kegel dessen Spitze O und Basis eine Linie sphärischer Krümmungen einer Fläche ist, schneidet die transformirte Fläche auch in einer solchen Linie. Die Krümmungskugeln von je zwei durch M gezogenen Tangenten, welche mit der Tangente T einer Krümmungslinie gleiche Winkel bilden, fallen zusammen. Die Mittelpunkte dreier Krümmungskugeln, deren Tangenten mit T Winkel bilden gleich $45^0 - \alpha$, 45^0, $45^0 + \alpha$, bilden mit M vier harmonische Punkte. Man überzeugt sich hiervon leicht durch Vergleichung des obengenannten Satzes von Meunier mit demjenigen von Euler über die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte. Wenn sich auf einer Fläche ein Kreis ziehen lässt, so liegen die Mittelpunkte der den Tangenten des Kreises entsprechenden Krümmungskugeln auf einer Geraden. Kann man durch M zwei Kreise ziehen, welche auf einer Kugel liegen, so ist diese die gemeinschaftliche Krümmungskugel der Tangenten beider Kreise, also halbirt T den Winkel der Kreistangenten in M.

Die genannten Sätze finden Anwendung auf die Transformirten der der Flächen zweiten Grades und der Drehungsflächen; die ersten haben ein — vier Systeme von Kreisschnitten. Wenn z. B. F ein einmantliges Hyperboloid ist, so hat f vier Systeme von Kreisschnitten; die beiden ersten entsprechen den Kreisschnitten von F, die zwei andern den gradlinigen Erzeugenden; jeder Kreis eines der letzten Systeme schneidet alle übrigen des andern. Ist F ein einmantliges Drehungshyperboloid, und O dessen Mittelpunkt, so ist f eine Drehungsfläche, welche entsteht durch Drehung eines Kreises um eine gegen seine Ebene geneigte und durch einen Punkt der Peripherie gehende Achse; die Meridiankurve dieser Drehungsfläche sind Lemniskaten. Hinsichtlich der übrigen Schnitte, welche sich auf den Transformirten der Flächen zweiten Grades durch Ebenen erzeugen lassen, die durch O gelegt werden, siehe die Abhandlung von Drobisch (III. Jahrgang, I. Heft.). Es mag noch erwähnt werden, dass die Sätze von Pascal und Brianchon über die Sechsecke und Sechsseiten der Kegelschnitte sich sehr leicht auf ihre Transformirten ausdehnen lassen.

C ist der Ursprung einer logarithmischen Spirale, welche die durch C gehenden Geraden unter dem constanten Winkel α schneidet. Man ziehe durch den Punkt M der Spirale eine Tangente und eine Normale und durch C drei Linien, wovon die erste die Tangente rechtwinklig in P, die andere die Normale rechtwinklig in Q schneidet; die dritte ist senkrecht auf CM und schneidet die Normale in S. P, Q und S liegen auf log. Spiralen, welche mit ihren Radien ebenfalls den Winkel α bilden. Nun werde O so angenommen, dass OC senkrecht auf der Ebene steht und transformirt. Diese verwandelt sich sofort in eine Kugel, die vier Spiralen in Loxodromen, welche die Meridiane unter dem constanten Winkel α durchschneiden.

Die Tangenten einer gewundenen Curve bilden ein System von Krümmungslinien auf der betreffenden entwickelbaren Fläche. Hieraus lässt sich durch Transformation der Satz ableiten: Wenn man durch einen Punkt O Kreise zieht, welche eine gewundene Curve berühren, so bliden diese Kreise ein System von Krümmungslinien auf der durch sie erzeugten Fläche.

O. Böklen.

XII.

Ueber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik,

oder

das Princip des kleinsten Zwanges, sowie über ein anderes neues Grundgesetz der Mechanik mit einer Excursion über verschiedene, die mechanischen Principien betreffenden Gegenstände.

Vom Baurath Dr. HERMANN SCHEFFLER.

(Schluss aus vor. Heft.)

13.

Verfahren, welches gestattet, die **wirkliche** Verrückung eines Systems in unendlich kleiner Zeit stets als eine **virtuelle** zu betrachten.

In Fig. 9 (Taf. II d. vor. Heftes) ist α der Ort, in welchen sich der materielle Punkt a vermöge der ihm am Ende der Zeit t innewohnenden Geschwindigkeit während des Zeitelementes dt stellen würde, wenn gar keine Kräfte auf ihn einwirkten; b ist der Ort, in welchen er sich bei jener Geschwindigkeit unter der Wirkung der auf ihn angebrachten Kraft p stellen würde, wenn er vollkommen frei wäre; c ist der Ort, in welchen der sich bei jener Geschwindigkeit unter der Wirkung der auf ihn angebrachten Kraft p und dem Zwange des Systems, also unter der Herrschaft der wirksamen Kraft r wirklich stellt. Ausserdem bezeichnet γ irgend einen Ort, in welchen sich der fragliche Punkt von c aus in Folge einer virtuellen Verrückung des Systems möglicherweise stellen kann.

Unter einer virtuellen Verrückung versteht man eine solche, welche der am Ende der Zeit t augenblicklich stattfindenden Verbindung des Systems entspricht. Die Verbindung selbst wird aber nach der Darstellungsweise aller Lehrbücher der Mechanik während der Verrückung stets als völlig unveränderlich angesehen. Wenn diese Verbindung also auch von der Zeit t abhängig sein sollte, so muss sie doch bei der virtuellen Verrückung während des Zeitelementes dt als constant betrachtet werden; die unendlich kleinen Wege $c\gamma$ sind also nur die räumlichen Variationen des

Punktes c, welche nach der momentan stattfindenden Verbindung des Systems zulässig sind, ohne dass man dabei diejenigen Variationen mit berücksichtigt, welche sich durch die Abhängigkeit ergeben, in welcher jene Verbindung etwa von der Zeit t steht. Bei der Bestimmung jener Variationen hat man also, wenn das für die Verbindung des Systems gegebene Abhängigkeitsgesetz eine Function der Zeit t sein sollte, diese Zeit als Constante zu behandeln. Eben dasselbe gilt selbstverständlich auch von den auf das System wirkenden Kräften, insofern dieselben Functionen der Zeit t oder des Ortes der von ihnen afficirten Massen, welcher Ort selbst eine Function von t ist, sein sollten: auch diese Kräfte sind während der Verrückung im Zeitelemente dt als unveränderlich zu betrachten.

Demgemäss kann im Allgemeinen die wirkliche Bewegung des Systems während der Zeit dt, also die Verrückung ca, nicht als eine virtuelle angesehen werden. Dies kann vielmehr nur dann geschehen, wenn die Verbindung des Systems von der Zeit t oder den darauf wirkenden Kräften unabhängig ist. Ein Ausfluss dieser Betrachtnng ist unter Anderem der bekannte Satz, dass das Princip der lebendigen Kräfte nur für solche Systeme Giltigkeit habe, deren Verbindung nicht von der Zeit abhängt.

Offenbar kommt man zu dieser Einschränkung der virtuellen Verrückungen durch die stillschweigend gemachte Voraussetzung, dass unter den auf die materiellen Theile des Systems wirkenden Kräften p nur solche, welche äusserlich darauf angebracht sind, betrachtet, alle inneren aber, welche aus der Reaction der Bänder des Systems hervorgehen, welche sich also in Folge der durch die äusserlich angebrachten Kräfte veranlassten Bewegung gewissermaassen von selbst erzeugen, ausser Acht gelassen werden sollen. Bei den Systemen mit völlig unabhängiger oder unabänderlicher Verbindung, wie z. B. bei den aus starren unelastischen Stoffen bestehenden, mit festen Verbindungen, drehbaren Achsen, ganz frei isolirten Theilen und dergl. versehenen Mechanismen, bei welchen jede principielle Aenderung der Verbindung schlechterdings unmöglich ist, werden die inneren Reactionen in und zwischen den Bändern des Systems immer von der Art sein, dass bei jeder möglichen Verrückung des Systems die Arbeitsgrösse aller dieser Reactionen gleich Null ist. Bei solchen Systemen würden also die Momente der inneren Kräfte immer verschwinden, wie man das System auch verrücken möchte: jede denkbare Bewegung kann hier also auch als eine virtuelle angesehen werden. Bei den Systemen mit veränderlicher Verbindung dagegen, wie z. B. bei den Mechanismen mit elastischen Bändern, mit pressbaren oder gasförmigen Körpern und dergl., bei welchen gewisse Aenderungen der Verbindung möglich sind, sobald die dazu erforderlichen Kräfte aufgewandt werden, wird die Arbeitsgrösse der inneren Reactionen in den Bändern des Systems nur bei solchen Verrückungen, welche

keine Aenderung der Verbindung erheischen, gleich Null, bei anderen Verrückungen aber, wo besondere Kräfte entwickelt werden, von einem endlichen positiven oder negativen Werthe sein. Demnach beschränkt man hier das Feld der virtuellen Bewegungen auf solche, welche von der Zeit t unabhängig sind oder bei welchen sich die Bänder des Systems nicht verändern, weil nur bei solchen Verrückungen die Momente der inneren Kräfte verschwinden.

Ein derartiges Verschwinden der inneren Kräfte aus der Gleichung, welche den Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bildet, hat aber gar keinen sonderlichen Nutzen; denn es wäre ein grosser Irrthum zu glauben, dass man hierdurch die Betrachtung der inneren Kräfte (wie Elasticitätskräfte) ganz und gar vermeiden könnte. Dies ist keineswegs der Fall; denn wenn auch bei der beliebten Beschränkung der virtuellen Verrückungen die eben erwähnte Gleichung frei ist von den inneren Kräften, so macht sich deren abgesonderte Betrachtung zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des Systems immer geltend.

Es leuchtet ein, dass wenn man die bei einer gewissen Verrückung auftretenden inneren Kräfte (namentlich die Elasticitätskräfte) gehörig mit in Rechnung stellt, der Begriff der Verbindung eines Systems immer dergestalt erweitert werden kann, dass die unter der Wirkung von Kräften überhaupt möglichen Verrückungen auch als zulässige oder virtuelle erscheinen, wodurch der obige Unterschied zwischen den beiden Arten von Verbindungen ganz verschwindet und ausserdem die willkürliche Einschränkung der virtuellen Verrückungen für die letztere Art von Systemen wegfällt. Zu diesen Vortheilen der principiellen Verallgemeinerung kommt noch die Annehmlichkeit, dass man bei der Aufstellung der Grundgleichungen für die Bewegung eines Systems sofort mit Nothwendigkeit zu allen erforderlichen Gleichungen geführt wird und dieselben nicht durch Nebenbetrachtungen über die inneren Kräfte zu ergänzen hat.

Unter der letzteren Voraussetzung kann dann auch in allen Fällen (was sich bei einem Systeme mit unabhängiger Verbindung von selbst versteht) die wirkliche Verrückung ac als eine virtuelle angesehen werden: man hat dann nur im Falle eines Systems mit veränderlicher Verbindung die bei der wirklichen Bewegung zu überwindenden inneren Spannungen mit zu berücksichtigen.

Unter denselben Bedingungen, unter welchen die wirkliche Verrückung ac als eine virtuelle erscheint, kann aber auch die Verrückung $a\alpha$ als eine solche angesehen werden. Denn diese letztere entsteht durch die Annahme, dass der materielle Punkt a während des Zeitelementes dt mit der am Ende der Zeit t erlangten Geschwindigkeit gleichförmig fortschreite. Derselbe Zustand wird aber auch dadurch erreicht, dass man der unter Berücksichtigung aller inneren Spannungen entstehenden wirksamen Kraft r jedes materiellen Punktes a den vollkommen zulässigen Werth Null bei-

legt, wodurch sofort die wirkliche Verrückung ac in die eben gedachte $a\alpha$ übergeht.

14.

Beispiel zur Erläuterung des eben beschriebenen Verfahrens.

Ein Beispiel wird das Vorstehende besser erläutern.

Zu Fig. 13 (Taf. II des vor. Heftes) sei der materielle Punkt a von der Masse m und dem Gewichte n mit der Scheibe a' von der Masse m' und dem Gewichte n' durch den gewichtslosen Faden aa' von der Länge c verbunden. Das System falle in der Luft vertical abwärts, wobei sich auf die Scheibe a' ein Luftwiderstand äussere, welcher durch kv'^2 ausgedrückt sein soll, wenn v' die Geschwindigkeit der Scheibe am Ende der Zeit t bezeichnet, während v die des Punktes a ist.

1) Wäre der Faden aa' nicht dehnbar, so hätte man ein ganz unveränderliches System vor sich, welches in der gewöhnlichen einfachen Weise zu behandeln ist. Bezeichnet man nämlich die verticale Abscisse der Punkte a und a' von irgend einem festen Punkte mit x und x', die Beschleunigung der Schwere mit g, und beachtet, dass $v' = v$ ist, so hat man

$$\text{verlorene Kraft der Masse } a \quad mg - m\frac{dv}{dt},$$

$$\text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, } \quad a' \quad m'g - kv^2 - m'\frac{dv}{dt},$$

da diese Kräfte nach dem d'Alembert'schen Principe im Gleichgewichte sein müssen, so ergiebt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\left(mg - m\frac{dv}{dt}\right)\delta x + \left(m'g - kv^2 - m'\frac{dv}{dt}\right)\delta x' = 0.$$

Nach der festen Verbindung des Systems ist $x = x' + c$ also $\delta x = \delta x'$, und es leuchtet ein, dass man hier auch die wirkliche Bewegung im Zeitelemente dt als eine virtuelle oder $\delta x = v\,dt$, $\delta x' = v'\,dt = v\,dt$ annehmen könnte. Immer liefert die vorstehende Gleichung die Beziehung

$$(m + m')\,g - kv^2 - (m + m')\frac{dv}{dt} = 0$$

woraus nun das Abhängigkeitsgesetz zwischen v und t durch Integration gefunden werden kann.

2) Setzt man jetzt aber den Faden aa' als dehnbar voraus, so hat man es mit einem Systeme zu thun, dessen Verbindung von der Zeit t abhängt. In der Gleichung $x = x' + c$, welche diese Verbindung darstellt, wird nämlich c eine Function der Zeit t.

Nach den gewöhnlichen Vorschriften der Lehrbücher der Mechanik würde man jetzt folgendermaassen verfahren. Nach der Beziehung $x = x' + c$ ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dc}{dt} \quad \text{d. i.} \quad v = v' + \frac{dc}{dt},$$

ferner

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{d^2c}{dt^2}.$$

Hiernach hat man für die verlorenen Kräfte

$$\text{bei } a \quad Q = mg - m\frac{dv}{dt} = mg - m\frac{dv'}{dt} - m\frac{d^2c}{dt^2},$$

$$\text{bei } a' \quad Q' = m'g - kv'^2 - m'\frac{dv'}{dt}.$$

Drückt man das Gleichgewicht dieser Kräfte durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aus, so erhält man

$$Q\delta x = Q'\delta x' = 0.$$

Um in dieser Gleichung δx und $\delta x'$ zu bestimmen, muss nach dem gewöhnlichen Verfahren die Verbindung des Systems während des Zeitelementes dt als unveränderlich, die Grösse c also in der Beziehung $x = x' + c$ als constant angesehen, folglich $\delta x = \delta x'$ gesetzt werden, woraus

$$Q + Q' = 0$$

folgt. Es leuchtet ein, dass unter solchen Umständen in der Gleichung $Q\delta x + Q'\delta x' = 0$ unmöglich für die virtuellen Verrückungen δx, $\delta x'$ die wirklichen während des Zeitelementes dt gesetzt werden dürfen, denn dies würde $\delta x = v\,dt = v'dt + dc$ und $\delta x' = v'\,dt$, also

$$Q(v'\,dt + dc) + Q'v'dt = 0$$

oder

$$Q + Q' = -\frac{1}{v'}\frac{dc}{dt}$$

ergeben, welche Gleichung der vorher gefundenen richtigen Beziehung $Q + Q' = 0$ widerspricht.

Ferner erkennt man, dass dieses gewöhnlich angewandte Verfahren nicht blos die so natürlich scheinende Annahme der wirklichen Bewegung für eine virtuelle ausschliesst, sondern auch die Lösung der Aufgabe in der Hinsicht unvollständig lässt, weil dasselbe zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen v, v', c ausser der Beziehung $x = x' + c$ nur die einzige Gleichung $Q + Q' = 0$ liefert, welche bei gehöriger Substitution die Form

$$(m + m')g - kv'^2 - (m + m')\frac{dv'}{dt} - m\frac{d^2c}{dt^2} = 0$$

annimmt. Um die fehlende dritte Gleichung zu erhalten, muss man jetzt immer noch auf die Betrachtung der inneren Kräfte des Systems (der Spannungen in und zwischen den Bändern) eingehen.

Definirt man zu diesem Ende das Elasticitätsgesetz des Fadens aa' dahin, dass die Spannung desselben in der ursprünglichen Länge a gleich Null sei und bei seiner Ausdehnung proportional mit der Längenzunahme wachse; so erfordert die Länge c am Ende der Zeit t eine Spannkraft, welche man $= (c - a)\,q$ setzen kann, worin q eine Constante ist. Da diese Spannkraft offenbar der verlorenen Kraft Q der Masse a gleich sein muss, so erhält man die dritte Gleichung

$$(c-a)\,q = Q = mg - m\frac{dv'}{dt} - m\frac{d^2c}{dt^2},$$

wofür man auch, da $Q = -Q'$ ist, die Gleichung

$$(c-a)\,q = -Q' = -m'g + kv'^2 + m'\frac{dv'}{dt}$$

nehmen kann.

3) Verallgemeinert man nun aber gleich von vorn herein den Begriff von der Verbindung des Systems in weitester Weise, so dass jede nach der physischen Beschaffenheit des Systems mögliche Verrückung als eine virtuelle betrachtet werden kann, indem man die dabei etwa auftretenden inneren Kräfte gehörig berücksichtigt, so fällt nicht blos jene unnatürliche Beschränkung der virtuellen Verrückung hinweg, sondern es stellen sich ganz von selbst alle zur Bestimmung der Bewegungserscheinungen erforderlichen Gleichungen ein.

Denn bezeichnet man die Spannung $(c-a)q$ des Fadens bei der Länge c mit E, so hat man zunächst die Gleichung

$$E = Q$$

und das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert die Gleichung

$$Q\,\delta x + Q'\,\delta x' - E\,\delta c = 0,$$

indem man beachtet, dass bei der Verlängerung des Fadens um die Länge δc die zu überwindenden Elasticitätskräfte das virtuelle Moment $-E\delta c$ haben. Setzt man jetzt $\delta x = \delta x' + \delta c$, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung, da $E = Q$ ist, in

$$Q + Q' = 0,$$

wie auch vorhin vermöge des gewöhnlichen Verfahrens gefunden ist.

15.

Grösse des in einem Systeme ausgeübten Zwanges.

Kehren wir wieder zu Fig. 9 zurück, worin b der Ort ist, in welchen sich der materielle Punkt a nach Maassgabe der am Ende der Zeit t erlangten Geschwindigkeit in der Zeit dt begeben würde, wenn er ganz frei wäre, c der Ort, in welchen er sich wirklich begiebt, α der Ort, in welchen er sich begeben würde, wenn er mit der erlangten gleichförmigen Geschwindigkeit fortschritte, ohne dass also Kräfte auf ihn einwirkten, endlich γ irgend ein Ort, in welchen die Verbindung des Systems gestatten würde, jenen Punkt zu verrücken.

Unter Nr. 13) haben wir gesehen, dass $c\alpha$ immer als eine virtuelle Bewegung angesehen werden kann. Ist die Verbindung des Systems unveränderlich, so braucht hierbei auf innere Kräfte gar keine Rücksicht genommen zu werden; ist die Verbindung aber veränderlich, so hat man nur nöthig, die bei jener Bewegung etwa auftretenden inneren Kräfte, welche sich in oder zwischen den Bändern des Systems äussern, gehörig mit zu berücksichtigen, d. h. wie die äusserlich angebrachten Kräfte p zu behandeln.

Unter dieser Voraussetzung kann man also in Gleichung 5) α an die Stelle von γ setzen. Dies giebt für den gesammten im Sytseme ausgeübten Zwang $\Sigma m(bc)^2$ den Ausdruck

57) $$\Sigma m(bc)^2 = \Sigma m(\alpha b)^2 - \Sigma m(\alpha c)^2.$$

Da $m(bc)$, $m(\alpha b)$, $m(\alpha c)$ resp. proportional ist den Kräften q, p, r, so kann man für diese Gleichung auch schreiben

58) $$\Sigma q(bc) = \Sigma p(\alpha b) - \Sigma r(\alpha c).$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Wirkung der ablenkenden Kräfte q oder der Zwang, welchen das System in Folge der Verbindung seiner materiellen Theile in jedem Zeitmomente erleidet, stets gleich ist der Differenz der Wirkung, welche die darauf angebrachten Kräfte p hervorbringen würden, wenn alle Punkte ganz frei wären, und der Wirkung, welche die wirksamen Kräfte r wirklich hervorbringen.

Da nach dem Gauss'schen Principe dieser Zwang ein Minimum ist, so folgt ferner, dass die Differenz zwischen der Wirkung der angebrachten und der wirksamen Kräfte stets so klein ist, als es bei der gegebenen Verbindung des Systems nur möglich ist.

Gleichwohl ist, wie Gleichung 57) lehrt, diese Differenz immer positiv, es findet also in Folge der Verbindung der einzelnen materiellen Punkte zu einem Systeme stets ein Verlust an der inneren Wirkung der angebrachten Kräfte statt, welche dieselben bei vollkommener Freiheit aller materiellen Punkte hervorzubringen fähig wären; dieser Verlust ist aber immer so klein als nur möglich.

Hierbei wird nochmals hervorgehoben, dass, wenn die Verbindung des Systems veränderlich ist, unter den angebrachten Kräften p auch die bei der Bewegung von a nach α in den Bändern des Systems etwa auftretenden inneren Kräfte, namentlich die Elasticitätskräfte, mit einbegriffen sind. Wollte man diese Elasticitätskräfte ausser Acht lassen, so würde man allerdings finden, dass der Verlust, welchen die übrigen äusserlich angebrachten Kräfte erleiden, in manchem Stadium der Bewegung, wo die Ueberwindung der inneren Kräfte einen gewissen Kraftaufwand erfordert, noch vergrössert, in manchem anderen Stadium dagegen, wo die inneren Kräfte eine Unterstützung der Bewegung bilden, verkleinert wird und in dem letzteren Falle sogar zu einem Gewinne von mechanischer Arbeit werden kann.

Ausserdem ist auch hier darauf aufmerksam zu machen, dass, wenn in dem Systeme Kräfte vorkommen, welche nicht auf materielle, sondern auf massenlose Punkte wirken, die Gleichung 22) anzuwenden ist, welche hier, wo $c\alpha$ als eine virtuelle Verrückung angesehen wird, die Form

$$Sq(cb)^2 + dt^2 \mathfrak{S}p(c\alpha)\cos\varphi = Sp(\alpha b) - Sr(\alpha c)$$

oder

$$Sq(cb)^2 = dt^2 \mathfrak{S}p(\alpha c)\cos\varphi + Sp(\alpha b) - Sr(\alpha c)$$

annimmt, worin φ den Winkel $\alpha cb = raq$ zwischen den directen Richtungen der Kräfte r und q darstellt.

16.

Rückblick auf die obigen Grundgesetze der Mechanik und Vergleichung derselben mit dem Principe der kleinsten Wirkung von Maupertuis.

Wir haben im Vorstehenden gesehen, dass man sowohl das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in Verbindung mit dem d'Alembert'schen Principe, wie auch das Gauss'sche Princip zum Ausgangspunkte für die Mechanik nehmen kann. Da jede dieser beiden Grundlagen die nöthige Allgemeinheit besitzt, um die ganze Lehre von der Bewegung und vom Gleichgewichte mathematisch daraus zu entwickeln, so lässt sich schon von vorn herein erkennen, wie auch Gauss in der oben erwähnten Abhandlung bemerkt, dass, wenn man das eine ausgesprochen hat, es kein wesentlich neues Grundprincip für die Mechanik weiter geben kann, welches der Materie nach nicht in dem ersteren enthalten und daraus abzuleiten wäre. In der That haben wir gesehen, wie jene beiden Grundprincipien auf einander zurückzuführen sind.

Inzwischen erweist sich doch nach Gauss' fernerer Bemerkung wegen dieses Umstandes keineswegs jedes neue Princip als werthlos; es ist vielmehr allezeit interessant und lehrreich, den Naturgesetzen einen neuen vortheilhaften Gesichtspunkt abzugewinnen, sei es, dass man aus demselben diese oder jene einzelne Aufgabe leichter auflösen könne oder dass sich aus ihm eine besondere Angemessenheit offenbare.

In letzterer Beziehung haben wir die obigen beiden Grundprincipien in Vorstehendem mehrfach gegen einander abgewogen und gefunden, dass das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in Verbindung mit dem d'Alembert'schen Principe in den meisten Fällen eine einfachere oder bequemere Anwendung gestattet, dass jedoch in manchen besonderen Fällen das Gauss'sche Princip eine unmittelbarere Verwendung erlaubt, dass das letztere ausserdem eine grössere Einfachheit besitzt, während das erstere gewissermaassen aus zwei Gesetzen combinirt werden muss, dass endlich auch das Gauss'sche Princip nach seinem Inhalte dem Wesen eines selbstverständlichen, eines Beweises nicht bedürftigen Grundsatzes näher tritt, als das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ausser den vorstehenden ist bislang kein Grundgesetz von gleicher Tragweite ausgesprochen worden. Denn das von Maupertuis aufgestellte Princip der kleinsten Wirkung trägt nur den Charakter eines Lehrsatzes, kann aber auf den Titel eines Grundgesetzes durchaus keinen An-

spruch machen. Denn nach dem erst von Lagrange berichtigten Ausdrucke dieses Gesetzes ist die für alle materiellen Punkte des Systems genommene Summe der Integrale der aus der Bewegungsgrösse mv und dem beschriebenen Curvenelemente ds gebildeten Producte zwischen je zwei Epochen der Bewegung, also die Grösse $\int \Sigma mv\, ds$ ein Minimum (besondere Fälle abgerechnet, wo diese Grösse auch ein Maximum sein kann); diese Integralsumme ist also bei der wirklichen Bewegung des Systems kleiner, als wenn die materiellen Punkte, getrieben von denselben Kräften, in Folge anderer Verbindungen unter sich genöthigt würden, dieselben Endpunkte der Bewegung auf anderen Wegen zu erreichen.

Wenn man auch als selbstverständlich zugeben muss, dass die Bewegung eines Systems in der Art, wie sie wirklich erfolgt, auf die leichteste Weise vor sich gehen werde, so ist doch nicht ohne Weiteres klar, dass das Product aus der Bewegungsgrösse und dem Bahnelemente das eigentliche Maass für diejenige Grösse sei, welche unter solchen Umständen zu einem Minimum werden muss. Der Satz ist daher gar sehr eines Beweises bedürftig. Derselbe verliert aber ganz und gar die Eigenschaft eines Grundgesetzes dadurch, dass er nicht völlig allgemein ist, dass vielmehr gewisse Fälle ausgenommen bleiben, in welchen die obige Integralsumme ein Maximum werden kann.

17.

Neues Grundgesetz der Mechanik.

Unter dem in der vorstehenden Nummer vorangestellten Gesichtspunkte wird es nicht ohne Interesse sein, noch ein neues ganz allgemeines Grundgesetz der Mechanik, welches die übrigen vollkommen vertreten kann, kennen zu lernen. Ich erlaube mir, dasselbe folgendermaassen darzustellen.

Durch die Verbindung der materiellen Punkte, auf welche Kräfte wirken, zu einem Systeme wird diesen Kräften zwar ein gewisser Zwang angethan, so dass dieselben verhindert werden, dasjenige Maximum von mechanischer Arbeit zu entwickeln, welches sie bei vollkommener Freiheit aller Punkte zu erzeugen fähig wären, allein es muss als im Wesen der Dinge liegend oder als ein unmittelbarer Ausfluss der Vorstellung von der Beständigkeit der Materie und ihrer Kräfte angesehen werden, dass diejenige Menge von Arbeit, welche die angebrachten Kräfte bei der Bewegung des Systems wirklich verrichten, auch vollständig, d. h. ohne Verlust und ohne Gewinn, zur Erscheinung kommt, da sowohl ein Verlust, wie ein Gewinn an Arbeit eine Ursache haben müsste, welche sich durch nichts Anderes, als durch eine in Erscheinung tretende gleichwerthige Arbeit offenbaren könnte.

Hierin besteht unser neues Grundgesetz. Es scheint, dass dasselbe an

Einfachheit und Evidenz Nichts zu wünschen übrig lasse, dass dasselbe also füglich ohne Beweis, wie ein mechanischer Grundsatz aufgestellt werden könne, wiewohl man dasselbe, wenn man eine Zergliederung und Zurückführung auf die elementaren Sätze der Statik und Mechanik für wünschenswerth hält, auch leicht mit einem specielleren Nachweise versehen kann, wie man sogleich sehen wird.

Was zunächst den mathematischen Ausdruck dieses Gesetzes betrifft, so sei in Fig. 14 (Taf. II d. v. H.) wie früher α der Ort, in welchen sich der materielle Punkt a des Systems in Folge der ihm am Ende der Zeit t innewohnenden Geschwindigkeit im Zeitelemente dt stellen würde, wenn gar keine Kraft auf ihn einwirkte, p die darauf angebrachte Kraft, welche ihn, wenn er ganz frei wäre, in dieser Zeit von α nach b führen würde, r die wirksame Kraft, welche ihn wirklich von α nach c führt, der also die wirkliche Bewegung ac mit Rücksicht auf die ihm bei a schon innewohnende Geschwindigkeit entspricht, endlich m die Masse des materiellen Punktes a.

Bezeichnen wir der Kürze wegen symbolisch mit $\mathfrak{A}\,pa$ die Arbeit, welche eine Kraft p verrichtet, während ihr Angriffspunkt den geraden Weg a durchläuft, also den Ausdruck $pa \cos\alpha$, worin α den Neigungswinkel zwischen der directen Richtung der Kraft p und des Weges a darstellt, so ist die Arbeit, welche bei der Bewegung nach Fig. 14 von der angebrachten Kraft p im Zeitelemente dt bei der Durchlaufung des Weges ac wirklich entwickelt wird, gleich $\mathfrak{A}\,p(ac)$. Die durch die Bewegung des materiellen Punktes zur Erscheinung gebrachte Arbeit der wirksamen Kraft r ist dagegen gleich $\mathfrak{A}\,r(ac)$. Demnach muss nach unserem Grundgesetze die Gleichung

$$59)\qquad \Sigma\mathfrak{A}\,r(ac) = \Sigma\mathfrak{A}\,p(ac)$$

bestehen.

Aus einfachen geometrischen Gründen ist allgemein die Arbeit einer Kraft p beim Durchlaufen eines gebrochenen Weges, dessen Seiten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ sind, gleich der Arbeit derselben Kraft beim Durchlaufen der die Endpunkte jenes gebrochenen Weges verbindenden geraden Linie, d. h. es ist

$$\mathfrak{A}\,pa_1 + \mathfrak{A}\,pa_2 + \mathfrak{A}\,pa_3 + \ldots = \mathfrak{A}\,pa,$$

indem die Summe der Projectionen der einzelnen Strecken $a_1, a_2, a_3 \ldots$ auf die Richtung von p gleich der Projection der Linie a auf dieselbe Richtung ist.

Hieraus folgt, dass die Summe der Arbeiten sowohl der Kraft p, wie auch der Kraft r, beim Durchlaufen des gebrochenen Zuges $a\alpha c$ gleich der Arbeit der betreffenden Kraft beim Durchlaufen der Diagonale ac ist. Demnach kann man statt Gleichung 59) auch schreiben

$$60)\qquad \Sigma\mathfrak{A}\,r(a\alpha) + \Sigma\mathfrak{A}\,r(\alpha c) = \Sigma\mathfrak{A}\,p(a\alpha) + \Sigma\mathfrak{A}\,p(\alpha c).$$

Nun ist $a\alpha$ eine Bewegung, welche die Punkte des Systems nach Maassgabe ihrer Verbindung ohne Einwirkung von Kräften, mit gleichförmiger Geschwindigkeit, zu durchlaufen vermögen. Jede virtuelle

Verrückung des Systems von den Oertern a aus kann offenbar als eine solche Bewegung angesehen werden, d. h. man kann sich denken, dass, wenn die virtuellen Verrückungen in der Zeit dt mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurückgelegt werden, diese Geschwindigkeiten als solche betrachtet werden dürfen, welche die einzelnen Punkte des Systems am Ende der Zeit t möglicherweise besitzen können. Hierbei wird allerdings wie in Nr. 13 vorausgesetzt, dass, wenn die Verbindung des Systems von der Zeit t abhängig oder veränderlich sein sollte, unter den angebrachten Kräften p diejenigen gehörig berücksichtigt seien, durch welche die Veränderlichkeit der Verbindungen bedingt ist.

Ferner leuchtet ein, dass, wie veränderlich die Linien $a\alpha$ oder die Geschwindigkeiten der Punkte am Ende der Zeit t nach Maassgabe der Verbindung des Systems auch sein mögen, die Linien αc doch durchaus nicht von jenen Geschwindigkeiten abhängen, sondern lediglich durch die angebrachten Kräfte p, oder wenn man will, durch die wirksamen Kräfte r bedingt sind, indem αc die nur durch diese Kräfte erzeugte Ablenkung der materiellen Punkte von den am Ende der Zeit t eingeschlagenen Richtungen darstellt. Um die Richtigkeit dieser Behauptung noch deutlicher einzusehen, vergegenwärtige man sich, dass, wie auch das Abhängigkeitsgesetz zwischen den Linien αc und den Kräften des Systems sein mag, dasselbe doch für die Ablenkung αc keine anderen Werthe erzeugen kann, gleichviel ob man diese Ablenkung von dem Punkte α oder von dem Punkte a aus bestimmt, weil, wie veränderlich die Linie $a\alpha$ auch sein möge, dieselbe doch unendlich klein ist, was zur Folge hat, dass die Kräfte p auf das System der Punkte α eine Wirkung äussern werden, welche von der Wirkung auf das System der Punkte a nur unendlich wenig, d. h. beim Uebergange auf den Grenzzustand im Sinne der Differentialrechnung gar nicht verschieden ist.

Zu noch grösserer Evidenz dieses Satzes trägt es auch bei, wenn man sich denkt, bei der Construction der wirklichen Bewegung in den Diagonalen ac werde nicht erst das Stück $a\alpha$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit und dann die Ablenkung αc beschrieben, was den Anschein haben möchte, als ob möglicherweise die spätere Componente αc von der früheren $a\alpha$ abhängig sein könne, sondern es werde nach Fig. 15 (Taf. II des vor. Heftes) erst der in der Richtung der wirksamen Kraft r liegende, also lediglich durch die angebrachten Kräfte p ohne Rücksicht auf jene gleichförmige Geschwindigkeit bedingte Weg $ac_1 = \alpha c$ und darauf der Weg $c_1 c = a\alpha$ mit der beliebig gegebenen gleichförmigen Geschwindigkeit beschrieben.

Um allen Missverständnissen vorzubeugen, bemerken wir noch, dass in gewissem Sinne die angebrachten Kräfte p und somit auch die wirksamen Kräfte r und die Linien ac_1 von den Geschwindigkeiten am Ende der Zeit t, also von den Linien $a\alpha$ abhängig sein können, wie z. B. bei der

Bewegung in widerstehenden Medien, wo der Widerstand des Mediums mit der Richtung und Geschwindigkeit der bewegten Masse variirt: allein dieser Umstand ist für die vorliegende Betrachtung irrelevant, weil wir uns unter den angebrachten Kräften p eben diejenigen denken, welche der wirklichen Bewegung am Ende der Zeit t genau entsprechen. Wären diese Kräfte durch die Geschwindigkeiten am Ende der Zeit t auch in der That bedingt, also Functionen von jener Geschwindigkeit, so nehmen wir doch an, dass dieselben sich nicht ändern, wenn wir für die virtuelle Verrückung $a\alpha$ eine beliebige andere substituiren.

Unter diesen Voraussetzungen erscheinen also die ersten Glieder auf der linken und rechten Seite der Gleichung 60) als innerhalb der für die Verbindung des Systems gegebenen Gesetze willkürlich veränderliche Grössen, während die zweiten Glieder unveränderliche, d. h. durch die Natur des Systems und seiner Kräfte fest bestimmte Grössen sind. Schon aus diesem Grunde, und auch in Erwägung, dass die ersten Glieder durch die zulässige Annahme $a\alpha = 0$ selbst gleich Null werden können, zerfällt die Gleichung 60) in folgende zwei getrennte Gleichungen

$$61) \qquad \Sigma \mathfrak{A} r (a\alpha) = \Sigma \mathfrak{A} p (a\alpha),$$

$$62) \qquad \Sigma \mathfrak{A} r (\alpha c) = \Sigma \mathfrak{A} p (\alpha c).$$

Da $a\alpha$ jede beliebige zulässige virtuelle Verrückung des Punktes a darstellt und offenbar auch $\alpha c = ac_1$ eine solche Verrückung (für $a\alpha = 0$) ist, so ist die Gleichung 62) in der Gleichung 61) enthalten, also überflüssig.

Die Gleichung 61), als der unmittelbare Ausfluss der durch unser Grundgesetz gegebenen Gleichung 59), kann zwar ebenfalls durch diese Gleichung 59) vertreten werden, es schien jedoch nothwendig, die vorstehende Ableitung zu machen und die dabei sich ergebenden Bemerkungen hervorzuheben, um deutlicher zu zeigen, dass in den Ausdrücken für die Arbeiten der Kräfte p und r die Wege der Angriffspunkte dieser Kräfte innerhalb der Grenzen der virtuellen Verrückungen willkürlich bleiben, was bei der Gleichung 59), worin ac noch den wirklichen Weg des Punktes a bezeichnet, nicht eher evident wird, als die Willkürlichkeit dieses Weges durch die Auflösung desselben in die willkürliche Componente $a\alpha$ und in die constante Componente αc nachgewiesen ist, zumal auch nicht ohne Weiteres zu übersehen ist, ob denn überhaupt jede virtuelle Bewegung als eine unter der Herrschaft der Kräfte p erfolgende wirkliche Bewegung ac anzusehen ist, wogegen es keinem Zweifel unterliegt, dass jede virtuelle Bewegung als eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit ohne Einwirkung der Kräfte p erfolgende Bewegung $a\alpha$ betrachtet werden kann.

Bezeichnet man nach dieser Erläuterung irgend eine virtuelle Verrückung des Punktes a, also die Linie $a\alpha$ in Gleichung 61) oder die Linie ac in Gleichung 59) mit δs, so wird unsere Grundgleichung

$$63) \qquad \Sigma \mathfrak{A} r \delta s = \Sigma \mathfrak{A} p \delta s.$$

Man erkennt, dass dieselbe leicht auf die Formel zurückgeführt werden kann, in welcher sich das d'Alembert'sche Princip mit Hilfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten darstellt. Denn bezeichnet man eine mit der Richtung der wirksamen Kraft r parallel gezogene Coordinatenlinie durch ϱ, also die Kraft r mit $m\frac{d^2\varrho}{dt^2}$, ferner den Neigungswinkel von r gegen die virtuelle Verrückung δs des Punktes a mit φ und den Neigungswinkel von p gegen δs mit ψ, so ist die Arbeit der Kraft r bei dieser Verrückung gleich $m\frac{d^2\varrho}{dt^2}\delta s\cos\varphi$ und die Arbeit der Kraft p gleich $p\,\delta s\cos\psi$. Hierdurch wird die Gleichung 63)

$$64)\qquad \Sigma m\frac{d^2\varrho}{dt^2}\delta s\cos\varphi = \Sigma p\,\delta s\cos\psi.$$

Will man alle Grössen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, wie es gewöhnlich geschieht, so zerfällt die Arbeit einer jeden Kraft in die Arbeiten ihrer Componenten und man erhält, wenn X, Y, Z die Componenten von p und δx, δy, δz die Projectionen der Verrückung δs auf die drei Achsen sind (nach einer schon in Nr. 4 angewandten Ableitung)

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

eine Gleichung, welche gewöhnlich in der Form

$$65)\quad \Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0$$

aufgestellt wird, um dem Gleichgewichte der verlorenen Kräfte einen Ausdruck zu geben.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass unser Grundgesetz ebensowohl den Zustand der veränderlichen Bewegung, wie auch den der Ruhe oder überhaupt den des Gleichgewichts mit gleichförmiger Bewegung umfasst, da für das Gleichgewicht nur die wirksamen Kräfte $r = 0$ gesetzt zu werden brauchen, wodurch sich die ganze linke Seite unserer Grundgleichung auf Null reducirt.

Ferner leuchtet ein, dass dieses an sich sehr plausibele Grundgesetz vor dem d'Alembert'schen den Vorzug der grösseren Einfachheit besitzt, indem das letztere erst noch der Zuhilfenahme des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bedarf, um die Grundbedingungen der Bewegung auf eine mathematische Formel zu bringen, und ausserdem den Umweg durch den Begriff der verlorenen Kräfte erfordert, zu welchem Ende auf das gegebene System erst noch gewisse Kräfte angebracht werden müssen, welche in Wirklichkeit nicht existiren und nur dazu dienen, ein fingirtes System mit den sogenannten verlorenen Kräften zu erzeugen.

Ausserdem ist unser Grundgesetz ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar, gleichviel ob darin gewisse Kräfte p auf materielle oder auf massenlose Punkte wirken, indem man für die massenlosen Punkte nur

$m = 0$ zu setzen hat, was bei dem Gauss'schen Gesetze nicht thunlich ist, indem sich darin für massenlose Punkte unendliche Grössen ergeben, welche, wie wir in Nr. 2 gezeigt haben, eine Umgestaltung der Formel nothwendig machen und das Grundgesetz selbst gewissermaassen aufheben.

Will man das neue Gesetz der kürzeren Bezugnahme wegen mit einem besonderen Namen belegen, so möchte sich, da die Bewegung des Systems die Arbeit der darauf angebrachten Kräfte vollständig verwirklicht oder zur Erscheinung bringt, die Bezeichnung des Princips der Verwirklichung der Arbeit eignen.

XIII.

Dynamische Untersuchungen über den Stoss der Körper.

Von Poinsot.

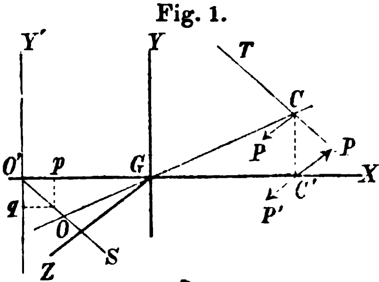
(*Liouville, Journal de mathématiques. Septembre et Octobre* 1857.)

Zweites Kapitel.

§. I.

1) Im vorigen Kapitel wurde vorausgesetzt, dass die Richtung des Impulses, von welchem die gegenwärtige Bewegung des der Betrachtung unterworfenen Körpers herrührt, in die Ebene zweier seiner Hauptachsen, GX und GY, fallen solle, wobei die freiwillige Drehung um eine zur dritten Hauptachse GZ parallele Gerade stattfand. Jetzt soll der Fall untersucht werden, wo der gegebene Impuls P senkrecht gegen die Ebene der Achsen

Fig. 1.



GX und GY gerichtet ist und in einem beliebigen Punkte C dieser Ebene angreift, den wir wieder den Stossmittelpunkt*) nennen wollen. Die freiwillige Achse der durch einen solchen Anstoss bedingten Drehung bildet sich dann in der Ebene dieser beiden Hauptachsen selbst. Wird die Gerade CG bis zu ihrem Durchschnitt mit der freiwilligen Achse OS verlängert, so soll der hierbei entstehende Durchschnittspunkt O der zum Punkte C gehörige freiwillige Mittelpunkt genannt werden. Aus den folgenden Untersuchungen wird sich ergeben, dass diese beiden Punkte

*) In Uebereinstimmung mit der in Nr. 1 des ersten Kapitels aufgestellten allgemeinen Definition. Poinsot gebraucht hier den Ausdruck „*centre d'impulsion*", während der entsprechende Punkt des vorigen Artikels „*centre de percussion*" genannt wurde. Ein Unterschied kann hierin nicht begründet sein, weil dieser mit der allgemeinen Definition in Widerspruch gerathen würde. Anm. d. Uebers.

wieder wechselseitige Punkte sind, d. h. würde der Stossmittelpunkt nach O verlegt, so würde sich der freiwillige Mittelpunkt in C bilden, und die neue freiwillige Achse CT wäre parallel zur ursprünglichen OS. Die hierzu führende Untersuchung stützt sich auf die Lösung der folgenden Aufgabe.

Erste Aufgabe.

Wenn in der Ebene zweier Hauptachsen eines Körpers der Angriffspunkt C eines normal gegen diese Ebene gerichteten Impulses P gegeben ist, die diesem Stossmittelpunkt entsprechende freiwillige Achse OS zu bestimmen.

Auflösung. Es seien x und y die auf die beiden in Frage kommenden Hauptachsen GX und GY bezogenen Coordinaten des Stossmittelpunktes C; ferner sei m die Masse des Körpers, und es werden die den Achsen GX und GY entsprechenden Trägheitsmomente desselben Körpers mit $m\alpha^2$ und $m\beta^2$ bezeichnet.

Verlegt man C parallel zu sich selbst von C nach dem auf der Achse GX gelegenen Punkte C', d. i. nach dem Fusspunkte der Ordinate y des Punktes C, so bildet sich zunächst ein Kräftepaar mit dem Momente Py, welches den Körper mit der Winkelgeschwindigkeit

$$p = \frac{Py}{m\alpha^2}$$

um die Achse GX drehen will; ausserdem hat man noch eine mit P gleiche und parallele Kraft, welche in C', im Abstande x vom Schwerpunkte G angreift. Nun ist früher gezeigt worden*), dass eine solche Kraft eine freiwillige Drehung um eine gewisse Achse $O'Y'$ bedingt, welche parallel zu GY auf der anderen Seite des Schwerpunktes G in einem Abstande

$$x' = -\frac{\beta^2}{x}$$

gelegen ist; die zugehörige Winkelgeschwindigkeit hat die Grösse

$$q = \frac{Px}{m\beta^2}.$$

In Folge des in C angreifenden Stosses erwächst also ein Bestreben des Körpers, gleichzeitig mit der Winkelgeschwindigkeit p um die Achse $O'X$ und mit der Winkelgeschwindigkeit q um die Achse $O'Y'$ zu rotiren. Nach den Regeln über die Zusammensetzung von Rotationen entsteht hieraus eine Drehung um die Diagonale des mit den Seiten $O'p$ und $O'q$ construirten Rechteckes, wenn $O'p$ und $O'q$ die Winkelgeschwindigkeiten p und q darstellen. Die gegebene Kraft P bedingt folglich eine freiwillige Achse, welche die Achse der x im Abstande

$$x' = -\frac{\beta^2}{x}$$

schneidet, und mit dieser Achse einen Winkel einschliesst, dessen Tangente gleich ist

*) Vergl. Nr. 5 des ersten Kapitels. Anm. d. Uebers.

$$-\frac{q}{p} = -\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y}.$$

Werden daher mit t und u die laufenden Coordinaten der freiwilligen Achse OS bezeichnet, so erhält man als Gleichung derselben

$$u = -\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y}\left(t + \frac{\beta^2}{x}\right)$$

oder einfacher

$$\alpha^2 x t + \beta^2 y u + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

d. i. die Lösung der gestellten Aufgabe. Dasselbe Resultat hätte übrigens noch auf anderen, eben so einfachen Wegen erlangt werden können; es ist aber unnöthig, hierbei zu verweilen.

2) Sucht man den Punkt O, in welchem die Verlängerung von CG die freiwillige Achse $O'S$ schneidet, also denjenigen Punkt, welchen wir den freiwilligen Drehungsmittelpunkt genannt haben, so erhält man für seine Coordinaten t und u, weil er mit C und G in gerader Linie liegt, die Proportion

$$t : u = x : y,$$

und hieraus in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung

$$t = -\frac{\alpha^2 \beta^2 x}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2},$$

$$u = -\frac{\alpha^2 \beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}.$$

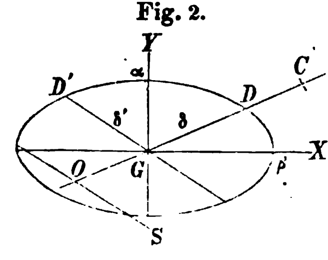
Diese Ausdrücke bestimmen die Coordinaten des freiwilligen Mittelpunktes O durch die Coordinaten des Stossmittelpunktes C, und ebenso umgekehrt; denn man kann darin t mit x und u mit y vertauschen, in gleicher Weise wie dies in den beiden symmetrischen Gleichungen, aus denen diese Ausdrücke hervorgingen, der Fall ist. Hieraus ergiebt sich die Wechselseitigkeit der Punkte C und O.

3) Wird der Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ des Stossmittelpunktes C vom Schwerpunkte G mit H und die Entfernung $\sqrt{t^2 + u^2}$ des freiwilligen Mittelpunktes O von demselben Punkte G mit A bezeichnet, so findet man nach Einsetzung der Werthe von t und u für das Produkt der fraglichen Distanzen die Gleichung

$$AH = \alpha^2 \beta^2 \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}.$$

Da nun im zweiten Theile dieser Gleichung x und y im Zähler und Nenner eine gleiche Anzahl von Dimensionen besitzen, so ist es gestattet, diese Coordinaten mit zwei anderen ihnen proportionalen Linien zu vertauschen. Die hierzu nöthige Bedingung wird erfüllt, wenn man dem x und y die Bedeutung der Coordinaten eines Punktes D unterlegt, in welchem die Gerade CG eine Ellipse mit der Gleichung

Fig. 2.



$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$$

durchschneidet. Wir geben dieser Ellipse den Namen **Centralellipse**. Durch Einsetzung der Coordinaten von D in die vorhergehende Gleichung reducirt sich ihre linke Seite auf $x^2 + y^2$ oder auf die zweite Potenz δ^2 des in die Richtung CG fallenden Halbmessers der Centralellipse. Man erhält daher für die Abstände A und H der beiden wechselseitigen Mittelpunkte O und C vom Schwerpunkte G die bemerkenswerthe Gleichung

$$AH = \delta^2,$$

in welcher δ die Hälfte desjenigen Durchmessers der Centralellipse bedeutet, welcher durch die in Rede stehenden Punkte hindurchgeht. Dieser Durchmesser schliesst mit der Achse der x einen Winkel ein, dessen Tangente gleich ist $\frac{y}{x}$; ferner war $-\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y}$ die Tangente desjenigen Winkels, unter welchem die Richtung von OS gegen dieselbe Achse geneigt ist, und das Produkt dieser beiden Tangenten giebt $-\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Mit Rücksicht auf die Gleichung der Centralellipse und eine bekannte Eigenschaft conjugirter Ellipsen-Durchmesser folgt hieraus, dass die freiwillige Achse OS **parallel läuft mit dem zum Durchmesser 2δ conjugirten Durchmesser** $2\delta'$ der Centralellipse.

4) Von den Grössen α und β, welche die auf die Hauptachsen GX und GY bezogenen **Trägheitsarme** darstellen, bezeichnet, wie sich leicht aus der Gleichungsform unserer Ellipse ergiebt, β noch die Länge derjenigen Halbachse der Ellipse, auf welcher die x gezählt werden, während α die Länge der Halbachse ausdrückt, die als Achse der y dient. Bildet man nun das Produkt

$$\alpha\beta = const. = R^2,$$

so folgt

$$\alpha = \frac{R^2}{\beta}, \quad \beta = \frac{R^2}{\alpha},$$

d. h. die Centralellipse besitzt die Eigenschaft, dass ihre beiden Hauptachsen mit den zugehörigen Trägheitsarmen des Körpers im umgekehrten Verhältnisse stehen. Mittelst der bekannten Formel, welche den auf eine beliebige Achse bezogenen Trägheitsarm darstellt, zeigt sich leicht, dass diese für die beiden Hauptachsen giltige Eigenschaft sich auch auf alle anderen Durchmesser der Centralellipse erstreckt; der einem beliebigen Durchmesser entsprechende Trägheitsarm des Körpers ist nämlich immer der Länge dieses Durchmessers umgekehrt proportional*).

---

*) Es ist dies die bekannte Eigenschaft der Durchmesser des von Poinsot in die analytische Theorie der Trägheitsmomente eingeführten Centralellipsoids, von welchem die Centralellipse eine der drei Hauptebenen darstellt. Vergl. u. A.: Poinsot, Neue Theorie der Drehung der Körper, übersetzt v. Schellbach, S. 27.

Anm. d. Uebers.

5) Nennt man folglich K denjenigen Trägheitsarm, welcher dem zur freiwilligen Achse OS parallelen Durchmesser $2\delta'$ zugehört, so erhält man

$$K = \frac{R^2}{\delta'} = \frac{\alpha\beta}{\delta'}.$$

Nun ist aber in der Ellipse

$$\alpha\beta = \delta\delta' \sin\varphi,$$

wenn φ den von den conjugirten Durchmessern 2δ und $2\delta'$ gebildeten Winkel bezeichnet; folglich ergiebt sich

$$K = \delta \sin\varphi$$

als Länge des Trägheitsarmes für den mit δ conjugirten Durchmesser, d. i. die rechtwinklige Entfernung vom Ende des ersten dieser beiden Durchmesser bis zu seinem conjugirten.

Die oben gefundene Gleichung

$$AH = \delta^2$$

lässt sich hiernach auf die Form

$$A \sin\varphi \,.\, H \sin\varphi = K^2$$

bringen, woraus folgt, dass die beiden wechselseitigen Mittelpunkte C und O sich in Abständen $H \sin\varphi$ und $A \sin\varphi$ von dem mit OS parallelen Durchmesser GD' befinden, deren Produkt dem Quadrate des auf denselben Durchmesser bezogenen Trägheitsmomentes des Körpers gleich ist. Dieser Satz ist ganz ähnlich dem für den entsprechenden Fall im vorhergehenden Kapitel bewiesenen; nur ist er allgemeiner und begreift jenen als besonderen Fall in sich.

Zusatz I.

6) Es ist oben gezeigt worden, dass, wenn x und y die Coordinaten eines als Stossmittelpunkt angenommenen Punktes C, und t und u die laufenden Coordinaten der diesem Punkte C entsprechenden freiwilligen Achse OS darstellen, man als Gleichung dieser Geraden OS

$$\alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2\beta^2 = 0$$

erhält. Lässt man jetzt den Mittelpunkt C seinen Ort ändern, also seine beiden Coordinaten x und y veränderlich werden, so ist klar, dass auch die Linie OS eine andere Lage annehmen wird. Man könnte nun fragen, welche Beziehung zwischen den Variabeln x und y stattfinden muss, wenn die freiwillige Achse OS immer durch einen bestimmten Punkt O gehen soll, dessen Coordinaten u' und t' sein mögen. Es leuchtet ein, dass man diese Beziehung erhält, wenn man ausdrückt, dass die vorhergehende Gleichung immer für die Coordinaten $t = t'$ und $u = u'$ des Punktes O giltig ist. Hieraus findet sich für die gesuchte Relation zwischen x und y die Gleichung

$$\alpha^2 t' x + \beta^2 u' y + \alpha^2\beta^2 = 0,$$

d. i. die Gleichung einer freiwilligen Achse CT, welche dem Punkte O zugehört, wenn derselbe als Stossmittelpunkt angesehen wird.

Sollen also verschiedene Stossmittelpunkte C, C', C'' u. s. f. Gelegenheit zur Bildung verschiedener freiwilliger Achsen geben, welche sich

sämmtlich in ein und demselben Punkte O durchschneiden, so hat man alle diese Punkte auf einer Geraden CT zu wählen, die zur freiwilligen Achse wird, sobald man O als Stossmittelpunkt ansieht.

Bemerkung.

7) Da alle Punkte einer freiwilligen Achse OS für den ersten Augenblick in Ruhe verharren, so kann ein im Punkte C wirkender Stoss weder an dem wechselseitigen Punkte O, noch überhaupt an irgend einem Punkte der freiwilligen Achse OS eine Erschütterung hervorbringen. Ebenso lässt ein in O wirksamer Stoss alle Punkte der parallelen Achse CT in Ruhe.

Zusatz II.

8) Das Vorhergehende führt zu dem merkwürdigen Resultate, dass ein Stoss, den man in einem auf der Geraden CT beliebig gewählten Punkte C' wirken lässt, keine Erschütterung an dem freiwilligen Mittelpunkte O hervorbringt, weil die zu C' gehörige freiwillige Achse $O'S'$ immer durch den Punkt O gehen müsste. In gleicher Weise könnte man einen auf der freiwilligen Achse OS beliebig gewählten Punkt anstossen, ohne dass dadurch der Punkt C afficirt würde.

Zusatz III.

9) Die besprochenen Punkte mit ihren zugehörigen Achsen geben noch Gelegenheit zu verschiedenen Aufgaben, welche mit gleicher Leichtigkeit gelöst werden können. So lässt sich u. A. die Frage aufwerfen, auf welcher Curve die Stossmittelpunkte gelegen sein müssen, wenn die entsprechenden freiwilligen Achsen die Tangenten einer gegebenen Curve bilden sollen.

Es sei

$$u = f(t)$$

die Gleichung dieser gegebenen Curve und

$$\alpha^2 x t + \beta^2 y u + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

die der freiwilligen Achse für den Punkt C, dessen Coordinaten x und y sein sollen. Die Berührung dieser Geraden und der Curve giebt die Bedingung, dass der Differentialquotient $\frac{du}{dt}$, mag er aus der einen oder andern der beiden Gleichungen gebildet werden, im Berührungspunkte denselben Werth haben muss, woraus die dritte Gleichung

$$\alpha^2 x + \beta^2 y \,.\, f'(t) = 0$$

zur Entstehung gelangt. Werden aus einer dieser Gleichungen mittelst der beiden anderen die Grössen t und u entfernt, so bleibt eine Gleichung zwischen x und y als Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes.

Betrachten wir z. B. den besonderen Fall, wo die gegebene Curve $u = f(t)$ eine Parabel mit dem Scheitel G, der Achse GY und einem Parameter $= A$ sein soll. Man hat dann die folgenden Gleichungen:

$$Au = t^2,$$
$$\alpha^2 x t + \beta^2 y u + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$
$$A\alpha^2 x + \beta^2 y \cdot 2t = 0,$$

aus denen man durch Elimination von t und u für den Ort der Punkte C

$$4\beta^4 \cdot y = A\alpha^2 \cdot x^2$$

erhält. Es ist dies eine Parabel mit der nämlichen Achse und demselben Scheitel, deren Parameter A' gleich ist $\frac{4\beta^4}{A\alpha^2}$. Werden also auf dieser Parabel die Stossmittelpunkte angeordnet, so müssen alle freiwilligen Achsen die andere gegebene Parabel einhüllen. — Würde $A = \frac{2\beta^2}{\alpha}$ angenommen, so erhielte man $A' = A$, oder die beiden Parabeln würden zu einer einzigen verschmelzen. Wählt man in diesem Falle die Stossmittelpunkte auf einem der beiden Zweige dieser Parabel, so bilden die zugehörigen freiwilligen Achsen Tangenten des anderen Zweiges.

Zusatz IV.

10) Durch eine gleiche Analyse lässt sich auch die Umkehrung der vorhergehenden Aufgabe lösen, wenn nämlich der Ort der Stossmittelpunkte gegeben ist und verlangt wird, die von den entsprechenden freiwilligen Achsen eingehüllte Curve zu suchen.

Sind nämlich wieder x und y die Coordinaten eines beliebigen unter den Stossmittelpunkten C, so gilt für die zugehörige freiwillige Achse die Gleichung

$$\alpha^2 x t + \beta^2 y u + \alpha^2 \beta^2 = 0.$$

Lässt man nun x und y unendlich wenig variiren, indem man t und u als constant betrachtet, so erhält man

$$\alpha^2 t + \beta^2 u \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

und es gilt diese Gleichung zusammen mit der vorhergehenden nur für den Durchschnittspunkt der beiden freiwilligen Achsen, welche den beiden unmittelbar benachbarten Stossmittelpunkten entsprechen. Da aber für diesen Durchschnittspunkt der Annahme zufolge der geometrische Ort gegeben ist, so hat man zwischen x und y eine Gleichung

$$y = f(x),$$

aus welcher

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

gefunden wird. Setzt man die letzten Werthe in die ersten beiden Gleichungen ein und eliminirt hierauf x, so bleibt zwischen t und u eine Gleichung

$$u = \psi(t),$$

durch welche die gesuchte Curve bestimmt ist.

11) Soll z. B. der gegebene Ort der Stossmittelpunkte eine durch die Gleichung

$$Ay = x^2$$

dargestellte Parabel sein, so findet man für die gesuchte Curve

$$\frac{4\beta^4}{A\alpha^2} . u = t^2,$$

also ebenfalls eine Parabel, deren Parameter mit dem Parameter A der gegebenen in umgekehrtem Verhältnisse steht. Ist $A = \frac{2\beta^2}{\alpha}$, so fallen die beiden Parabeln in eine einzige zusammen, was mit dem Resultate des vorhergehenden Zusatzes vollkommen übereinstimmt.

12) Werden die Stossmittelpunkte auf dem Umfange der Centralellipse angenommen, für welche wir die Gleichung

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$$

aufgestellt haben, so findet sich für die von den freiwilligen Achsen eingehüllte Curve

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

d. i. die nämliche Ellipse. Es erklärt sich dies einfach dadurch, dass, weil der Annahme zufolge jeder Stossmittelpunkt am Ende eines Durchmessers der Centralellipse gelegen ist, die entsprechende freiwillige Achse die Tangente im andern Ende dieses Durchmessers bilden muss*).

13) Sollte der Ort der Stossmittelpunkte die Peripherie eines durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ausgedrückten Kreises sein, so würde man für die gesuchte Curve die Gleichung

$$\frac{t^2}{\beta^4} + \frac{u^2}{\alpha^4} = \frac{1}{R^2}$$

finden. Dieselbe gehört zu einer Ellipse, deren Achsen $\frac{\beta^2}{R}$ und $\frac{\alpha^2}{R}$ mit den Achsen β und α der Centralellipse zusammenfallen, aber den Quadraten dieser Achsenlängen proportional sind. U. s. w.

Zusatz V.

14) Die auf die gegenseitige Lage der Stossmittelpunkte C und ihrer freiwilligen Mittelpunkte O bezüglichen Untersuchungen sind noch einfacher und leichter, als die vorhergehenden. Bezeichnet man nämlich immer wieder mit x und y die Coordinaten des Punktes C und mit t und u die Coordinaten des zugehörenden wechselseitigen Punktes O, so bestehen zwischen diesen Grössen die Gleichungen

$$x = -\frac{\alpha^2\beta^2 t}{\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2},$$

$$y = -\frac{\alpha^2\beta^2 u}{\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2}.$$

*) Nach den in Nr. 3 gewonnenen Resultaten. Anm. d. Uebers.

Werden nun die Punkte C auf einer beliebigen Curve angenommen, für welche die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegeben ist, und man verlangt den Ort der entsprechenden freiwilligen Mittelpunkte O, so hat man nur in der letzteren Gleichung für x und y ihre obigen Werthe zu setzen, woraus man sofort zwischen t und u die den gesuchten Ort bestimmende Gleichung erhält. Wäre dagegen der Ort der freiwilligen Mittelpunkte gegeben, so würde man mittelst der den obigen Ausdrücken entsprechenden Werthe von t und u den Ort der Punkte C ausfindig machen.

15) Nehmen wir an, die Punkte C sollen auf einer Geraden gelegen sein, so kann man der Gleichung dieser Linie immer die Form

$$\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

geben, wenn man nur den Coefficienten a und b geeignete Werthe unterlegt. Setzt man in dieser Gleichung für x und y ihre in t und u ausgedrückten Werthe, so ergiebt sich für den Ort der entsprechenden freiwilligen Mittelpunkte O die Gleichung

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 - \alpha^2 a t - \beta^2 b u = 0.$$

Dieselbe gehört einer Ellipse an, welche mit der Centralellipse ähnlich gelegen ist, deren Mittelpunkt aber sich in einem Punkte mit den Coordinaten $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ befindet und deren Peripherie durch den Coordinaten-Anfangspunkt G hindurchgeht*). Da übrigens die Gerade CT durch die Gleichung

$$\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

dargestellt wurde, so folgt, dass sie als freiwillige Achse für einen Punkt O mit den Coordinaten a und b angesehen werden kann. Der Mittelpunkt unserer Ellipse liegt dann auf der Mitte der Geraden GO, und die Ellipse selbst ist über GO als einem mit dem gleichgerichteten Durchmesser der Centralellipse homologen Durchmesser construirt.

16) Wird also die gegebene Gerade CT als eine freiwillige Achse angesehen, welche einem Stossmittelpunkte O entspricht, so kann man sagen, dass für beliebige auf dieser Geraden angenommene Stossmittelpunkte die freiwilligen Mittelpunkte auf einer Ellipse liegen, welche, mit der Centralellipse ähnlich, über GO als einem dem gleichgerichteten Durchmesser der Centralellipse homologen Durchmesser beschrieben ist. Wählt man dagegen Stossmittelpunkte auf der Peripherie dieser Ellipse, so würden die freiwilligen Mittelpunkte auf der Geraden CT gelegen sein. In gleicher Weise zeigt sich, dass, wenn die Stossmittelpunkte auf der mit CT parallelen Geraden OS angenommen würden, die freiwilligen Mittelpunkte auf einer neuen Ellipse gelegen sein müssten, welche, mit der vorhergehenden

*) Die hierzu gehörige Figur des Originals kann nach den Angaben des Textes leicht gebildet werden.

Anm. d. Uebers.

ähnlich, über CG als dem zu OG homologen Durchmesser construirt wäre. Alles dies folgt aus der Wechselseitigkeit der beiden Punkte C und O.

17) Nehmen wir jetzt, um ein zweites Beispiel zu geben, an, die Punkte C wären auf der durch die Gleichung

$$y^2 = Ax$$

dargestellten Parabel gelegen, so findet sich, wenn für x und y ihre in t und u ausgedrückten Werthe gesetzt werden, die Gleichung

$$A\alpha^2 t^3 + A\beta^2 u^2 t + \alpha^2\beta^2 u^2 = 0$$

für den gesuchten Ort der freiwilligen Mittelpunkte. Wird diese Gleichung in Beziehung auf die Ordinate u aufgelöst, so giebt sie

$$u = \pm \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{-At^3}{\alpha^2 + At}}.$$

Man ersieht aus diesem Resultate, dass, da α, β und A positive Werthe darstellen, die erhaltene Curve dritten Grades nur auf der Seite der negativen Abscissen reelle Ordinaten besitzt, was übrigens schon aus der allgemeinen Lage der in Rede stehenden Punkte einleuchtet. Ferner hat diese Curve, wie die Parabel ($y^2 = Ax$) zwei congruente Zweige, welche sich über und unter der Abscissenachse ins Unendliche erstrecken; nur können sich diese Zweige von der Ordinatenachse nicht weiter als um eine Strecke

$$t' = -\frac{\alpha^2}{A}$$

entfernen, so dass eine im Abstande t' gelegte Parallele zur Ordinatenachse die gemeinschaftliche Asymptote beider Zweige der fraglichen Curve darstellt.

Es würden sich noch viele Untersuchungen derselben Art führen lassen; wir begnügen uns jedoch mit den gegebenen Beispielen und wenden uns zu einem wichtigeren Probleme, aus welchem sich zahlreiche Folgerungen ziehen lassen.

§. II.

Zweite Aufgabe.

18) Die Intensität P des dem Körper in einer zur Ebene zweier seiner Hauptachsen GX und GY normalen Richtung ertheilten Impulses sei gegeben; man sucht die Quantität Q desjenigen Stosses, welchen dieser Körper gegen ein in einem beliebigen Punkte D dieser Ebene seiner Bewegung entgegengestelltes Hinderniss oder einen festen Punkt ausübt.

Auflösung. Es sei C der in der Ebene der Achsen GX und GY gelegene Angriffspunkt von P. Man verbinde C mit D und nehme auf der Verlängerung der Geraden CD einen Punkt O an, von solcher Lage, dass ein daselbst angebrachter Stoss keine Erschütterung am Punkte D hervor-

bringt*). Zerlegt man hierauf die Kraft P in zwei parallele Kräfte, deren eine Q in D angreift, während die andere p den Punkt O zum Angriffspunkte hat, so ist klar, dass der gesuchte Stoss gegen den Punkt D durch die daselbst angreifende Componente Q dargestellt werden muss; denn die andere Componente p, welche in O wirksam ist, kann der Voraussetzung zufolge keinen Stoss im Punkte D hervorbringen. Man findet folglich nach den Gesetzen der Zerlegung paralleler Kräfte

$$Q = P \cdot \frac{CO}{DO}$$

für den gesuchten Stoss Q, welchen der in Rede stehende Punkt D erleidet, und es ist zur Lösung des vorgelegten Problemes nur noch nöthig, die Lage des Punktes O durch die der Punkte C und D auszudrücken.

Da sich der Punkt O zunächst mit C und D in gerader Linie befindet, so hat man, wenn a und b die Coordinaten des Punktes C, x und y die von D und t und u die von O darstellen, die Gleichung

$$u - y = \frac{b-y}{a-x}(t-x).$$

Ferner muss, wenn der Punkt O schicklich gewählt ist, für einen in O wirksamen Stoss die entsprechende freiwillige Achse durch den Punkt D gehen. Hieraus folgt die zweite Gleichung

$$\alpha^2 tx + \beta^2 uy + \alpha^2\beta^2 = 0.$$

Combinirt man diese beiden Gleichungen mit einander, um daraus die Werthe von t und u als Functionen von x, y, a und b zu berechnen, so entsteht das Resultat

$$t = \beta^2 \frac{\alpha^2(x-a) + y(bx-ay)}{\alpha^2 ax + \beta^2 by - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2}.$$

Ebenso findet man ohne weitere Rechnung, wenn man x und y, a und b, sowie α und β unter einander vertauscht,

$$u = \alpha^2 \frac{\beta^2(y-b) + x(ay-bx)}{\alpha^2 ax + \beta^2 by - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2}.$$

Es reicht aber jeder dieser beiden Werthe für sich allein zur Lösung der gestellten Aufgabe hin. Da nämlich

$$Q = P \cdot \frac{CO}{DO}$$

gefunden ist, und das Verhältniss der Linien CO und DO mit dem ihrer Projectionen auf eine der beiden Coordinatenachsen übereinstimmen muss, so ergiebt sich, wenn man z. B. auf die Abscissenachse projicirt, $\frac{a-t}{x-t}$**) als Werth des in Rede stehenden Verhältnisses; also ist auch

*) Mit anderen Worten: Der Punkt O soll so gewählt werden, dass, wenn man ihn als Stossmittelpunkt ansieht, die zugehörige freiwillige Achse durch den Punkt D geht. — Die hierzu gehörige Figur des Originals kann nach den Angaben des Textes leicht hergestellt werden. Anm. d. Uebers.

**) Im Originale steht hier, sowie weiterhin, fälschlich: $\frac{a+t}{x+t}$. Anm. d. Uebers.

$$Q = P \cdot \frac{a - t}{x - t}.$$

Setzt man nun für t den vorher berechneten Ausdruck, so findet man nach gehöriger Entwickelung die elegante Formel:

$$Q = P \frac{\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Dies ist also die Intensität der Kraft Q, mit welcher ein Körper, wenn er durch einen normal gegen eine seiner Hauptebenen gerichteten Impuls P in Bewegung gesetzt ist, gegen ein festes Hinderniss stösst, welches ihm in einem beliebigen Punkte D dieser Ebene entgegengestellt wird.

Zusatz I.

19) Man sieht zunächst, dass der Stoss Q in denjenigen Punkten zu Null wird, für welche die Relation

$$\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

gilt, d. i. in allen Punkten der zum Stossmittelpunkte C gehörenden freiwilligen Achse OS.

Ferner wird der Stoss Q gleich der Kraft P selbst, sobald

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 a x + \beta^2 b y$$

ist. Hieraus folgt, dass der Körper mit derselben Intensität P nicht allein in seinem Stossmittelpunkte C und in seinem Schwerpunkte G, sondern überhaupt in allen Punkten einer Ellipse stösst, welche man über CG mit zwei zu den Achsen α und β der Centralellipse gleichen und parallelen Achsen construiren kann.

Zusatz II.

Vom Angriffspunkte des Maximalstosses.

20) Will man die Coordinaten x und y eines Punktes D ausfindig machen, für welche der Stoss Q zu einem Maximum wird, so hat man nur die beiden Gleichungen

$$\frac{dQ}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dy} = 0$$

zu bilden. Dies giebt

$$\alpha^2 a (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) - 2\alpha^2 x (\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2) = 0$$
$$\beta^2 b (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) - 2\beta^2 y (\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2) = 0,$$

und hieraus folgt unmittelbar die Proportion

$$x : y = a : b,$$

welche besagt, dass der gesuchte Punkt D auf der den Stossmittelpunkt und Schwerpunkt des Körpers verbindenden Geraden CG gelegen sein muss. Setzt man nun in einer der beiden obigen Gleichungen das eine Mal für y seinen Werth $\frac{b}{a} x$, ein anderes Mal für x seinen Werth $\frac{a}{b} y$, so erhält man zur besonderen Bestimmung von x und y die beiden quadratischen Gleichungen

$$(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) x^2 + 2\alpha^2\beta^2 a x - \alpha^2\beta^2 a^2 = 0$$
$$(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) y^2 + 2\alpha^2\beta^2 b y - \alpha^2\beta^2 b^2 = 0,$$

beide von ganz gleicher Form, von denen die eine in die andere übergeht, wenn man darin x mit y und a mit b vertauscht.

21) Da wir bereits wissen, dass der gesuchte Punkt D sich auf der gegebenen Geraden CG befindet, so wollen wir als neue Unbekannte den Abstand $\nu = DG$ dieses Punktes vom Schwerpunkte G in die Rechnung einführen. Wir haben dann, wenn zugleich

$$CG = \sqrt{a^2 + b^2} = H$$

gesetzt wird, die Proportion

$$\nu : H = x : a,$$

oder auch

$$\nu : H = y : b,$$

und dies giebt:

$$x = \frac{a}{H}\nu, \quad y = \frac{b}{H}\nu.$$

Werden nun diese Werthe für x und y in den vorhergehenden quadratischen Gleichungen substituirt, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten ν die Gleichung

$$\nu^2 + 2H\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2}\cdot\nu - H^2\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} = 0.$$

Bezeichnen wir ferner mit A die Entfernung des freiwilligen Mittelpunktes O vom Schwerpunkte G, so gilt hierfür die Gleichung

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} = \frac{A}{H},$$

insofern nämlich deren linke Seite das Verhältniss der Abscissen oder Ordinaten der beiden wechselseitigen Punkte C und O ausdrückt (vgl. Nr. 2), dieses Verhältniss aber offenbar mit dem der beiden Strecken A und H übereinstimmt.

Mit Einführung dieses einfachen Ausdruckes geht die zur Bestimmung von ν gefundene Gleichung in

$$\nu^2 + 2A\nu - AH = 0$$

über, und es ergiebt sich hieraus der Doppelwerth:

$$\nu = -A \pm \sqrt{A^2 + AH},$$

welcher zeigt, dass in zwei, zu beiden Seiten des Schwerpunktes G gelegenen Punkten ein Maximum des Stosses stattfindet. Will man diese beiden Punkte auf den freiwilligen Drehungsmittelpunkt O des Körpers beziehen, so möge

$$DO = \lambda = \nu + A$$

gesetzt werden; ferner bezeichnen wir zur Abkürzung die Strecke $OC = A + H$ mit dem Buchstaben L. Man erhält hiermit das Resultat:

$$\lambda = \pm\sqrt{AL},$$

und hieraus den Lehrsatz:

„Der Angriffspunkt des Maximalstosses befindet sich auf der Geraden, welche den Stossmittelpunkt mit dem Schwerpunkte des Körpers verbindet, und zwar ist sein Abstand vom freiwilligen Drehungsmittelpunkte die mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Schwerpunktes und des Stossmittelpunktes von dem nämlichen freiwilligen Mittelpunkte."

Es ist dieser Lehrsatz ganz entsprechend demjenigen, welcher früher für den besondern Fall gefunden wurde, wo die freiwillige Drehung um eine mit einer der drei Hauptachsen des Körpers parallele Achse stattfindet*).

22) Was die Intensität (Q) des Maximalstosses selbst betrifft, so gilt hierfür die Formel:

$$(Q) = P\frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2},$$

wie man leicht aus dem allgemeinen Werthe von Q finden wird, wenn man darin zunächst x und y durch die Grösse v ausdrückt und dann für v die dem Maximum des Stosses entsprechende Grösse

$$v = -A \pm \sqrt{A^2 + AH}$$

einführt.

Der erste, positive Werth von (Q) entspricht einem Punkte D, welcher zwischen C und G fällt; der Stoss findet hierbei in demselben Sinne statt, wie der ursprüngliche Impuls P, und ist immer grösser als P. Der zweite Werth von (Q) dagegen, der unter allen Umständen negativ ist, entspricht einem Punkte D', in welchem ein zweites Maximum des Stosses eintritt. Es fällt dieser Punkt, vom freiwilligen Mittelpunkte G aus gerechnet, auf die dem Punkte D entgegengesetzte Seite, liegt aber in gleichem Abstande wie dieser. Der hier stattfindende Stoss hat ferner eine entgegengesetzte Richtung mit dem Impuls P, von welchem die Bewegung des Körpers herrührt, und ist immer kleiner als P.

Zusatz III.

Von den Punkten gleicher Intensität des Stosses.

23) Sucht man diejenigen Punkte des Körpers, in denen er mit einer gegebenen Intensität nP zu stossen vermag, so hat man nur in dem allgemeinen Ausdrucke von Q die Substitution

$$Q = nP$$

zu machen. Man erhält hierdurch für den geometrischen Ort dieser Punkte die Gleichung

$$n(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) = \alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2,$$

oder, wenn man den Coordinaten-Anfang in einen Punkt mit den Coordi-

*) Vergl. Nr. 19 des ersten Capitels. Anm. d. Uebers.

naten $x = \frac{a}{2n}$ und $y = \frac{b}{2n}$ verlegt und die neuen Coordinaten mit X und Y bezeichnet,

$$4n^2(\alpha^2X^2 + \beta^2Y^2) = \alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - 4\alpha^2\beta^2(n^2 - n),$$

oder endlich in einfacheren Ausdrücken:

$$4n^2\left(\frac{X^2}{\beta^2} + \frac{Y^2}{\alpha^2}\right) = \frac{H}{A} - 4(n^2 - n).$$

So lange die rechte Seite dieser Gleichung einen positiven Werth hat, ist die Curve offenbar eine mit der Centralellipse ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse, deren Mittelpunkt die Coordinaten $x = \frac{a}{2n}$ und $y = \frac{b}{2n}$ besitzt. Wird ferner die rechte Seite zu Null, so schmilzt die Curve in einen einzigen Punkt zusammen, und zwar ist dies der Angriffspunkt eines Maximum des Stosses. Soll nämlich die Relation

$$\frac{H}{A} - 4(n^2 - n) = 0$$

Geltung finden, so muss n einen der beiden Werthe

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2}$$

annehmen, woraus man für den gegebenen Stoss nP einen der beiden Ausdrücke

$$Q = P\frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2}$$

erhält. Dies sind aber genau dieselben beiden Werthe, welche oben für das Stossmaximum gefunden wurden, und zwar entspricht der positive einem Maximalstosse, der mit dem Impulse P nach derselben Seite hin gerichtet ist, während der negative einem Maximum von entgegengesetzter Richtung zugehört. — Wird endlich die rechte Seite unserer Gleichung negativ, so ist die Ellipse imaginär, d. h. es sind Punkte, in denen der Stoss die gegebene Intensität nP erlangt, gar nicht vorhanden.

Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so folgt, dass der Ort für die Angriffspunkte eines gegebenen Stosses nP eine mit der Centralellipse ähnliche Ellipse, oder einen einzigen Punkt, oder endlich eine imaginäre Curve darstellt, je nachdem eine der Bedingungen

$$H - 4A(n^2 - n) \gtreqless 0$$

Geltung findet.

24) Es ist leicht einzusehen, warum in dem letzten der aufgezählten Fälle kein Punkt für die gegebene Stossintensität nP vorhanden sein kann. Soll nämlich das Trinom

$$H - 4A(n^2 - n)$$

einen negativen Werth erhalten, so bedeutet dies für den Fall eines positiven n, man soll diese Zahl n grösser als $\frac{1+\sqrt{1+\frac{H}{A}}}{2}$ annehmen; man verlangt also, dass der positive Stoss nP das für diesen Fall gefundene Maximum überschreiten soll, was offenbar unmöglich ist. Ebenso würde, wenn n negativ ist, vorausgesetzt werden, der absolute Werth dieser Zahl solle die Grösse $\frac{-1+\sqrt{1+\frac{H}{A}}}{2}$ übersteigen. Hierzu müsste aber der geforderte negative Stoss grösser als das Maximum der negativen Stösse sein, was wieder eine Absurdität in sich schliesst.

Zusatz IV.

Besondere Fälle der vorhergehenden Sätze.

25) Setzt man in dem allgemeinen Ausdrucke von Q, für welchen in Nr. 18 der Werth

$$Q = P\frac{\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2}$$

gefunden wurde, $a = 0$ und $b = 0$, so hat man den besondern Fall, wo die Richtung des Impulses P durch den Schwerpunkt G des Körpers hindurchgeht, wo folglich der Körper selbst nur eine fortschreitende Bewegung längs seiner Hauptachse GZ besitzt. In diesem Falle erhält man folglich für den Stoss, dessen der Körper mittelst eines beliebigen Punktes der Hauptebene XY fähig ist, den Ausdruck

$$Q = P\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2},$$

der zu einem Maximum wird, sobald $x = 0$ und $y = 0$ ist. Der Angriffspunkt des Maximalstosses fällt also hier mit dem Schwerpunkte selbst zusammen, was übrigens mit Rücksicht auf die Art der vorhandenen Bewegung leicht vorhergesehen werden konnte.

26) Was die Curve betrifft, welche in dem gegebenen Falle von den Punkten einer gleichen Stossintensität nP gebildet wird, so besitzt sie die Gleichung

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2\beta^2\left(\frac{1}{n} - 1\right),$$

und diese zeigt, dass die in Rede stehenden Punkte sich auf einer Ellipse befinden, welche mit der Centralellipse ähnlich und concentrisch ist, und deren Achsen mit den Achsen der Centralellipse der Richtung nach zusammenfallen. Die Grösse dieser Ellipse hängt von dem constanten Werthe nP ab, den man dem Stosse Q geben will, der jedoch immer kleiner als P selbst sein muss, da hier P die grösste Stossintensität darstellt, deren der Körper überhaupt fähig ist.

Nimmt man z. B.

$$Q = \tfrac{1}{2} P$$

an, so findet sich

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

d. i. die Gleichung der Centralellipse selbst. Man sieht hieraus, dass diese Ellipse im vorliegenden Falle den geometrischen Ort derjenigen Punkte darstellt, mittelst deren der Körper mit der Hälfte der Intensität seines Bewegungsimpulses zu stossen fähig ist.

Zusatz V.

Von dem besonderen Falle, wo die Bewegung des Körpers von einem Kräftepaar herrührt.

27) Bringen wir den allgemeinen Ausdruck von Q auf die Form

$$Q = Pa \frac{\alpha^2 x + \frac{b}{a} \beta^2 y + \frac{\alpha^2 \beta^2}{a}}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

und nehmen an, dass hierin

$$P = 0, \quad a = \infty, \quad b = \infty$$

wird, jedoch so, dass dabei das Verhältniss $\frac{b}{a}$ ungeändert bleibt und die Producte oder Momente Pa und Pb dieselben endlichen Werthe behalten, als wenn P, a und b sich nicht geändert hätten, so ist dies der besondere Fall, wo die Bewegung des Körpers von einem Kräftepaar $(P, -P)$ mit dem Hebelsarm $CG = \sqrt{a^2 + b^2}$ herrührt. Man findet dann für den Stoss, dessen der Körper in einem beliebigen Punkte mit den Coordinaten x und y fähig ist, die Formel

$$Q = P \frac{\alpha^2 a x + \beta^2 b y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Dieses Resultat kann übrigens noch verificirt werden, sobald man auf eine directe Weise den Stoss aufsucht, welchen der Körper auszuüben fähig ist, wenn er von dem in Rede stehenden Kräftepaare in Bewegung gesetzt wurde. Es ist ferner auch möglich, auf einem sehr einfachen Wege von dem allgemeinen Werthe von Q zu dem hier vorgelegten Falle zu gelangen, ohne dabei P zu Null und a und b unendlich werden zu lassen, was immer für die Auffassung einige Dunkelheit zurücklässt.

28) Wenn nämlich der Stoss, welcher von einer einzigen im Punkte C mit den Coordinaten a und b angreifenden Kraft herkommt, durch

$$P \frac{\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}$$

ausgedrückt wird, so muss eine gleiche, parallele und entgegengesetzt gerichtete Kraft $-P$, die in einem Punkte C' mit den Coordinaten a' und b' angreift, einen Stoss gleich

$$-P\frac{\alpha^2 a' x + \beta^2 b' y + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2}$$

hervorbringen. Werden nun beide Kräfte vereinigt, so muss der aus ihrem Zusammenwirken oder dem Kräftepaar $(P, -P)$ hervorgehende Stoss den Werth

$$Q = P\frac{\alpha^2(a-a')x + \beta^2(b-b')y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2}$$

annehmen. Dieser Ausdruck trifft aber in dem Falle, wenn a' und b' gleich Null sind, mit dem oben gefundenen zusammen und bestätigt ihn, insofern er nämlich in diesem Falle den Stoss eines Paares darstellt, dessen Hebelsarm CC' gleich CG geworden ist.

29) Da èin Kräftepaar immer in seiner Ebene oder auch in einer dazu parallelen Ebene verlegt werden und dabei in eine unendliche Menge anderer Paare von gleichem Momente umgebildet werden kann, ohne dass dadurch seine Wirkung auf den Körper eine Aenderung erleidet, so ist klar, dass der von der Wirkung des Paares herkommende Stoss Q immer derselbe sein muss, wie man auch das Paar innerhalb der Grenzen der zulässigen Bedingungen in der Figur gelegen annehmen mag. Dasselbe zeigt die letzte Formel, da in ihr der Werth von Q nicht von den besonderen Werthen der fünf Grössen P, a, b, a', b', sondern einzig von den beiden Producten $P(a-a')$ und $P(b-b')$ abhängt, welche die Momente des vorliegenden Kräftepaares in Beziehung auf die Achsen der y und x darstellen. Es ist deshalb geeigneter, in der betreffenden Formel nur diese beiden Momente zu behalten, und sie mit besonderen Buchstaben, etwa L und M, zu bezeichnen, da hierdurch allein schon die Grösse und Lage des betrachteten Paares vollständig ausgedrückt ist. Man erhält so die Formel

$$Q = \frac{L\alpha^2 x + M\beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2},$$

die insofern vorzuziehen ist, als sie nur die für die vorliegende Frage nöthigen Grössen in sich enthält.

Ehe wir weiter gehen, lässt sich noch eine kleine Bemerkung anknüpfen.

30) Es ist oben (in Nr. 28) gezeigt worden, wie aus der für die Wirkung einer einzelnen Kraft geltenden Formel die auf ein Kräftepaar bezügliche gewonnen werden kann. In ähnlicher Weise lässt sich, wenn die letztere als bekannt vorausgesetzt wird (und es würde nicht schwer sein, dafür einen directen Beweis aufzustellen), auf die erste zurückschliessen. Man kann nämlich eine im Punkte C (mit den Coordinaten a und b) angreifende einfache Kraft in eine gleiche und parallele Einzelkraft, welche den Punkt D (mit den Coordinaten x und y) zum Angriffspunkte hat, und ein am Hebelsarm CD wirkendes Kräftepaar zerlegen. Die im Punkte D angreifende Kraft erzeugt dann in diesem Punkte einen Stoss, dessen Inten-

sität offenbar gleich P ist; das Kräftepaar dagegen ertheilt demselben Punkte einen Stoss, der durch den Ausdruck

$$P\frac{\alpha^2(a-x)x+\beta^2(b-y)y}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2\beta^2}$$

dargestellt wird. Hieraus erhält man für den gesuchten Stoss Q, welcher gleich der Summe dieser beiden Werthe sein muss,

$$Q=P\frac{\alpha^2ax+\beta^2by+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2\beta^2},$$

d. i. genau dieselbe Formel, welche im Anfange entwickelt wurde.

Doch wir wenden uns zu dem Falle zurück, wo die Bewegung des Körpers nur von einem Kräftepaar herrührt.

Vom Angriffspunkte des Maximalstosses.

31) Da der Stoss, wenn er von einem Kräftepaar herrührt, dessen auf die Hauptachsen α und β bezogene Momente L und M sind, durch den Ausdruck

$$Q=\frac{L\alpha^2x+M\beta^2y}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2\beta^2}$$

dargestellt wurde, so hat man nur hieraus die Gleichungen

$$\frac{dQ}{dx}=0,\qquad\frac{dQ}{dy}=0$$

zu bilden, wenn es gilt, die Coordinaten x und y eines Punktes D zu berechnen, in welchem der Stoss zu einem Maximum wird. Man findet dann

$$x=L\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2L^2+\beta^2M^2}}$$

$$y=M\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2L^2+\beta^2M^2}}$$

oder auch die Proportion

$$x:y=L:M$$

und die Gleichung

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2\beta^2.$$

Die letzten beiden Resultate zeigen, dass der Angriffspunkt für ein Maximum des Stosses auf der Centralellipse und gleichzeitig auf dem Durchschnitte der Coordinatenebene mit der Ebene des Kräftepaares befindlich sein muss, wenn man sich letztere durch den Anfangspunkt G gelegt denkt. Der gesuchte Punkt ist demnach doppelt vorhanden, nämlich an den beiden Enden des durch die Ebene des Paares bestimmten Durchmessers 2δ.

Was den Werth des Maximalstosses betrifft, den wir wieder mit (Q) bezeichnen wollen, so ergiebt sich dafür aus den vorhergehenden Formeln

$$(Q)=\frac{\sqrt{\alpha^2L^2+\beta^2M^2}}{2\alpha\beta},$$

oder auch, mittelst der Relation

$$\delta^2 = x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 (L^2 + M^2)}{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2},$$

der einfachere Ausdruck

$$(Q) = \frac{\sqrt{L^2 + M^2}}{2\delta},$$

d. i. das Moment des gegebenen Kräftepaares, dividirt durch die Länge des mit der Ebene des Paares parallelen Durchmessers der Centralellipse.

Ist daher ein Körper nur durch den Impuls eines Kräftepaares in Bewegung gesetzt, welches normal gegen eine seiner drei Hauptebenen gewirkt hat, oder, was auf dasselbe hinauskommt, rotirt er im gegenwärtigen Augenblicke um einen Durchmesser $2\delta'$ der in dieser Ebene gelegenen Centralellipse, so befindet sich der Punkt, in welchem er einen möglichst starken Stoss auszuüben vermag, an einem der beiden Enden des mit $2\delta'$ conjugirten Durchmessers 2δ; im anderen Ende stösst der Körper mit gleicher Intensität, aber in entgegengesetztem Sinne. Ferner wird die Grösse des Stosses durch den Quotienten aus dem Momente des Paares und der Länge des Durchmessers 2δ gemessen.

32) Der zuletzt behandelte Fall lässt sich übrigens mit dem früher (Nr. 20 und 21) betrachteten in einem Ausdrucke zusammenfassen, wenn man, ohne auf die besondere Art des Stosses, welchen der Körper erlitten hat, Rücksicht zu nehmen, nur seine gegenwärtige Bewegung ins Auge fasst, wobei es sich in beiden Fällen um einen Körper handelt, welcher momentan um eine in seiner Hauptebene gelegene freiwillige Achse OS rotirt. Bei Aufsuchung des Angriffspunktes für den Maximalstoss wurde früher (Nr. 21) gefunden, dass dieser Punkt D in der Linie GO, d. i. in der Richtung des mit der freiwilligen Achse conjugirten Durchmessers δ gelegen sei, und dass sein Abstand vom Punkte O, den wir mit λ bezeichneten, die Grösse

$$\lambda = \pm \sqrt{A^2 + AH}$$

besitze. Dieser Ausdruck kann, da $AH = \delta^2$ (nach Nr. 3), zunächst auf die Form

$$\lambda = \pm \sqrt{A^2 + \delta^2}$$

gebracht werden, worin A die Strecke GO darstellt. Nennen wir nun wieder φ den Winkel, welchen der Durchmesser δ mit der freiwilligen Achse OS oder mit dem hierzu parallelen conjugirten Durchmesser δ' bildet, so war $\delta \sin \varphi$ der Trägheitsarm des Körpers für die Linie δ'; man erhält folglich

$$\sqrt{\delta^2 \sin^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi}$$

für den Trägheitsarm desselben Körpers in Beziehung auf OS. Wird nun dieser Werth wie früher mit K bezeichnet, so entsteht das Resultat:

$$\lambda \sin \varphi = \sin \varphi \sqrt{A^2 + \delta^2} = K.$$

Man gelangt hieraus zu der allgemeinen Folgerung, dass, wenn ein Körper gegenwärtig um eine in einer seiner drei Hauptebenen beliebig ge-

legene freiwillige Achse rotirt, diejenigen beiden Punkte dieser Ebene, mittelst deren der Körper einen Stoss von möglichst grosser Intensität auszuüben fähig ist, sich zu beiden Seiten der freiwilligen Achse in dem gleichen Abstande $\pm \lambda \sin \varphi$ befinden, welcher mit dem auf dieselbe Achse bezüglichen Trägheitsarme K des Körpers völlig identisch ist. Da ausserdem diese beiden Punkte auf dem mit der freiwilligen Achse conjugirten Durchmesser der Centralellipse gelegen sind, so ist hierdurch ihre Lage vollkommen bestimmt. Wird dieser allgemeine Satz auf den besondern Fall angewendet, wo die Achse durch den Schwerpunkt des Körpers geht, so erhält man den in der vorhergehenden Nummer behandelten Fall. Man hat dann $A = 0$, und die Strecke $\lambda \sin \varphi = K$ wird zu $\pm \delta \sin \varphi$, wie bereits gefunden wurde.

Zusatz VI.

Anderer Ausdruck der Kraft Q, mit welcher jeder Punkt in Folge der Rotation des Körpers begabt ist.

33) Bezeichneten wir mit a und b die Coordinaten des Punktes C, worin der Körper den Impuls P erhalten hat, von welchem seine gegenwärtige Bewegung herstammt, und mit x und y die Coordinaten des beliebigen Punktes D, mittelst dessen er mit der gesuchten Kraft Q gegen ein Bewegungshinderniss zu stossen vermag, so war

$$Q = P \frac{\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Fällt man nun aus dem Punkte D, mit den Coordinaten x und y, eine Senkrechte auf die freiwillige Achse OS, so ergiebt sich, wenn man die Länge dieses Perpendikels π nennt, mit Rücksicht auf die für jene Achse geltende Gleichung

$$\alpha^2 a t + \beta^2 b u + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

der Werth:

$$\pi = \frac{\alpha^2 a x + \beta^2 b y + \alpha^2 \beta^2}{\sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2}},$$

und der für Q aufgestellte Ausdruck erlangt hiermit die Form:

$$Q = P \frac{\pi \sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2}}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Mit Benutzung der Werthe

$$CG = H = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OG = A = \frac{\alpha^2 \beta^2 H}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2}$$

und der Relation

$$AH = \delta^2$$

findet sich für die in Q enthaltene Wurzelgrösse

$$\sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2} = \frac{\alpha\beta\delta\delta'}{A} \text{ *)},$$

worin δ' den zur freiwilligen Achse parallelen Durchmesser und δ den zugehörigen conjugirten Durchmesser darstellt. Man erhält hiermit für Q den einfacheren Ausdruck:

$$Q = \frac{P\pi}{A} \cdot \frac{\alpha\beta \, . \, \delta\delta'}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Wird jetzt mit ϑ die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, mit welcher der Körper um die freiwillige Achse OS rotirt, und mit φ die Neigung von OG und OS, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von δ gegen δ', so ist klar, dass $\vartheta \, . \, \overline{OG} \, . \sin\varphi = \vartheta \, . \, A \sin\varphi$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes G darstellt, dass folglich der Impuls P, welcher den Körper in Bewegung gesetzt hat, in der Form

$$P = m\vartheta \, . \, A \sin\varphi$$

geschrieben werden kann, wobei m die Masse dieses Körpers ausdrückt. Setzt man daher für P diesen Werth in der vorhergehenden Formel ein, so ergiebt sich (unter Berücksichtigung der Relation $\delta\delta' \sin\varphi = \alpha\beta$) das Resultat

$$Q = \vartheta\pi \cdot \frac{m\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2}.$$

Hierin ist der Factor $\vartheta\pi$ die Geschwindigkeit des Punktes D, welcher die Coordinaten x und y besitzt, und der andere Factor derjenige Theil der Masse m, welcher durch den Bruch

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2}$$

dargestellt wird. Man kann folglich sagen, dass bei der Bewegung des Körpers der in Rede stehende Punkt mit derselben Intensität stösst, als wenn dieser Bruchtheil der Masse in ihm concentrirt wäre.

Betrachtet man in gleicher Weise einen anderen Punkt D' und nennt x' und y' seine Coordinaten, π' seinen kürzesten Abstand von der freiwilligen Achse, und Q' die Intensität des Stosses, dessen er fähig ist, so erhält man wieder

$$Q' = \vartheta\pi' \cdot \frac{m\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x'^2 + \beta^2 y'^2 + \alpha^2\beta^2}.$$

Wird nun noch die Bedingung hinzugefügt, dass zwischen D' und D die mehrfach besprochene Wechselseitigkeit stattfinden soll, so gelten für die Coordinaten dieser Punkte die Relationen

*) Man gelangt u. A. zu diesem Resultate, wenn man die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse $\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2$ in

$$(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2(a^2 + b^2)$$

zerlegt und darin, ausser den oben angegebenen Werthen, nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse

$$\alpha^2 + \beta^2 = \delta^2 + \delta'^2$$

substituirt. Anm. d. Uebers.

$$x' = -\frac{\alpha^2\beta^2 x}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}, \quad y' = -\frac{\alpha^2\beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2},$$

und man findet nach Einsetzung dieser Werthe

$$Q' = \vartheta\pi \,.\, \frac{m\,(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2}.$$

Hierin ist $\vartheta\pi$ die Geschwindigkeit des Punktes D', der andere Factor dagegen der Bruchtheil

$$\frac{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}$$

der ganzen Masse des Körpers. Dieser Bruch und der oben für den Punkt D berechnete bilden aber zusammen die Einheit, und ihr Verhältniss ist nach den soeben angegebenen Relationen gleich dem von x' zu x, oder von y' zu y, folglich auch von $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ zu $\sqrt{x^2 + y^2}$, d. i. gleich dem umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen u und u', um welche die Punkte D und D' vom Schwerpunkte G des Körpers abstehen.

Man ist hiernach zu dem Ausspruche berechtigt, dass bei der Bewegung des Körpers die beiden wechselseitigen Punkte D und D' gewissermaassen die ganze Masse m des Körpers unter sich in zwei Theile μ und μ' theilen, welche mit ihren Entfernungen vom Schwerpunkte G umgekehrt proportional sind, und dass diese beiden Punkte gegen ihnen entgegenstehende Hindernisse ebenso stossen, als wenn sie diese Theile der Masse in sich vereinigt enthielten.

Nennt man Δ den Halbmesser der Centralellipse, auf dessen Richtung die beiden Punkte D und D' fallen, so ist bekanntlich

$$uu' = \Delta^2;$$

man kann daher die beiden Bruchtheile μ und μ' der Masse m, welche die Werthe

$$\mu = m\frac{u'}{u + u'}, \quad \mu' = m\frac{u}{u + u'}$$

besitzen, auch durch

$$m\frac{\Delta^2}{u^2 + \Delta^2} \quad \text{und} \quad m\frac{u^2}{u^2 + \Delta^2}$$

ausdrücken, und erhält hiermit für Q und Q' die einfacheren Resultate:

$$Q = \vartheta\pi \,.\, m\frac{\Delta^2}{u^2 + \Delta^2},$$

$$Q' = \vartheta\pi \,.\, m\frac{u^2}{u^2 + \Delta^2}.$$

Diese Ausdrücke stimmen vollkommen mit denen überein, welche man in dem einfachen Falle eines starren unmateriellen Stabes DD' erhalten würde, wenn derselbe an seinen beiden Enden mit den Massen μ und μ' belastet wäre, und dieselbe Rotationsgeschwindigkeit besässe, welche dem Körper in Beziehung auf die freiwillige Achse OS zukommt.

Man könnte folglich für den Augenblick des Stosses an die Stelle des Körpers diesen Stab DD', oder auch irgend einen andern mit demselben Schwerpunkte G, derselben Masse m und demselben Trägheitsarme Δ setzen, und es würde ein solcher Stab nicht allein in seinen beiden Enden, sondern auch in jedem andern Punkte seiner Richtung (wenn man dieselbe als eine unbiegsame Linie auffasst) gegen ein Bewegungshinderniss mit der nämlichen Intensität Q stossen, welche der entsprechende Punkt des Körpers selbst besitzt. Hieraus folgt jedoch nicht, dass derselbe Stab, wenn man ihm eine ebenso grosse Winkelgeschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne geben wollte, im Stande wäre, dem Körper das Gleichgewicht zu halten, oder seine ganze Bewegung zu vernichten, sondern er würde nur die in seine Richtung fallenden Punkte zur Ruhe bringen, so dass der Körper nur noch eine Rotationsbewegung um diese Gerade behalten könnte. Nun vermag aber ein um eine Achse rotirender Körper keinen Stoss auf einen in der Richtung seiner Achse gelegenen Punkt auszuüben; so lange man also nur diejenigen Stösse ins Auge fasst, welche der Körper mittelst eines Punktes der Geraden DD' zu ertheilen fähig ist, bleibt die Wirkung dieselbe als bei dem von uns fingirten Stabe; in diesem Sinne kann also für den Augenblick des Stosses der Stab an die Stelle des Körpers gesetzt werden.

Kleinere Mittheilungen.

XXXI. Ueber die Vergleichung zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel. Der unter Nr. XVII dieses Jahrgangs gegebene sinnreiche Beweis des Satzes, dass das arithmetische Mittel aus beliebig vielen absoluten Zahlen, falls dieselben nicht sämmtlich gleich sind, stets grösser sei als das geometrische Mittel, lässt sich durch einen äusserst kurzen Beweis ersetzen. Betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n)}{(a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}}$$

und fragen, wenn derselbe seinen kleinsten Werth erhalte, so ergiebt sich, dass dieses dann geschieht, wenn alle a einander gleich sind. Denn nehmen wir die im Zähler vorkommende Summe als constant an, so erhält

das in dem Nenner stehende Produkt alsdann seinen grössten Werth. Wären nämlich auch nur zwei a, z. B. a_1 und a_2 ungleich, so könnte man das Produkt $a_1 a_2$ durch ein grösseres, durch $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2}$ ersetzen. Der Werth, welchen unser Ausdruck für lauter gleiche a erhält, ist aber, die in dem Zähler stehende Summe sei welche sie wolle, $= 1$. Für nicht durchaus gleiche a ist folglich der Zähler grösser als der Nenner, das arithmetische Mittel grösser als das geometrische. Dass letzteres wieder grösser ist als das harmonische, dürfte sich wohl nicht leicht kürzer beweisen lassen, als es S. 189 dieses Bandes geschehen ist. Der in Obigem mitgetheilte kurze Beweis ist von mir bereits in dem Programm des Gymnasiums zu Marburg von 1856 S. 21 angedeutet worden.

GREBE.

XXXII. Ueber eine gewisse Determinante. Von Dr. G. ZEHFUSS, provisorischem Lehrer der höheren Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt. Es seien zwei beliebige Determinanten gegeben:

$$p = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad \text{und} \quad P = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

welche hier beispielsweise vom 4. und 2. Grade gewählt sind und deshalb auch mitunter durch p_4 und P_2 bezeichnet werden sollen, welchen zwei Systeme von Gleichungen ersten Grades, bezüglich mit vier und zwei Unbekannten, x, y, z, t und X, Y entsprechen. — Multiplicirt man nun jede Gleichung des einen mit jeder Gleichung des anderen Systemes, so entstehen $4 \,.\, 2 = 8$ Gleichungen mit eben so viel Unbekannten:

$$xX, \; yX, \; zX, \; tX; \quad xY, \; yY, \; zY, \; tY,$$

und die Determinante $\varDelta$ dieser acht Gleichungen wird ohne Zweifel durch Pp theilbar sein. Es schien mir von Interesse, die übrigen Factoren, also den genauen Werth der auf solche Art entstehenden Determinanten zu erforschen.

Im Allgemeinen wird die auf die oben angegebene Weise aus P_M und p_m entstehende Determinante $\varDelta$ dadurch gebildet, dass man die eine Determinante, mit Weglassung der ihre Elemente zusammenfassenden Querstriche, so oftmal und in derselben Gruppirung anschreibt, als die Elemente der anderen angeben, und dann in jeder der so rangirten Determinanten jedes Element mit demjenigen Elemente der zweiten Determinante multiplicirt, welches durch die betreffende erste Determinante vertreten wurde. So erhält man z. B., indem man durch wirkliche Multiplication der Gleichungen, welche p_4 und P_2 entsprechen, die erwähnten acht Gleichungen bildet, für $\varDelta$ den Werth

$$\begin{vmatrix}
a_1A_1 & a_1B_1 & b_1A_1 & b_1B_1 & c_1A_1 & c_1B_1 & d_1A_1 & d_1B_1 \\
a_1A_2 & a_1B_2 & b_1A_2 & b_1B_2 & c_1A_2 & c_1B_2 & d_1A_2 & d_1B_2 \\
a_2A_1 & a_2B_1 & b_2A_1 & b_2B_1 & c_2A_1 & c_2B_1 & d_2A_1 & d_2B_1 \\
a_2A_2 & a_2B_2 & b_2A_2 & b_2B_2 & c_2A_2 & c_2B_2 & d_2A_2 & d_2B_2 \\
a_3A_1 & a_3B_1 & b_3A_1 & b_3A_1 & c_3A_1 & c_3B_1 & d_3A_1 & d_3B_1 \\
a_3A_2 & a_3B_2 & b_3A_2 & b_3A_2 & c_3A_2 & c_3B_2 & d_3A_2 & d_3B_2 \\
a_4A_1 & a_4B_1 & b_4A_1 & b_4A_1 & c_4A_1 & c_4B_1 & d_4A_1 & d_4B_1 \\
a_4A_2 & a_4B_2 & b_4A_2 & b_4A_2 & c_4A_2 & c_4B_2 & d_4A_2 & d_4B_2
\end{vmatrix}$$

Im Allgemeinen sind solche Determinanten von der Mm^{ten} Ordnung, aber von der $2Mm^{\text{ten}}$ Dimension, weshalb sie durch $\varDelta_{2Mm}$ bezeichnet werden mögen.

Um nun den Werth der oben entwickelten Determinante $\varDelta_{16}$ zu finden, kann man folgendermassen verfahren. Man multiplicirt die beiden ersten Colonnen mit $\frac{\partial p}{\partial a_1}$, wofür man jedoch auch wieder $\varDelta$ durch $\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\right)^2$ dividiren muss (der Exponent 2 giebt die Ordnung der Determinante P an), und addirt zu denselben bezüglich die beiden folgenden, die beiden nachfolgenden und die zwei letzten Colonnen, beziehungsweise multiplicirt mit $\frac{\partial p}{\partial b_1}, \frac{\partial p}{\partial c_1}, \frac{\partial p}{\partial d_1}$. Nun ist aber

$$a_n\frac{\partial p}{\partial a_r}+b_n\frac{\partial p}{\partial b_r}+c_n\frac{\partial p}{\partial c_r}+d_n\frac{\partial p}{\partial d_r}=p, \text{ oder }=0,$$

jenachdem $n \doteq r$, oder nicht $n=r$ *). Hiernach folgt:

$$\varDelta=\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\right)^2}\cdot\begin{vmatrix}
pA_1 & pB_1 & b_1A_1 & b_1B_1 & . & . & . & d_1B_1 \\
pA_2 & pB_2 & b_1A_2 & b_1B_2 & . & . & . & d_1B_2 \\
0 & 0 & b_2A_1 & b_2B_1 & . & . & . & d_2B_1 \\
0 & 0 & b_2A_2 & . & . & . & . & d_2B_2 \\
0 & 0 & b_3A_1 & . & . & . & . & d_3B_1 \\
0 & 0 & b_3A_2 & . & . & . & . & d_3B_2 \\
0 & 0 & b_4A_1 & . & . & . & . & d_4B_1 \\
0 & 0 & b_4A_2 & b_4A_2 & . & . & . & d_4B_2
\end{vmatrix}$$

was sich nach einem bekannten Satze auf

$$\varDelta=\frac{p^2\,.\,P}{\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\right)^2}\cdot\begin{vmatrix}
b_2A_1 & b_2B_1 & c_2A_1 & . & . & d_2B_1 \\
b_2A_2 & b_2B_2 & c_2A_2 & . & . & d_2B_2 \\
b_3A_1 & b_3B_1 & c_3A_1 & . & . & d_3B_1 \\
b_3A_2 & b_3B_2 & . & . & . & d_3B_2 \\
b_4A_1 & b_4P_1 & . & . & . & d_4B_1 \\
b_4A_2 & b_4B_2 & c_4A_2 & . & . & d_4B_2
\end{vmatrix}$$

---

*) *Vid. Jacobi, De formatione et proprietatibus determinantium, Crelle XXII.* oder Brioschi's Theorie der Determinanten.

reducirt*). Nun ist aber die letztere Determinante wieder von derselben Form, wie Δ, nur hat sie sich um 2, den Grad von P, erniedrigt, und ist p durch die Unterdeterminante $\frac{\partial p}{\partial a_1}$ ersetzt. Man findet daher ebenso

$$\Delta = \frac{p^2 P}{\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\right)^2 P}{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial a_1 \partial b_2}\right)^2} \cdot \begin{vmatrix} c_3 A_1 & c_3 B_1 & d_3 A_1 & d_3 B_1 \\ c_3 A_2 & c_3 B_2 & d_3 A_2 & d_3 B_2 \\ c_4 A_1 & c_4 B_1 & d_4 A_1 & d_4 B_1 \\ c_4 A_2 & c_4 B_2 & d_4 A_2 & d_4 B_2 \end{vmatrix}.$$

Die letzte Determinante ist wieder von derselben Form, wie die ursprüngliche, nur ist sie wieder von einer um 2 niedrigeren Ordnung, und ist $\frac{\partial p}{\partial a_1}$ wieder durch seine Unterdeterminante $\frac{\partial^2 p}{\partial a_1 \partial b_2}$ ersetzt. Fährt man so fort und berücksichtigt, dass in dem letzten Werthe

$$\Delta = \frac{p^2 P}{\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\right)^2 P}{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial a_1 \partial b_2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial a_1 \partial b_2}\right)^2 P}{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial a_1 \partial b_2 \partial c_3}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial a_1 \partial b_2 \partial c_3}\right)^2 P}{\left(\frac{\partial^4 p}{\partial a_1 \partial b_2 \partial c_3 \partial d_4}\right)^2}$$

der Nenner des letzten Factors $=1$ ist, so kommt

$$\Delta_{2.4.2} = p_4^{2} \cdot P_2^{4},$$

wobei aus dem unveränderlichen Gange der Rechnung erhellet, dass der Exponent von P mit der Ordnungszahl 4 von p übereinstimmt. — Eine ebenso gleichförmige Rechnung lässt sich aber auf die Determinanten p und P von beliebiger Ordnung m und M ausdehnen, also haben wir als Resultat der seitherigen Betrachtungen folgenden Satz:

$$\Delta_{2Mm} = p^M P^m.$$

Für $M = m$ würde die Determinante Δ die m^{te} Potenz des Produktes pP

*) Dieser im Brioschi'schen Werke nicht enthaltene, aber von Jacobi in dessen Abhandlung *de form. et propr. det.* bewiesene Satz heisst: Wenn in einer Determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr} a_{r+1,\,r+1} \ldots a_{nn}$ alle Elemente $=0$ sind, deren erster Index $>r$, und deren zweiter Index $<r$ ist, so ist dieselbe $= \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr} \cdot \Sigma \pm a_{r+1,\,r+1} \ldots a_{nn}$. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \alpha & \beta \\ d & e & f & \gamma & \delta \\ g & h & i & \varepsilon & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 0 & C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

Wir wollen denselben kurz beweisen. Das der Determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ entsprechende System von Gleichungen lässt sich in zwei Gruppen theilen, deren erste r Gleichungen enthält. Die andere Gruppe enthält aber alsdann nur noch $n-r$ Unbekannte, weil die Coefficienten der Uebrigen gleich 0 sind. Diese Unbekannten, welche den Nenner $\Sigma \pm a_{r+1,\,r+1} \ldots a_{nn}$ mit sich bringen, kann man nun in die ersten r Gleichungen substituiren, wodurch die ersten r Unbekannten den Nenner $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr} \cdot \Sigma \pm a_{r+1,\,r+1} \ldots a_{nn}$ gewinnen, welcher bis auf einen gewissen Factor mit dem Nenner $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ übereinstimmen muss. Beide Ausdrücke sind aber von derselben Dimension, also ist jener Factor constant und bestimmt sich durch Vergleichung der Hauptglieder der Determinanten $=1$.

darstellen, also ist hiermit zugleich ein Seitenstück zur Gauss'schen Formel für die Multiplication der Determinanten gewonnen. Man hat daher z. B.

$$\sqrt{\begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha & a\beta & b\beta \\ c\alpha & d\alpha & c\beta & d\beta \\ a\gamma & b\gamma & a\delta & b\delta \\ c\gamma & d\gamma & c\delta & d\delta \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

XXXIII. Ueber Mittelgrössen verschiedener Ordnungen. In Cauchy's *cours d'analyse* findet man auf Seite 454 den Satz, dass das arithmetische Mittel aus den n positiven Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ weniger beträgt, als die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate jener Zahlen, welche gleichfalls eine Mittelgrösse zwischen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ darstellt; da in diesem Theoreme eine Vergleichung von Mittelgrössen zweier verschiedener Ordnungen, nämlich der ersten und zweiten Ordnung, ausgesprochen ist, so liegt es nahe, allgemeiner die Ausdrücke

$$\frac{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}{n}, \quad \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\ldots+\lambda^2}{n}}, \quad \sqrt[3]{\frac{\alpha^3+\beta^3+\ldots+\lambda^3}{n}} \text{ u. s. w.}$$

zu betrachten und zu fragen, ob alle derartigen Grössen Mittelgrössen zwischen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ sind und welche Verhältnisse zwischen ihnen stattfinden. Unter den Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ sei α die kleinste, λ die grösste; setzen wir statt aller Grössen das eine Mal α, das andere Mal λ, so werden die oben betrachteten Ausdrücke das eine Mal zu klein $=\alpha$, das andere Mal zu gross $=\lambda$; sie sind daher sämmtlich zwischen α und λ enthalten, also Mittelgrössen zwischen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$.

Um über die Rangordnung der erwähnten Mittelgrössen Aufschluss zu erhalten, gehen wir von folgender identischer Gleichung aus:

$$\begin{aligned}
&(\alpha^p+\beta^p+\gamma^p+\delta^p+\ldots+\varkappa^p+\lambda^p)^2 \\
&= \alpha^{2p}+\beta^{2p}+\gamma^{2p}+\delta^{2p}+\ldots+\varkappa^{2p}+\lambda^{2p} \\
&+ 2\alpha^p\beta^p+2\alpha^p\gamma^p+2\alpha^p\delta^p+\ldots+2\alpha^p\lambda^p \\
&\qquad + 2\beta^p\gamma^p+2\beta^p\delta^p+\ldots+2\beta^p\lambda^p \\
&\qquad\qquad + 2\gamma^p\delta^p+\ldots+2\gamma^p\lambda^p \\
&\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \varkappa^p\lambda^p,
\end{aligned}$$

und transformiren dieselbe mittelst der bekannten Ungleichung

$$\sqrt{AB} < \tfrac{1}{2}(A+B).$$

Aus letzterer folgt nämlich für $A = a^{p-1}b^{p+1}$, $B = a^{p+1}b^{p-1}$,

$$2a^pb^p < a^{p-1}b^{p+1} + a^{p+1}b^{p-1},$$

und wenn man diese Ungleichung auf alle oben vorkommenden doppelten Producte anwendet, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&(\alpha^p+\beta^p+\gamma^p+\ldots+\lambda^p)^2 \\
&< (\alpha^{p-1}+\beta^{p-1}+\ldots+\lambda^{p-1})(\alpha^{p+1}+\beta^{p+1}+\ldots+\lambda^{p+1}),
\end{aligned}$$

d. i., wenn

1) $$S_p = \alpha^p + \beta^p + \gamma^p + \dots \lambda^p$$
gesetzt wird,

2) $$(S_p)^2 < S_{p-1} S_{p+1}.$$

Dieser ganz allgemeinen, für jedes p giltigen Relation ertheilen wir die elegantere Form

$$\frac{S_p}{S_{p-1}} < \frac{S_{p+1}}{S_p},$$

nehmen darin $p = 1, 2, 3$ etc. und gelangen somit zu folgenden Ungleichungen

3) $$\frac{S_1}{S_0} < \frac{S_2}{S_1} < \frac{S_3}{S_2} < \frac{S_4}{S_3} < \dots$$

worin $S_0 = n$ ist. Aus dem bekannten Satze, dass der Quotient

$$\frac{a + b + c + d + \dots}{A + B + C + D + \dots}$$

zwischen dem kleinsten und grössten der einzelnen Quotienten $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$, $\frac{c}{C}$, $\frac{d}{D}$ etc. enthalten ist, folgt nun augenblicklich, dass alle die Quotienten

$$\frac{S_1}{S_0}, \frac{S_2}{S_1}, \frac{S_3}{S_2}. \frac{S_4}{S_3} \dots$$

gewisse Mittelgrössen zwischen $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$ darstellen; die Reihe dieser Mittel fängt mit dem arithmetischen Mittel an und geht aufsteigend fort bis

$$Lim \frac{S_{p+1}}{S_p}$$

für $p = \infty$. Da λ grösser als $\alpha, \beta \dots \varkappa$ ist, so hat man

$$Lim \frac{S_{p+1}}{S_p} = Lim \left\{ \frac{\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{p+1} + \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{p+1} + \dots + \left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)^{p+1} + 1}{\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{p} + \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{p} + \dots + \left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)^{p} + 1} \lambda \right\} = \lambda;$$

die Reihe jener Mittel nähert sich also durch fortwährendes Wachsthum der grössten der gegebenen Zahlen.

Bezeichnen wir für den Augenblick die Quotienten $\frac{S_1}{n}, \frac{S_2}{n}, \frac{S_3}{n}$ etc. mit s_1, s_2, s_3 etc., so haben wir statt der Ungleichungen 2) die folgenden:

$$s_1 < \frac{s_2}{s_1} < \frac{s_3}{s_2} < \frac{s_4}{s_3} < \dots$$

oder

$$s_1 < \sqrt{s_2}, \quad s_2 < \sqrt{s_1 s_3}, \quad s_3 < \sqrt{s_2 s_4} \dots$$

Die erste Ungleichung ist die Cauchy'sche; in der zweiten setzen wir statt s_1 das zu grosse $\sqrt{s_2}$ und erhalten um so stärker

$$s_2 < \sqrt{\sqrt{s_2} \, . \, s_3}, \text{ woraus folgt } \sqrt{s_2} < \sqrt[3]{s_3};$$

setzen wir ferner in der dritten Ungleichung statt $\sqrt{s_2}$ das zu grosse $\sqrt[3]{s_3}$, so finden wir

$$s_3 < \sqrt[3]{s_3}\sqrt{s_4}, \text{ woraus } \sqrt[3]{s_3} < \sqrt[4]{s_4}.$$

Man übersieht augenblicklich, dass sich diese Substitutionen beliebig weit fortsetzen lassen, und dass sie zur folgenden Reihe von Ungleichungen führen

$$s_1 < \sqrt{s_2} < \sqrt[3]{s_3} < \sqrt[4]{s_4} < \dots$$

d. i.

$$4)\qquad \frac{S_1}{n} < \sqrt{\frac{S_2}{n}} < \sqrt[3]{\frac{S_3}{n}} < \sqrt[4]{\frac{S_4}{n}} < \dots$$

Die Grenze, welcher sich diese Mittelgrössen durch Wachsthum nähern, ist, wenn p unendlich wird,

$$= Lim \sqrt[p]{\frac{S_p}{n}} = Lim \left\{\lambda \sqrt[p]{\frac{1}{n}\left[\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^p + \left(\frac{\beta}{\lambda}\right) + \dots + \left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)^p + 1\right]}\right\},$$

d. h. gleich der grössten Zahl λ, wie man leicht findet.

Obschon unsere eigentliche Aufgabe gelöst ist, so wollen wir doch hierbei nicht stehen bleiben, sondern noch die Mittelgrössen der reciproken Ordnungen betrachten, nämlich die Ausdrücke

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \dots + \sqrt{\lambda}}{n}\right)^2 = \left(\frac{S_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \dots + \sqrt[3]{\lambda}}{n}\right)^3 = \left(\frac{S_{\frac{1}{3}}}{n}\right)^3 \text{ u. s. w.}$$

Nach Nr. 3) ist für jedes ganze positive p

$$\sqrt[p]{\frac{S_p}{n}} < \sqrt[p+1]{\frac{S_{p+1}}{n}}$$

oder

$$\left(\frac{\alpha^p + \beta^p + \dots + \lambda^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{\alpha^{p+1} + \beta^{p+1} + \dots + \lambda^{p+1}}{n}\right)^{\frac{1}{p+1}};$$

da $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$ ganz beliebige positive Grössen sind, so darf man setzen

$$\alpha = a^{\frac{1}{p(p+1)}}, \quad \beta = b^{\frac{1}{p(p+1)}}, \dots \lambda = l^{\frac{1}{p(p+1)}},$$

dies giebt, wenn man nachher beide Seiten der vorigen Ungleichung auf die $p(p+1)^{\text{te}}$ Potenz erhebt,

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{p+1}} + b^{\frac{1}{p+1}} + \dots + l^{\frac{1}{p+1}}}{n}\right)^{p+1} < \left(\frac{a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}} + \dots + l^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p,$$

d. i., wenn wieder $\alpha, \beta \dots \lambda$ für $a, b \dots l$ geschrieben wird,

$$\left(\frac{S_{\frac{1}{p+1}}}{n}\right)^{p+1} < \left(\frac{S_{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p.$$

Demnach hat man folgende neue Reihe von Ungleichungen

$$5)\qquad \dots < \left(\frac{S_{\frac{1}{4}}}{n}\right)^4 < \left(\frac{S_{\frac{1}{3}}}{n}\right)^3 < \left(\frac{S_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2 < \frac{S_1}{n},$$

welche gewissermaassen die Rückverlängerung der vorigen Reihe darstellt.

Von besonderem Interesse ist die Grenze, welcher sich die betrachteten Mittelgrössen bei ihrer fortwährenden Abnahme nähern, und die wir vorläufig mit g bezeichnen wollen, nämlich

$$g = Lim\left(\frac{S_{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p = Lim\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{p}} + \beta^{\frac{1}{p}} + \ldots + \lambda^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p, \text{ (für } p = \infty).$$

Da nach einem bekannten Satze

$$Lim\left[p\left(\alpha^{\frac{1}{p}} - 1\right)\right] = l\alpha$$

ist, so darf man für irgend ein endliches p

$$p\left(\alpha^{\frac{1}{p}} - 1\right) = l\alpha + \alpha' \quad \text{oder} \quad \alpha^{\frac{1}{p}} = 1 + \frac{l\alpha + \alpha'}{p}$$

setzen, wo α' eine zwar nicht genau bekannte Grösse bezeichnet, von welcher man aber wenigstens weiss, dass sie bei unendlich wachsenden p gegen die Grenze Null convergirt; auf gleiche Weise kann man mit $\beta, \gamma \ldots \lambda$ verfahren und erhält

$$g = Lim\left\{\left(1 + \frac{l(\alpha\beta\ldots\lambda) + \alpha' + \beta' + \ldots + \lambda'}{np}\right)^p\right\}$$

oder kürzer, wenn

$$\sqrt[n]{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda} = \mu, \quad \frac{\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots + \lambda'}{n} = \varrho'$$

gesetzt wird,

$$g = Lim\left\{\left(1 + \frac{l\mu + \varrho'}{p}\right)^p\right\}.$$

Unter Anwendung des bekannten Satzes

$$Lim\left\{\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p\right\} = e^z$$

und unter Rücksicht auf den Umstand, dass ϱ' verschwindet, wenn $p = \infty$ wird, erhält man jetzt sehr leicht

$$g = e^{l\mu} = \mu = \sqrt[n]{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda};$$

die Grenze g ist also das **geometrische Mittel** aus den gegebenen Zahlen. Alles zusammen haben wir folgende unendliche Reihe von Ungleichungen

$$6) \quad \begin{cases} \sqrt[n]{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda} < \ldots\ldots < \left(\frac{S_{\frac{1}{3}}}{n}\right)^3 < \left(\frac{S_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2 < \frac{S_1}{n}, \\ \frac{S_1}{n} < \left(\frac{S_2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{S_3}{n}\right)^{\frac{1}{3}} < \ldots < \lambda, \end{cases}$$

welche vom geometrischen Mittel aus, durch das arithmetische Mittel hindurch, bis zur grössten der gegebenen Zahlen aufsteigt.

Im Vorigen blieb die Anzahl (n) der vorhandenen Grössen eine endliche und unveränderliche Zahl; wir wollen nun dieselbe ins Unendliche wachsen lassen. Zu diesem Zwecke denken wir uns y als eine Function

der unabhängigen Variabelen x, etwa $y=f(x)$, bezeichnen mit Δx eine vor der Hand beliebige Grösse, setzen

$y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_0+\Delta x)$, $y_2=f(x_0+2\Delta x)$ $\ldots y_n=f(x_0+n\Delta x)$

und wenden die obigen Sätze auf den Fall

$$\alpha=y_1,\quad \beta=y_2,\quad \gamma=y_3,\quad \ldots\lambda=y_n$$

an, indem wir gleichzeitig

$$x_0+n\Delta x=X \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n}=\frac{\Delta x}{X-x_0}$$

nehmen und n unendlich wachsen lassen. Zufolge der summatorischen Bedeutung des bestimmten Integrales wird

$$Lim\,\frac{S_1}{n}=Lim\,\frac{\Sigma y\Delta x}{X-x_0}=\frac{1}{X-x_0}\int_{x_0}^{X} y\,dx$$

und dem entsprechend

$$7)\qquad Lim\,\frac{S_p}{n}=\frac{1}{X-x_0}\int_{x_0}^{X} y^p\,dx.$$

Aus λ wird ferner das grösste der vorhandenen y, welches Y heissen möge; endlich ist

$$8)\qquad Lim\sqrt[n]{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda}=Lim\, e^{\frac{l\alpha+l\beta+\ldots+l\lambda}{n}}$$

$$=Lim\, e^{\frac{\Sigma ly\Delta x}{X-x_0}}=e^{\frac{1}{X-x_0}\int_{x_0}^{X} ly\,dx}.$$

Vermöge der Gleichungen 7) und 8) ergiebt sich aus Nr. 5) eine neue Reihe von Ungleichungen; man kann in dieser ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $x_0=0$ und $X=1$ setzen, weil sich jedes bestimmte Integral durch passende Transformationen auf die Grenzen 0 und 1 bringen lässt. Die Reihe von Ungleichungen ist dann

$$9)\quad \left\{\begin{array}{l} e^{\int_0^1 ly\,dx}<\ldots<\left(\int_0^1 y^{\frac{1}{3}}dx\right)^3<\left(\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}dx\right)^2<\int_0^1 y\,dx,\\[2ex] \int_0^1 y\,dx<\left(\int_0^1 y^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\int_0^1 y^3dx\right)^{\frac{1}{3}}<\ldots<Y;\end{array}\right.$$

die einzige Bedingung, an welche die Giltigkeit dieser Relationen geknüpft ist, besteht darin, dass $y=f(x)$ innerhalb des Intervalles $x=0$ bis $x=1$ positiv bleiben muss. Specieller hat man für ein positives ganzes p

$$10)\qquad \int_0^1 y^{\frac{1}{p}}dx<\left(\int_0^1 y\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

11) $$\int_0^1 y^p\,dx > \left(\int_0^1 y\,dx\right)^p;$$

ferner

12) $$\int_0^1 l y\,dx < l\int_0^1 y\,dx,$$

oder für $ly = z$

13) $$\int_0^1 e^z\,dx > e^{\int_0^1 z\,dx}.$$

Diese eigenthümlichen Sätze scheinen nicht bekannt zu sein und dürften bei manchen Untersuchungen über die Werthe bestimmter Integrale gute Dienste leisten.

Wir wollen noch zeigen, dass sich an die unter Nr. 4) angegebenen Ungleichungen eine weitere Betrachtung anknüpfen lässt. Bezeichnen wir nämlich mit $C_1, C_2, C_3 \ldots$ die Combinationen zu je $1, 2, 3 \ldots$ Elementen ohne Wiederholungen aus den Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$, wobei jede Combination als Product betrachtet wird, so ist

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)$$
$$= x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} - C_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n C_n$$

und bekanntlich existiren zwischen $C_1, C_2, C_3 \ldots$ einerseits und $S_1, S_2, S_3 \ldots$ andererseits die folgenden, schon von Newton aufgefundenen Gleichungen:

$$0 = S_1 - C_1,$$
$$0 = S_2 - C_1 S_1 + 2C_2,$$
$$0 = S_3 - C_1 S_2 + C_2 S_1 - 3C_3,$$
$$0 = S_4 - C_1 S_3 + C_2 S_2 - C_3 S_1 + 4C_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Entwickelt man hieraus $S_1, S_2\ S_3, \ldots$ nämlich

$$S_1 = C_1,$$
$$S_2 = C_1^2 - 2C_2,$$
$$S_3 = C_1^3 - 3C_1C_2 + 3C_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

und substituirt diese Werthe in die Ungleichungen 3), so erhält man eine neue Reihe von Ungleichungen, welche sich auf $C_1, C_2, C_3, \ldots$ beziehen. Wir wollen namentlich die erste dieser Relationen näher betrachten; sie lautet

13) $$\frac{C_1}{n} < \sqrt{\frac{C_1^2 - 2C_2}{n}} \text{ oder } (n-1)C_1^2 > 2nC_2,$$

und findet immer statt, sobald die Gleichung

$$x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} - C_3 x^{n-3} + \ldots = 0$$

lauter reelle positive Wurzeln besitzt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Gleichung der reciproken Wurzeln

$$1 - C_1 z + C_2 z^2 - C_3 z^3 + \ldots = 0$$

ebenfalls nur reelle und positive Wurzeln hat. Unter diesen Umständen haben aber auch alle derivirten Gleichungen, nämlich

$$\begin{gathered} -1\,C_1 + 2\,C_2\,z - 3\,C_3\,z^2 + 4\,C_4\,z^3 - \ldots = 0, \\ 1\,.\,2\,C_2 - 2\,.\,3\,C_3\,z + 3\,.\,4\,C_4\,z^2 - \ldots = 0, \\ -1\,.\,2\,.\,3\,C_3 + 2\,.\,3\,.\,4\,C_4\,z - 3\,.\,4\,.\,5\,C_5\,z^2 + \ldots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

nur reelle und positive Wurzeln, wie sich selbst elementar beweisen lässt. Setzt man wieder $z = \frac{1}{x}$, so kommt dieselbe Eigenschaft den folgenden Gleichungen zu:

$$\begin{gathered} x^{n-1} - \frac{2\,C_2}{1\,C_1}\,x^{n-2} + \frac{3\,C_3}{1\,C_1}\,x^{n-3} - \ldots = 0, \\ x^{n-2} - \frac{2\,.\,3\,C_3}{1\,.\,2\,C_2}\,x^{n-3} + \frac{3\,.\,4\,C_4}{1\,.\,2\,C_2}\,x^{n-4} - \ldots = 0, \\ x^{n-3} - \frac{2\,.\,3\,.\,4\,C_4}{1\,.\,2\,.\,3\,C_3}\,x^{n-4} + \ldots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

und folglich muss für sie, *mutatis mutandis*, auch der in Nr. 13) erwähnte Satz gelten; man erhält so die Ungleichungen

$$\begin{gathered} (n-2)\left(\frac{2\,C_2}{C_1}\right)^2 > 2(n-1)\,\frac{3\,C_3}{C_1} \text{ oder } 2(n-2)\,C_2^2 > 3(n-1)\,C_1\,C_3, \\ (n-3)\left(\frac{3\,C_3}{C_2}\right)^2 > 2(n-2)\,\frac{3\,.\,4\,C_4}{2\,C_2} \text{ oder } 3(n-3)\,C_3^2 > 4(n-2)\,C_2\,C_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

deren Fortschrittsgesetz unmittelbar ersichtlich ist. Zu denselben Resultaten gelangt auch Euler im 3. Theile §. 323 seiner Differentialrechnung (pag. 131 der Michelsen'schen Uebersetzung) und benutzt sie als Kennzeichen für die Realität der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Jene Ungleichungen haben aber noch eine andere sehr elegante Bedeutung, welche erst neuerdings von Herrn Professor Fort bemerkt worden ist.

Dividirt man nämlich jede der Combinationssumme $C_1, C_2, C_3, \ldots$ durch die Anzahl der in ihr enthaltenen Summanden und setzt

$$\frac{C_1}{(n)_1} = c_1, \quad \frac{C_2}{(n)_2} = c_2, \quad \ldots \frac{C_n}{(n)_n} = c_n,$$

so ist c_1 der Mittelwerth einer Union (das arithmetische Mittel), c_2 der Mittelwerth einer Binion etc., und indem man für $C_1, C_2, C_3, \ldots$ die Ausdrücke $(n)_1 c_1$, $(n)_2 c_2$, $(n)_3 c_3, \ldots$ substituirt, erhält man statt der vorigen Ungleichungen die folgenden

$$c_1^2 > c_2, \quad c_2^2 > c_1 c_3, \quad c_3^2 > c_2 c_4, \ldots$$

oder

$$14) \qquad c_1 > \frac{c_2}{c_1} > \frac{c_3}{c_2} > \frac{c_4}{c_3} > \ldots > \frac{c_n}{c_{n-1}}.$$

Wie man leicht bemerken wird, sind diese Brüche zwischen α und λ enthalten, also Mittelgrössen; die Reihe derselben fängt mit dem **arithmetischen** Mittel c_1 an und schliesst mit dem **harmonischen** Mittel

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{n\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Substituirt man jede der Ungleichungen 14) in die darauf folgende, wie es früher mit den Ungleichungen für s_1, s_2, s_3 etc. geschehen ist, so gelangt man noch zu folgenden Beziehungen

$$c_1 > \sqrt{c_2} > \sqrt[3]{c_3} > \sqrt[4]{c_4} > \ldots > \sqrt[n]{c_n}$$

oder

$$15)\qquad \frac{C_1}{(n)_1} > \sqrt{\frac{C_2}{(n)_2}} > \sqrt[3]{\frac{C_3}{(n)_3}} > \ldots > \sqrt[n]{\frac{C_n}{(n)_n}}.$$

Den Anfang bildet hier wieder das arithmetische Mittel, den Schluss dagegen das **geometrische** Mittel.

Obschon der vorstehende Beweis der beiden Fort'schen Sätze in ein elementares Gewand gekleidet werden kann und wegen der leicht erweisbaren Grundformeln

$$S_1^2 < n S_2, \quad S_1 = C_1, \quad S_2 = C_1^2 - 2C_2$$

nicht einmal sehr complicirt ausfällt, so kann man doch nicht leugnen, dass er eigentlich rein analytischer Natur ist; es wäre daher nicht überflüssig und jedenfalls interessant, eine directe Ableitung zu sehen, welche von der Natur der Sache, d. h. von combinatorischen Gründen ihren Ausgang nähme.

SCHLÖMILCH.

XXXIV. Ueber die Construction von Bögen rectificabler Differenz auf der gewöhnlichen Fusspunkten-Curve der Hyperbel. Eine Hyperbel sei gegeben durch die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu beziehende Gleichung:

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder durch ihre Polargleichung

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2}.$$

Der Ausdruck des von dem Scheitelpunkt gerechneten Bogens dieser Hyperbel geht durch die bekannte Substitution

$$2)\qquad y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tang\psi$$

oder, wenn man Polarcoordinaten anwendet, durch die gleichbedeutende Substitution

3) $$\sin\varphi^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}\cdot\frac{tang\,\psi^2}{a^2+b^2\,tang\,\psi^2}$$

über in

$$s = \frac{b^2}{c}F(k,\psi) - cE(k,\psi) + c\,\varDelta(\psi)\,tang\,\psi,$$

wo $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $k = \frac{a}{c}$, $\varDelta(\psi) = \sqrt{1-k^2\sin\psi^2}$ und durch $F(k,\varphi)$ und $E(k,\varphi)$ elliptische Integrale erster und zweiter Art bezeichnet sind.

Seien nun s_0 und s_1 zwei Bögen auf der Hyperbel 1), von denen der erste von $\psi = 0$ bis $\psi = \psi_0$, der zweite von $\psi = \psi_1$ bis $\psi = \psi_2$ sich erstreckt (man nehme $\psi_0 > 0$, $\psi_2 > \psi_1 > 0$), so ist

$$s_0 = \frac{b^2}{c}F(k,\psi_0) - cE(k,\psi_0) + c\,\varDelta(\psi_0)\,tang\,\psi_0$$

$$s_1 = \begin{cases} \frac{b^2}{c}F(k,\psi_2) - cE(k,\psi_2) + c\,\varDelta(\psi_2)\,tang\,\psi_2 \\ -\frac{b^2}{c}F(k,\psi_1) + cE(k,\psi_1) - c\,\varDelta(\psi_1)\,tang\,\psi_1. \end{cases}$$

Die Differenz $(s_0 - s_1)$ wird rectificabel sein, sobald die Grössen ψ_0, ψ_1, ψ_2 folgender Gleichung genügen:

$$\cos\psi_0 = \cos\psi_1\cos\psi_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2\,\varDelta(\psi_0).$$

Nimmt man an, dass den Werthen ψ_0, ψ_1, ψ_2 der Reihe nach die Werthpaare (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) entsprechen, so lässt sich die letzte Gleichung vermöge 2) folgendermassen schreiben

4) $$1 = \frac{b^4\lambda^2 + c^2\mu^2 y_1 y_2}{b^2\sqrt{(b^4+c^2y_1^2)(b^4+c^2y_2^2)}},$$

wo $\sqrt{b^4+c^2y_0^2} = \lambda^2$, $\sqrt{b^4+b^2y_0^2} = \mu^2$ gesetzt ist.

Die Gleichungen der in den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gezogenen Tangenten der Hyperbel 1) sind beziehungsweise

5) $$\begin{cases} \frac{x_1\xi}{a^2} - \frac{y_1\eta}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2\xi}{a^2} - \frac{y_2\eta}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen 4) und 5) mit Hilfe von 1) die Grössen x_1, x_2, y_1, y_2, so erhält man die Gleichung

6) $$\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+b^2}\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\mu^2+b^2}{\lambda^2+b^2}\frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

welche eine mit 1) confocale Hyperbel ausdrückt als Ort des Durchschnittspunktes der in den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Hyperbel 1) gezogenen Tangenten. Liegt daher die Hyperbel 6) gezeichnet vor, so hat es keine Schwierigkeit, auf der Hyperbel 1) beliebig viele Bögen von rectificabler Differenz zu construiren.

Diese bereits bekannte Relation zwischen confocalen Hyperbeln giebt nun ein Mittel an die Hand, um auch auf der gewöhnlichen Fusspunkten-

Curve einer gegebenen Hyperbel Bögen von rectificabler Differenz geometrisch zu bestimmen. Sei nämlich

$$7) \qquad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

die Gleichung der gegebenen als Basis dienenden Hyperbel, so erhält man mit Beibehaltung des Coordinatensystems für ihre gewöhnliche Fusspunkten-Curve (deren Pol mit dem Mittelpunkt der Hyperbel zusammenfällt) die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

oder, indem man zu Polarcoordinaten übergeht, die Gleichung

$$8) \qquad \varrho^2 = b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2.$$

Der Ausdruck des von $\varphi = 0$ gerechneten Bogens der Curve 8) ist

$$\sigma = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{\frac{b^4 + (a^4 - b^4)\sin\varphi^2}{b^2 - (a^2+b^2)\sin\varphi^2}}.$$

Durch die schon oben angewandte Substitution 3)

$$\sin\varphi^2 = \frac{b^4}{c^2} \frac{\tang\psi^2}{a^2 + b^2 \tang\psi^2}$$

geht derselbe über in

$$\sigma = \frac{b^3}{ac} \int_0^\psi \frac{1}{1 + \frac{b^2-a^2}{a^2}\sin\psi^2} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}\sin\psi^2}} = \frac{b^3}{ac}\, \Pi(p, k, \psi),$$

wo $\frac{b^2-a^2}{a^2} = p$ gesetzt, unter $\Pi(p, k, \psi)$ das elliptische Integral dritter Art verstanden ist und die schon zu Anfang gewählten Bezeichnungen benutzt sind.

Sind σ_0 und σ_1 zwei Bögen der Curve 8), von denen der erste wieder, wie oben s_0, sich von $\psi = 0$ bis $\psi = \psi_0$, der zweite, wie s_1, sich von $\psi = \psi_1$ bis $\psi = \psi_2$ erstreckt: so hat man, damit die Differenz $(\sigma_0 - \sigma_1)$ rectificabel sei, auch wieder die obige Bedingungsgleichung 4) — d. h. die von dem gemeinsamen Mittelpunkt der Curven 1) und 8) gezogenen Radienvectoren begrenzen gleichzeitig auf beiden Curven Bögen von rectificabler Differenz. Bögen von der erwähnten Eigenschaft lassen sich auf der Hyperbel 1) nach dem Obigen leicht geometrisch bestimmen, also auch auf der Curve 8).

Die Hyperbel 1) ist mit der Basis 7) der Curve 8) concentrisch. Die gleichnamigen Achsen beider Hyperbeln stimmen der Richtung nach überein; der Grösse nach ist die erste Achse der Hyperbel 1) gleich der zweiten der Hyperbel 7) und umgekehrt. Wird in den vorstehenden Gleichungen überall $a = b$, so geht die Gleichung 8) über in die Gleichung der Lemniscate. Die Gleichung 7) der Basis wird identisch mit der Gleichung 1), das elliptische Integral dritter Art $\Pi(p, k, \psi)$ geht über in eines der ersten Art und man erhält ohne Weiteres die von Cauchy gegebene und in den

Sitzungs-Berichten der Pariser Akademie vom 21. Juli 1845 mitgetheilte Regel zur Construction gleicher Bögen der Lemniscate.

Berlin. C. WIEGERS.

XXXV. Ueber Sectoren und Segmente der Ellipse mit Rücksicht auf conjugirte Durchmesser. Von Dr. WALTHER ZEHME, Director der Gewerbeschule zu Hagen. Ein Brief von Leibnitz an Hugens berührt einen Satz über die Sectoren der Kegelschnitte, welcher in neuerer Zeit mehrfache Bearbeitungen und durch Herrn Professor Grunert eine wesentliche Erweiterung erfahren hat — vergl. Archiv für Mathematik und Physik, Band 23, Seite 385, 440, 478; die vorliegende Zeitschrift für Mathematik und Physik, I, 177 —. So interessant die citirten Abhandlungen über den Gegenstand sind, so können sie doch bei elementaren Vorträgen über Kegelschnitte nicht benutzt werden, da ihre Hauptresultate durch Integrationen gewonnen worden sind. Das Folgende enthält neben einem elementaren und, wie ich glaube, einfachen Nachweise des verallgemeinerten Satzes von Leibnitz, soweit sich dieser Satz auf die Ellipse bezieht, eine anderweite synthetische Behandlung der Ellipsen-Sectoren und Segmente.

Zwei vorbereitende Sätze:

1) Ist F_1 der Flächeninhalt einer Figur in einer Ebene E_1 und F der Flächeninhalt ihrer Projection auf eine beliebige Ebene E, ist φ der Neigungswinkel der Ebenen E und E_1, so findet bekanntlich die Gleichung statt:

$$F = F_1 \cos\varphi.$$

2) Sind F_1 und G_1 die Flächeninhalte zweier in einer Ebene liegender Figuren, F und G die Flächeninhalte ihrer Projectionen auf eine zweite Ebene, so verhalten sich die Flächeninhalte F_1 und G_1 der Figuren, wie die Flächeninhalte F und G ihrer Projectionen.

Der Satz folgt unmittelbar aus 1).

3) Construction für die nächsten Entwickelungen.

Gegeben sei eine Ellipse $A_1 C_1 B_1 D_1$ (s. Taf. III, Fig. 1). Ihr Mittelpunkt sei O_1; $A_1 B_1 = 2a_1$ und $C_1 D_1 = 2b_1$ seien conjugirte Durchmesser; $O_1 F_1 = x_1$ und $E_1 F_1 = y_1$ Coordinaten, bezogen auf die conjugirten Durchmesser. Die Ellipse projicire man so auf eine Ebene, dass die Projection ein Kreis ist. Die Projectionen der conjugirten Ellipsendurchmesser sind die Kreisdurchmesser AB und CD. Man kann sich leicht überzeugen, dass der Halbmesser des Kreises gleich der halben kleinen Achse b der Ellipse ist. Die halbe grosse Achse der Ellipse sei a. Ist φ der Neigungswinkel der Ellipsen- und Kreisebene, so ist

$$b = a \cos\varphi.$$

Die Projection einer durch C_1 gelegten, dem Durchmesser $A_1 B_1$ parallelen Ellipsentangente ist die Kreistangente durch C, welche dem Kreisdurchmesser AB parallel ist. Da diese Kreistangente senkrecht auf dem

Durchmesser CD steht, so steht auch der Durchmesser AB senkrecht auf CD. Demnach sind die Projectionen zweier conjugirter Ellipsendurchmesser A_1B_1 und C_1D_1 zwei sich rechtwinklig schneidende Kreisdurchmesser AB und CD.

Ist $EF = y$ die Projection der Ellipsenordinate y_1, so ist y parallel CD wie y_1 parallel C_1D_1 ist. Demnach ist y Kreisordinate bezogen auf die sich rechtwinklig schneidenden Kreisdurchmesser AB und CD.

ω sei der Neigungswinkel der positiven conjugirten Halbmesser a_1 und b_1, α der Neigungswinkel der Abscissen x und x_1, β der Neigungswinkel der Ordinaten y und y_1.

Entwickelung der Ausdrücke für Ellipsensectoren, bezogen auf conjugirte Durchmesser. Die Spitze der Sectoren liege im Ellipsenmittelpunkte.

4) Es sei b (s. Taf. III, Fig. 2) der Halbmesser eines Kreises. Es seien ferner $OF = x$ und $EF = y$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes E der Kreisperipherie, welche durch die x-Achse in den Punkten C und D geschnitten werden möge. $ET = CT = v$ sind zwei Tangenten in den Punkten E und C. Man ziehe noch ED, EO und TO.

Es ergiebt sich nun ohne Weiteres

$$\angle EOF = 2\angle EDF = 2\angle COT.$$

Nun ist

$$\sin EOF = \frac{y}{b}, \text{ also } \angle EOF = \operatorname{arc\,sin} \frac{y}{b},$$

$$\operatorname{tang} EDF = \frac{y}{b+x}, \text{ also } \angle EDF = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{b+x} = \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{b-x}{b+x}},$$

$$\operatorname{tang} COT = \frac{v}{b}, \text{ also } \angle COT = \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{b}.$$

Setzen wir diese Werthe in obige Winkelgleichung, so ist

$$\text{I. } \operatorname{arcsin} \frac{y}{b} = 2\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{b+x} = 2\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{b-x}{b+x}} = 2\operatorname{arc\,tang} \frac{v}{b}.$$

Diese Gleichungen gelten der Entwickelung gemäss für die positiven Abscissen x zwischen 0 und b. Dabei ist $\operatorname{arc\,sin} \frac{y}{b}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen.

Wird die Abscisse x negativ, liegt also der dazu gehörige kleinste positive Werth von $\operatorname{arc\,sin} \frac{y}{b}$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{II. } \operatorname{arc\,sin} \frac{y}{b} = 2\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{b-x} = 2\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} = 2\operatorname{arc\,tang} \frac{v}{b}.$$

5) Ist ω der Neigungswinkel der conjugirten Halbmesser a_1 und b_1 einer Ellipse, sind a und b die halben Hauptachsen, so findet die Gleichung statt:

$$a_1 b_1 \sin \omega = a b.$$

Man lese die Construction 3 (s. Taf. III, Fig. 1) nach.

Ergänzt man nämlich die conjugirten Halbmesser $O_1 A_1$ und $O_1 C_1$ zu einem Parallelogramm, so ist dessen Inhalt

$$P_1 = a_1 b_1 \sin \omega.$$

Die Projection dieses Parallelogramms ist ein Quadrat vom Inhalte

$$P = b^2.$$

Setzen wir diese Werthe in die nach 1) geltende Gleichung

$$P_1 \cos \varphi = P,$$

so ergiebt sich

$$a_1 b_1 \sin \omega \, . \, \cos \varphi = b^2,$$

also nach 3)

$$a_1 b_1 \sin \omega \, . \, \frac{b}{a} = b^2$$

oder

$$a_1 b_1 \sin \omega = a b.$$

6) Berechnung eines Ellipsensectors, welcher dem positiven Theile a_1 eines von zwei conjugirten Durchmessern anliegt und seine Spitze im Ellipsenmittelpunkte hat.

Wir nehmen wiederum die Construction 3 (s. Taf. III, Fig. 1) zu Hilfe und setzen die unter dieser Nummer aufgeführten Sätze voraus.

Der Ellipsensector sei $A_1 O_1 E_1 = S_1$, dem positiven Halbmesser $O_1 A_1 = a_1$ anliegend.

Die Projection dieses Ellipsensectors ist der Kreissector $AOE = S$; $A_1 T_1 = v_1$ und $E_1 T_1$ seien zwei Ellipsentangenten in den Punkten A_1 und E_1; $AT = ET = v$ zwei Kreistangenten in den Punkten A und E, zugleich die Projectionen der Ellipsentangenten. Nun ist nach 1)

$$S_1 = \frac{S}{\cos \varphi} = \frac{a S}{b} \text{ (nach 3).}$$

Da aber

$$S = \frac{\text{Bogen } AE \, . \, b}{2} = \frac{b^2 \, . \, \text{Winkel } AOE}{2} = \frac{b^2 \, . \, \arcsin \frac{y}{b}}{2}$$

ist, so folgt durch Substitution

$$S_1 = \frac{ab \, . \, \arcsin \frac{y}{b}}{2}$$

also nach 4)

$$S_1 = \frac{ab \, . \, \arcsin \frac{y}{b}}{2} = ab \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{b-x}{b+x}} = ab \, . \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{b} \, .$$

Nun ist

$$ab = a_1 b_1 \sin\omega \text{ (nach 5)},$$

ferner

$$\frac{y}{b} = \frac{y_1}{b_1} \text{ (nach 3)},$$

und

$$\frac{b-x}{b+x} = \frac{a_1 \cos\alpha - x_1 \cos\alpha}{a_1 \cos\alpha + x_1 \cos\alpha} \text{ (nach 3)} = \frac{a_1 - x_1}{a_1 + x_1},$$

endlich

$$\frac{v}{b} = \frac{v_1 \cos\beta}{b_1 \cos\beta} \text{ (nach 3)} = \frac{v_1}{b_1}.$$

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke für S_1, so ist

$$\text{I.} \left\{ \begin{aligned} S_1 = \frac{a_1 b_1 \sin\omega \,.\, \operatorname{arc\,sin} \frac{y_1}{b_1}}{2} &= a_1 b_1 \sin\omega \,.\, \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a_1 - x_1}{a_1 + x_1}} \\ &= a_1 b_1 \sin\omega \,.\, \operatorname{arc\,tang} \frac{v_1}{b_1}. \end{aligned} \right.$$

Diese Ausdrücke gelten (nach 4) für eine positive Abscisse x_1 und für $\operatorname{arc\,sin} \frac{y_1}{b_1}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Wird die Abscisse x_1 negativ, liegt also der kleinste positive dazu gehörige Werth von $\operatorname{arc\,sin} \frac{y_1}{b_1}$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, so ist

$$\text{II.} \left\{ \begin{aligned} S_1 = \frac{a_1 b_1 \sin\omega \,.\, \operatorname{arc\,sin} \frac{y_1}{b_1}}{2} &= a_1 b_1 \sin\omega \,.\, \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a_1 + x_1}{a_1 - x_1}} \\ &= a_1 b_1 \sin\omega \,.\, \operatorname{arc\,tang} \frac{v_1}{b_1}. \end{aligned} \right.$$

Dieses sind die von Herrn Professor Grunert durch Integration gefundenen Ausdrücke für einen Ellipsensector, bezogen auf conjugirte Durchmesser.

Berechnung solcher Ellipsen-Sectoren und Segmente, deren Spitze nicht im Mittelpunkte der Ellipse liegt.

7) Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Ellipsensectors zu berechnen, dessen Spitze und eine Seite in den positiven Halbmesser a_1 fällt. Die Spitze des Sectors habe vom Ellipsenmittelpunkte den Abstand m_1.

Auflösung. $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$ (s. Taf. III, Fig. 3) sind conjugirte Durchmesser, $O_1 A_1 = a_1$ und $O_1 C_1 = b_1$ ihre positiven Theile. Die Spitze F_1 des Sectors liege beliebig in $O_1 A_1$ und habe vom Ellipsenmittelpunkte den Abstand m_1. Der eine Eckpunkt des Sectors falle in den Scheitel A_1 und der zweite Eckpunkt vorläufig zwischen die positiven Scheitel A_1 und C_1. Nun ist

$$\text{Sector } A_1 F_1 E_1 = \text{Sector } A_1 O_1 E_1 - \triangle F_1 O_1 E_1,$$

also nach 6)

$$= \frac{a_1 b_1 \sin \omega \,.\, arc \sin \frac{y_1}{b_1}}{2} - \frac{m_1 y_1 \sin \omega}{2},$$

also

$$\text{Sector } A_1 F_1 E_1 = \frac{b_1 \sin \omega}{2} \left(a_1 \; arc \sin \frac{y_1}{b_1} - m_1 \frac{y_1}{b_1} \right).$$

Liegt E_1 zwischen den positiven Scheiteln A_1 und C_1, wie wir angenommen haben, so ist $arc \sin \frac{y_1}{b_1}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen, liegt dagegen E_1 zwischen B_1 und C_1, so liegt $arc \sin \frac{y}{b}$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π.

8) **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Ellipsensectors zu berechnen, dessen Spitze im negativen Halbmesser a_1 liegt und dessen eine Seite den positiven Halbmesser a_1 vollständig in sich aufnimmt.

Auflösung. $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$ (s. Taf. III, Fig. 4) sind conjugirte Durchmesser; $O_1 A_1 = a_1$ und $O_1 C_1 = b_1$ ihre positiven Hälften. Die Spitze F_1 des Sectors liege beliebig in der negativen Hälfte des Durchmessers $2a_1$ und habe vom Ellipsenmittelpunkt den Abstand m_1. Dieser Fall unterscheidet sich von dem unter 7) behandelten nur dadurch, dass m_1 negativ ist. Es ergiebt sich danach ohne Weiteres

$$\text{Sector } A_1 F_1 E_1 = \frac{b_1 \sin \omega}{2} \left(a_1 \; arc \sin \frac{y_1}{b_1} + m_1 \frac{y_1}{b_1} \right).$$

Liegt E_1 zwischen den positiven Scheiteln A_1 und C_1, so ist $arc \sin \frac{y_1}{b_1}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, liegt E_1 dagegen zwischen B_1 und C_1, so ist $arc \sin \frac{y_1}{b_1}$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π zu nehmen.

9) **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Segments zu berechnen, dessen einer Eckpunkt in den positiven Endpunkt A_1 eines von zwei conjugirten Durchmessern fällt.

Auflösung. Es soll das Ellipsensegment $A_1 E_1$ (s. Taf. III, Fig. 3) berechnet werden. Setzen wir in der Gleichung von 7) den Abstand $m_1 = a_1$, so ergiebt sich ohne Weiteres

$$\text{Segment } A_1 E_1 = \frac{a_1 b_1 \sin \omega}{2} \left(arc \sin \frac{y_1}{a_1} - \frac{y_1}{b_1} \right).$$

Hierin ist $arc \sin \frac{y_1}{b_1}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π zu nehmen, jenachdem der Eckpunkt E_1 des Segments zwischen den positiven Scheiteln A_1 und C_1 oder zwischen B_1 und C_1 liegt.

10) **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Sectors zu berechnen, dessen einer Eckpunkt in dem positiven Hauptscheitel A (Endpunkt der grossen Achse) und dessen Spitze in dem positiven Brennpunkte F liegt.

Auflösung. Die Hauptachsen der Ellipse (s. Taf. III, Fig. 5) seien $2a$ und $2b$; der Abstand des Brennpunktes F vom Ellipsenmittelpunkte sei e. Dann folgt unmittelbar aus 7), wenn man $m_1 = e$ setzt

$$\text{Sector } AFE = \frac{b}{2}\left(a \,.\, arc\sin\frac{y}{b} - \frac{ey}{b}\right).$$

Hierin ist $arc \sin \frac{y}{b}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π zu nehmen, jenachdem der Eckpunkt E des Sectors zwischen den positiven Hauptscheiteln A und C liegt oder zwischen B und C.

Anmerkung. Wir haben im Bisherigen nur solche Sectoren behandelt, deren Winkel an der Spitze kleiner als π ist. Ist dieser Winkel grösser als π, so bietet die Berechnung der Sectoren ebenfalls keine Schwierigkeiten dar.

Synthetische Entwickelungen betreffend die Sectoren und Segmente der Ellipse.

Aus den bisher entwickelten Gleichungen lassen sich mancherlei Sätze ableiten, welche sich auf besondere Ellipsen, Ab- und Ausschnitte beziehen. Da jedoch eine rein constructive Methode im vorliegenden Falle directer zum Ziele führt, so wollen wir die rechnende Methode nicht weiter verfolgen. Das Folgende schliesst sich unmittelbar den Nummern 1) bis 3) an, nimmt also auf die unter 4) bis 10) gewonnenen Resultate nicht Rücksicht. Man wolle namentlich die unter 3) gegebenen Constructionen und Sätze für den nächsten Abschnitt festhalten.

a) Stereometrische Ableitungen.

11) Satz. Jede Sehne, welche parallel geht einem von zwei conjugirten Durchmessern, wird durch den zweiten Durchmesser halbirt.

Es ist die Sehne $E_1 G_1$ (s. Taf. III, Fig. 1) parallel dem Ellipsendurchmesser $C_1 D_1$, deshalb ist auch die Projection EG parallel dem Kreisdurchmesser CD. Nun wird EG durch AB halbirt (vergl. 3), also wird auch die $E_1 G_1$ durch den conjugirten Durchmesser $A_1 B_1$ halbirt.

12) Satz. Alle Parallelogramme, welche zwei beliebige conjugirte Durchmesser der Ellipse zu Diagonalen haben, sind gleich.

Unter Berücksichtigung von 3) folgt der Satz daraus, dass die Projectionen dieser sämmtlichen Parallelogramme dem Grundkreise eingeschriebene Quadrate sind. Da diese Projectionen der Parallelogramme gleich sind, so sind die Parallelogramme selbst gleich (nach 2).

13) Satz. Alle Parallelogramme, welche zwei beliebige conjugirte Durchmesser der Ellipse zu Mittellinien haben, sind einander gleich.

Folgt wie der vorige Satz.

14) Zusatz. Sind a_1 und b_1 zwei conjugirte Halbmesser und a und b die halben Hauptachsen, ist ω der Neigungswinkel der conjugirten Halbmesser, so ist $a_1 b_1 \sin \omega = ab$.

Jedes der Parallelogramme, welches zwei conjugirte Durchmesser zu Mittellinien hat, ist $4 a_1 b_1 \sin \omega$, und nach dem 13. Satze gleich dem Parallelogramme $4ab$, welches die Hauptachsen zu Mittellinien hat, also ist $a_1 b_1 \sin \omega = ab$.

15) **Satz.** Zwei conjugirte Durchmesser theilen die Ellipse in vier gleiche Theile.

Unter Berücksichtigung von 3) folgt der Satz daraus, dass die Projectionen der vier Ellipsensectoren sämmtlich Quadranten des Grundkreises sind. Da diese Quadranten gleich sind, so sind auch die zu diesen Projectionen gehörigen Ellipsensectoren gleich.

16) **Satz.** Zieht man parallel zu den Sehnen, welche die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser verbinden, zwei neue Durchmesser, so theilen die vier Durchmesser die Ellipse in acht gleiche Sectoren.

Unter Berücksichtigung von 3) folgt der Satz daraus, dass die Projectionen der acht Ellipsensectoren sämmtlich Octanten des Grundkreises, also unter sich gleich sind.

17) **Satz.** Sind $2a_1$ und $2b_1$ zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse, so ist der Inhalt I der Ellipse $= a_1 b_1 \sin \omega \,.\, \pi$.

Ist K der Inhalt des Grundkreises, so ist nach 1)

$$I = \frac{K}{\cos \varphi},$$

also nach 3)

$$I = \frac{K \,.\, a}{b} = a b \pi = a_1 b_1 \sin \omega \,.\, \pi \text{ (nach 14).}$$

18) **Satz.** Wird eine Ellipse durch n Halbmesser in n gleiche Sectoren zerlegt, so bilden die zu diesen Sectoren gehörigen Sehnen mit ihren Bogen sämmtlich gleiche Ellipsensegmente.

Sind nämlich die n Ellipsensectoren gleich, so sind auch ihre Projectionen auf den Grundkreis (nach 3) gleiche Kreissectoren. Zu diesen Sectoren gehören gleiche Kreissegmente, welche wiederum die Projectionen von den in dem vorliegenden Satze berührten Ellipsensegmenten sind. Weil nun die Projectionen gleich sind, so sind nach 2) die Ellipsensegmente selbst gleich.

b) Planimetrische Ableitungen.

Die bisherigen, auf die Theorie der conjugirten Durchmesser gegründeten Sätze sind wenig geeignet, als Vorbereitungen zur directen Auflösung solcher Aufgaben zu dienen, welche Theilungen der Fläche der Ellipse zum Zwecke haben. Dergleichen Ellipsentheilungen lassen sich **unter Benutzung des über der grossen oder kleinen Achse beschriebenen Kreises** einfacher ausführen.

Von allen bisherigen Sätzen wollen wir für den vorliegenden Abschnitt **keinen** als bekannt voraussetzen, dagegen die folgenden beiden Sätze zu Hilfe nehmen:

19) Satz. Bewegt sich eine Gerade in einer Ebene fortwährend parallel einer festliegenden Geraden und verhalten sich die Schnitte, welche die bewegliche Gerade mit zwei beliebigen in der Ebene liegenden Figuren gemein hat, fortwährend wie b zu a, so verhalten sich die Figuren selbst wie b zu a.

20) Satz. Ist über der grossen Achse der Ellipse ein Kreis beschrieben — der grosse Achsenkreis —, so verhalten sich die zu ein und derselben Abscisse gehörigen, zur grossen Achse senkrechten Ordinaten der Ellipse und des grossen Achsenkreises wie b zu a, wie gross auch die Abscisse sein möge.

21) Erklärung. Zieht man im grossen Achsenkreise der Ellipse zwei Ordinaten senkrecht zur grossen Achse, so schneiden sie aus den Umfängen der Ellipse und des grossen Achsenkreises zwei Bogen heraus, welche wir der Kürze wegen zusammengehörige Bogen nennen wollen; ebenso mögen zwei auf zusammengehörigen Bogen stehende Sectoren mit gemeinsamer Spitze zusammengehörige Sectoren und die beiden Segmente der Ellipse und des grossen Achsenkreises, welche auf zusammengehörigen Bogen stehen, zusammengehörige Segmente heissen.

22) Satz. Zwei zusammengehörige Sectoren der Ellipse und des grossen Achsenkreises, deren Spitze in einen beliebigen Punkt der grossen Achse fällt, verhalten sich wie die halbe kleine Achse b zur halben grossen Achse a.

Die beiden zusammengehörigen Sectoren seien EGC und FGD (siehe Taf. III, Fig. 6). Q sei einer der Scheitel der Ellipse, G ein beliebiger Punkt der grossen Achse.

Nun ist

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{Ellipsensector } EGQ}{\text{Kreissector } FGQ} = \dfrac{b}{a} \\[2ex] \text{und} \\[1ex] \dfrac{\text{Ellipsensector } CGQ}{\text{Kreissector } DGQ} = \dfrac{b}{a}\end{array}\right\} \text{nach 19) und 20)},$$

also

$$\frac{\text{Ellipsensector } EGC}{\text{Kreissector } FGD} = \frac{b}{a}.$$

23) Satz. Zwei zusammengehörige Segmente der Ellipse und des grossen Achsenkreises verhalten sich wie die halbe kleine Achse b zur halben grossen Achse a.

Weil sich die Secanten FD und EC (s. Taf. III, Fig. 6) in einem Punkte der grossen Achse treffen, so verhalten sich die beiden Paralleltrapeze $ECXY$ und $FDXY$ nach dem 19. Satze wie b zu a. Ebenso verhalten sich die Streifen $ECXY$ und $FDXY$ der Ellipse und des Kreises nach dem 19. und 20. Satze wie b zu a, also verhalten sich auch die zusammengehörigen Segmente EC und FD wie b zu a.

24) **Satz.** Theilt man, von einem beliebigen Punkte ausgehend, die Peripherie des grossen Achsenkreises einer Ellipse in n gleiche Theile und zieht man von den Theilpunkten aus Senkrechte auf die grosse Achse, so schneiden diese Senkrechten die Ellipsenperipherie in n Punkten. Verbindet man diese n Theilpunkte des Ellipsenumfangs mit dem Ellipsenmittelpunkte, so entstehen n gleiche Ellipsensectoren, und verbindet man je zwei benachbarte Theilpunkte des Ellipsenumfangs, so entstehen n gleiche Ellipsensegmente.

Dieser Satz folgt aus dem 22. und 23. Satze und aus dem Satze: Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Kreisaus- und Abschnitte.

25) **Aufgabe.** Gegeben sei ein beliebiger Halbmesser der Ellipse. Man soll einen zweiten Halbmesser so ziehen, dass der zwischen beiden Halbmessern liegende Ellipsensector der n^{te} Theil der Ellipse ist.

Auflösung. Gegeben sei der Halbmesser OE der Ellipse (s. Taf. III, Fig. 7). Man beschreibe über der grossen Achse einen Kreis, ziehe durch E eine Senkrechte zur grossen Achse, welche den Umfang des grossen Achsenkreises in F schneide, mache den Kreisbogen FD gleich dem n^{ten} Theile der Kreisperipherie, ziehe von D aus eine Senkrechte zur grossen Achse, welche die Peripherie der Ellipse in C schneide, ziehe CO, so ist der Ellipsensector EOC der n^{te} Theil der Ellipse.

Die Richtigkeit der Auflösung folgt unmittelbar aus 24).

26) **Aufgabe.** Von einem *beliebigen* Punkte der grossen Achse sollen nach zwei Punkten des Ellipsenumfangs zwei gerade Linien so gezogen werden, dass der zwischen ihnen liegende Sector der n^{te} Theil der Ellipse ist.

Auflösung. Der gegebene Punkt der grossen Achse sei G (siehe Taf. III, Fig. 8). Man beschreibe über der grossen Achse einen Kreis, errichte im Mittelpunkte O desselben eine Senkrechte zur grossen Achse, welche den Kreisumfang in H schneide; von H aus mache man zwei Kreisbogen HD und HF je gleich dem $2n^{ten}$ Theile der Kreisperipherie, ziehe von F und D aus zwei Senkrechte zur grossen Achse, welche den Ellipsenumfang in C und E schneiden. Man ziehe noch EG und CG, so ist EGC der verlangte Sector.

Verbindet man, um die Richtigkeit der Construction nachzuweisen, die Punkte ECD und F mit G und O, so ist der Kreissector FOD der n^{te} Theil des Kreises, also der Ellipsensector EOC der n^{te} Theil der Ellipse (nach 24), also auch, weil $EC \parallel RQ$ ist, der Ellipsensector EGC der n^{te} Theil der Ellipse.

27) **Aufgabe.** In eine Ellipse ein nEck so zu construiren, dass die durch die Seiten des nEcks abgeschnittenen Ellipsensegmente sämmtlich gleich sind.

Die Auflösung gründet sich unmittelbar auf den 24. Satz.

Es bedarf wohl keines besonderen Nachweises, dass man den im vorigen Abschnitt *b* aufgeführten Sätzen entsprechend erhält, wenn man sich statt auf den grossen, auf den kleinen Achsenkreis bezieht.

XXXVI. Einige geometrische Sätze über Curven. In einer Ebene ist eine Curve C und ein Punkt O gegeben; man ziehe durch einen Punkt M von C die Tangente und durch O die Linie OP, Winkel $OPM = 90^0$, so liegt P auf der Fusspunktcurve. Es seien ϱ und ϱ' die Krümmungshalbmesser in M und P, $OM = r$, $OP = p$, dann ist

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{r} - \frac{p\varrho}{r^3}.$$

Wenn C auf der Tangente MP rollt und O der Bewegung folgt, so beschreibt O eine Roulette; man bezeichne den absoluten Werth des Krümmungshalbmessers in O mit ϱ'', so ist

$$\frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{r} - \frac{p\varrho}{r^3};$$

aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{r}.$$

Hieraus lassen sich Anwendungen auf die Parabel und Kettenlinie machen, wenn C eine Parabel ist, O der Brennpunkt. Die Fusspunktscurve ist dann die Scheiteltangente der Parabel und die Roulette eine Kettenlinie. Wenn die Fusspunktslinie auf der Roulette rollt, so dass die concaven Seiten zusammenfallen, so beschreibt der Punkt O, mit der beweglichen Curve fest verbunden, eine Gerade. Wenn aber die Roulette auf der Fusspunktslinie rollt, so geht die Tangente MP, ebenfalls mit der beweglichen Curve fest verbunden, stets durch den nämlichen Punkt.

O ist der Mittelpunkt eines Kreises, innerhalb dessen ein anderer rollt, dessen Durchmesser viermal so klein ist; es entsteht hierdurch eine Hypocycloide mit vier Aesten, welche zugleich die Enveloppe einer Geraden ist, deren Endpunkte sich auf zwei sich rechtwinkelig kreuzenden Linien bewegen. Diese Curve hat folgende zwei Eigenschaften mit allen Hypo- und Epicycloiden gemeinschaftlich: Wenn sie auf einer Tangente rollt, so beschreibt O eine Ellipse; die Fusspunktslinie für den Pol O ist eine verlängerte Hypo- (Epi-) Cycloide. Ferner sind ihre Evolventen bis zu einer gewissen Grenze ebenfalls Enveloppen und zwar von einer Geraden, deren Endpunkte sich auf zwei schiefwinklig sich kreuzenden Linien bewegen. Die Polargleichung der Fusspunktslinien aller Evolventen ist

$$\varrho = R\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha,$$

wo $r >=< 0$ sein kann. Die Radien ϱ dieser Fusspunktslinien stellen

also das Gesetz der reciproken Krümmungshalbmesser der Normalschnitte in einem Punkte einer Fläche dar.

XXXVII. Ueber die Linien gleicher Helle. Wenn eine Fläche den Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, so sind die Linien gleicher Helle auf der Fläche characterisirt durch die Gleichung $\alpha = const.$; α ist der Winkel, unter welchem die Strahlen die Berührungsebene treffen. Man nehme zunächst an, dass die Richtung der Lichtstrahlen parallel der z-Achse sei, setze $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial x} = q$, so ist

$$1) \qquad 1 + p^2 + q^2 = cosec^2\,\alpha$$

in Verbindung mit der Gleichung der Fläche die Gleichung der Linien gleicher Helle,

$$2) \qquad p\,dy - q\,dx = 0$$

die Gleichung der Trajectorien, welche nach Monge dadurch entstehen, dass eine Berührungsebene so über die Fläche hingleitet, dass sie immer zwei aufeinander folgende Characteristiken, hier die Linien gleicher Helle berührt. Wenn man 1) auf die Flächen anwendet, deren Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sind, so ergiebt sich

$$3) \qquad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{c^4\,tg^2\,\alpha} = 0,$$

welches die Gleichung eines Kegels vom zweiten Grade ist, dessen Spitze mit dem Coordinatenursprung coincidirt. Durch Verbindung von 1) mit

$$\frac{y^2}{m} - \frac{z^2}{n} = x$$

erhält man

$$4) \qquad \frac{z^2}{\frac{1}{4}n^2\,tg^2\,\alpha} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}m^2} = 1,$$

welches die Gleichung eines Cylinders ist, der das hyperbolische Paraboloid in Linien gleicher Helle schneidet. Die Gleichungen der Trajectorien sind

$$5) \qquad y = k\,x^{\frac{a^2}{b^2}},$$

$$6) \qquad y = k\,x^{-\frac{a^2}{b^2}},$$

$$7) \qquad y = k\,e^{-\frac{2x}{m}},$$

5) gilt für das Ellipsoid und das einmantelige Hyperboloid, 6) für das zweimantelige Hyperboloid, und 7) für das hyperbolische Paraboloid; k ist eine Constante, die sich aber von einer Trajectorie zur andern verändert.

Gewöhnlich werden bei den Zeichnungen die Lichtstrahlen senkrecht auf der Ebene $x+y+z=0$ angenommen. Man setze zur Abkürzung

$$\frac{1-3\sin^2\alpha}{2}=\mu,$$

so erhält man statt 1)

$$(p^2+q^2+1)\mu+pq-p-q=0 \tag{8}$$

und statt 2)

$$(-1+p\mu+q)\,dy-(-1+p+q\mu)\,dx=0. \tag{9}$$

Statt 3) erhält man folgende drei Gleichungen:

$$(c^4x^2+b^4y^2+a^4z^2)\mu+b^2c^2xy+a^2c^2xz+a^2b^2yz=0,$$
$$(c^4x^2+b^4y^2+a^4z^2)\mu+b^2c^2xy-a^2c^2xz-a^2b^2yz=0,$$
$$(c^4x^2+b^4y^2+a^4z^2)\mu-b^2c^2xy-a^2c^2xz+a^2b^2yz=0,$$

welche ebenfalls Kegel vom zweiten Grade vorstellen, deren Spitze im Coördinatenursprung liegt. Das hyperbolische Paraboloid wird von einem Cylinder in Linien gleicher Helle geschnitten, dessen Gleichung ist

$$\left(1+\frac{y^2}{\frac{1}{4}m^2}+\frac{z^2}{\frac{1}{4}n^2}\right)\mu-\frac{yz}{\frac{1}{4}m\,.\,n}-\frac{y}{\frac{1}{2}m}+\frac{z}{\frac{1}{2}n}=0.$$

Die Drehungsfläche $py-qx=0$, deren Achse die der z ist, führt zu folgender Gleichung der Linien gleicher Helle:

$$\left[\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\mu+\frac{y}{x}\right]p^2-\left(1+\frac{y}{x}\right)p+\mu=0.$$

Sulz a. N. O. Böklen.

XXXVIII. Ueber den Quotienten zweier Facultäten. Im ersten Jahrgange S. 47 der Zeitschrift habe ich gezeigt, wie man für den Ausdruck

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$

eine obere Grenze finden kann, wenn α und $\beta<\alpha$ positive Grössen sind. Durch ein ähnliches Verfahren gelangt man auch zu einer unteren Grenze und hat dann nachstehende vollständigere Betrachtung.

Für ganze positive h und k, sowie für ein beliebiges positives x ist

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^h>1+x,\quad (1+x)^k>1+kx,$$

mithin

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{h}}\right)^h<\frac{1}{1+x}<\left(\frac{1}{1+kx}\right)^{\frac{1}{k}}$$

und hieraus folgt, wenn $x=\dfrac{\alpha-\beta}{\beta+m}$ und $\alpha>\beta$ genommen wird,

$$\left(\frac{\beta+m}{\beta+m+\frac{\alpha-\beta}{h}}\right)^h<\frac{\beta+m}{\alpha+m}<\left(\frac{\beta+m}{\beta+m+k(\alpha-\beta)}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Wählt man die Zahlen h und k so, dass gleichzeitig

$$h \geqq \alpha - \beta, \quad k \geqq \frac{1}{\alpha - \beta},$$

so kann man die vorige Ungleichung verstärken, indem man statt des ächt gebrochenen $\frac{\alpha - \beta}{h}$ die Einheit, und für das die Einheit übersteigende $k(\alpha - \beta)$ gleichfalls die Einheit setzt. In der nunmehrigen Ungleichung

$$\left(\frac{\beta + m}{\beta + m + 1}\right)^h < \frac{\beta + m}{\alpha + m} < \left(\frac{\beta + m}{\beta + m + 1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

nehmen wir $m = 0, 1, 2, \ldots n - 1$, multipliciren alle einzelnen Ungleichungen und erhalten

$$\left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^h < \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\ldots(\alpha + n - 1)} < \left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^{\frac{1}{k}};$$

dies ist das genauere Resultat, was entwickelt werden sollte, und woraus man besser die Geschwindigkeit ersieht, mit der sich der Quotient zweier Facultäten der Grenze Null nähert.

Als Beispiel mag das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommende Verhältniss des mittelsten Binomialcoefficienten eines geraden Exponenten zur Summe aller Binomialcoefficienten desselben Exponenten betrachtet werden. Dieses Verhältniss ist

$$\frac{(2n)_n}{2^{2n}} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)(n+1)}{2^{2n}.1.2.3\ldots.n} = \frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots.(2n)};$$

für $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $h = 1$, $k = 2$ erhält man

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

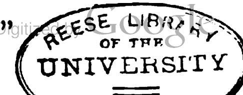
und es folgt hieraus, dass jenes Verhältniss bei unendlich wachsenden n gegen die Grenze Null convergirt. SCHLÖMILCH.

XXXIX. Silber im Meerwasser. Von Prof. Dr. S. BLECKRODE. Die Untersuchungen des Meerwassers auf seinen Silbergehalt, wovon vielfältig und an verschiedenen Orten gesprochen worden ist, hat Herr Bleckrode denen des Herrn Field analog, ebenfalls angestellt und beschreibt dieselben (Poggend. Ann. Bd. 102, p. 478) folgenderweise:

Ich gebrauchte dazu Yellow-Metal oder das gelbe Kupfer-Zink von Muntz, welches zur Bekleidung der niederländischen Indienfahrer angewandt wird. Dieses Yellow-Metal war englisches Fabrikat, da solches erst seit fünf Jahren in Holland fabricirt wird.

Die Resultate von Field's Versuchen auf metrisches Gewicht reducirt, waren:

35,326 Gramm Silber auf 1000 Kilogramm Schiffsbekleidung
und 238,006 „ „ „ „ „ „



Meine Versuche ergeben:

270 Gramm auf 1000 Kilogramm

und 341 „ „ „ „

Ich nahm zu jeder Probe ein Kilogramm.

Diese Schiffsbekleidung war wegen Abnutzung nach 5- bis 6jährigem Gebrauch vom Schiffe abgenommen worden, und ist bestimmt, bei der Fabrikation von neuem Yellow-Metal mit eingeschmolzen zu werden. Die Resultate der Bestimmung des Silbergehaltes müssen nothwendig ungleich sein, da die Bekleidung ungleich abgenutzt und auch mit dem Absatz ungleichartig belegt ist.

Ich werde baldmöglichst das neu fabricirte Yellow-Metal untersuchen, wobei obengenanntes mit eingeschmolzen ist, so wie auch die Abfälle und Schlacken.

Uebrigens ist diese Wahrnehmung nicht ohne Interesse. Jährlich werden im Königreiche der Niederlande 300,000 Kilogramm angewandt, theils zur Reparatur von abgenutzter Schiffsbekleidung, theils für neue Schiffe. Setzen wir demnach die mittlere Dauer der Schiffsbekleidung auf 6 Jahre und ihren Silbergehalt auf 300 Gramme pro 1000 Kilogramm, so würden in 100 Jahren ungefähr $16 \times 300 \times 300 = 1440$ Kilogramm Silber aus dem Meerwasser reducirt werden. Und diese Zahl wird für die englischen und amerikanischen Schiffe mehr als hundertfach grösser oder zu 144000 Kilogramm.

XIV.

Zur Geschichte der Zahlzeichen.

Vortrag, gehalten zu Carlsruhe in der mathem.-astronom. Section der 34. Naturforscher-Versammlung.

Von Dr. M. Cantor.

Die Einführung unserer gegenwärtigen Ziffern in Europa ist der Gegenstand vielfacher Untersuchung gewesen, deren wahrscheinliches Resultat ich in einem früheren Aufsatze[1]) zusammenzustellen versuchte. Es ergab sich dabei, dass ein so später Ursprung der modernen Zahlzeichen, als sonst wohl angenommen wurde, durchaus unstatthaft ist; dass man vielmehr zu der Behauptung berechtigt ist, es sei im Wesentlichen nur eine Auffrischung des fast Vergessenen, was die Araber vermittelten[2]), und deren Hauptanspruch auf unsere Dankbarkeit bestehe darin, dass sie bei Anwendung der Null zur Schrift machen konnten, was vorher nur Rechenvortheil war, und in dieser Gestalt wohl nie wirkliches Volkseigenthum geworden wäre. In der That besassen schon die alten Griechen in ihrem ἄβαξ eine Tafel, die, nach decadischem Systeme eingetheilt, mit Zeichen beschrieben wurde, welche den einzelnen Ziffern, deren wir uns noch heute bedienen, äquivalent waren. Nur die Null scheint eine neue Erfindung zu sein, deren indischer Ursprung wohl selten bezweifelt worden ist. Ich behalte mir vor, auf diesen Punkt im Verlaufe dieser Abhandlung näher einzugehen. Meine Hauptaufgabe aber soll sein, solche Angaben zu sammeln, welche auf den ersten Ursprung der Zeichen Bezug haben, von welchen eine frühere europäische Anwendung feststeht, als Leonardo Fibonacci mit den Arabern zusammentraf. Es ist dieses ein fast durchaus neuer Gegenstand, indem theils noch kein Mathematiker sich damit beschäftigt hat, theils die Untersuchungen von Seiten der Philologen und Archäologen so zerstreut und bruchstückweise vorhanden sind, dass schon deshalb ein

1) Vgl. diese Zeitschrift, I. Bd. S. 65 fg.
2) Dieser Ansicht scheint schon Pater Caspar Schott, *Cursus Mathematicus. Herbipoli.* 1662, gewesen zu sein.

Nebeneinanderstellen derselben berechtigt erscheint, da nur der Vergleich den Schlüssen, die ich zu ziehen gedenke, als Prüfungsmittel dienen kann.

Die Hauptstelle zur Begründung der Ansicht von einem frühen europäischen Gebrauche der Ziffern ist die auch bisher von allen Historikern angeführte aus der Geometrie des Boethius, deren wörtliche Anführung hier am Platze sein dürfte, wenn sie auch schon vielfältig abgedruckt ist. Dort heisst es: *Pythagorici vero ne multiplicationibus et partitionibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi descripserunt sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant, quia hoc quod depinxerant magistro praemonstrante cognoverant. A posterioribus vero appellabatur abacus, ut, quod alta mente conceperant, melius, si quasi videndo ostenderant, in notitiam hominum transfundere possent, eamque subterius habita*[1]) *sat mira descriptione formabant.* Dann folgt in einigen Manuscripten die Multiplicationstabelle (das Einmaleins), in anderen, und zwar gerade in solchen, welche man für die älteren zu halten Grund hat, eine Abbildung der römischen Rechentafel.

Von diesen letzteren Manuscripten war schon seit Anfang dieses Jahrhunderts der Altdorfer Codex durch Mannert entdeckt worden. Chasles fand einen ganz ähnlichen Codex in Chartres, und derselbe Forscher machte noch auf zwei Manuscripte der Pariser Bibliothek (*Bibliothèque impériale, rue Richelieu*) aufmerksam, welche dort unter den Nummern 7377 *C* und 7185 registrirt sind. Ich habe Gelegenheit genommen, diese beiden selbst einzusehen, und die Zeichen, welche in denselben vorkommen, zu copiren.

An das schon Angeführte sich anschliessend existirt nämlich in den genannten Manuscripten der Zusatz von unzweifelhafter Gleichzeitigkeit mit dem übrigen Texte: *Quidam hujuscemodi apicum notas sibi conscripserunt,* und Zeichen, welche in ihrer Analogie mit den modernen Ziffern (vergl. Tafel IV) sich als Ursprung derselben erweisen. Dann endlich folgt noch als Schluss: *Quidam vero in hujus formae depictione litteras alfabeti assumebant.*

Zu diesen schon bekannten Thatsachen möchte ich indessen noch hinzufügen, dass das Manuscript 7185 der Pariser Bibliothek auf dem Rücktitel fälschlich Gerbert als Verfasser zugeschrieben ist, ein Irrthum, welcher nicht ohne Bedeutung für den Satz ist (der auch Bd. I. S. 71 dieser Zeitschrift aufgestellt wurde), dass Gerbert seine Kenntniss der Zahlzeichen nicht von den Arabern, sondern aus der Geometrie des Boethius besass.

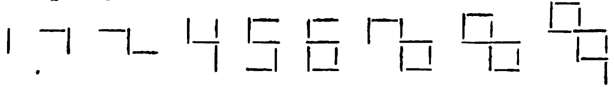
Wenn nun in solcher Weise, bei Mitberücksichtigung der in meinem früheren Aufsatze angeführten sonstigen Gründe, dargethan ist, dass die Pythagoräer schon Zahlzeichen besassen, so drängt sich unmittelbar die weitere Frage auf, woher sie dieselben bezogen hatten, und eine Beantwortung dieser Frage, wenn sie innere Wahrscheinlichkeit besitzt, wird

1) Andere Lesart: *subtervis habiti.*

auch umgekehrt jeden noch vorhandenen Zweifel an der Echtheit jener Stelle des Boethius zu heben im Stande sein. Woher lassen sich also jene Zeichen in letzter Instanz herleiten?

Die Ansichten, welche in dieser Beziehung laut wurden, gehen weit auseinander. In einem wenigstens an barocken Gedanken nicht armen Buche[1]) der neuesten Zeit finde ich die weitverbreitete (?) Annahme mitgetheilt, die Zahlzeichen seien einem mit seinen Diagonalen versehenen Quadrate ⊠ entnommen, dadurch, dass diese oder jene Linien wegblieben.

In arithmetisch-geometrischer Auffassung zählt ein anderer Autor[2]) die Striche, welche zur Bildung der einzelnen Ziffern nöthig sind und findet darin den Ursprung der Zeichen:



Ja er setzt sogar hinzu: „Diese Einfachheit der Zahlzeichen, sowie ihre Uebereinstimmung mit der Sprache[3]) lassen keinen Zweifel übrig, dass wir unsere Ziffern 1, 2, 3 . . . als die eigenthümlichen Zahlzeichen der alten germanischen Völker zu betrachten und nicht nöthig haben, den Ursprung derselben mit vieler erfolgloser Mühe bei den orientalischen Völkern zu suchen.“

Zwei nordische Gelehrte, der Holländer Rudbec und der Schwede Brixhorne, hatten übrigens schon früher einen germanischen Ursprung angenommen[4]).

Ernster ist die Auffassung zu erwägen, welche besonders einigen Diplomatikern[5]) des vorigen Jahrhunderts die plausibelste schien, dass nämlich unsere Ziffern aus den sogenannten tironischen Zeichen sich entwickelt hätten, welche bei den Römern das vertraten, was heut zu Tage, freilich in erhöhtem Maasse, die Stenographie leistet. Allein diese Annahme ist ungenügend, den ἄβαξ der Griechen aus frühester Zeit nebst seinen Zeichen zu erklären. Wenn es also auch keineswegs unmöglich ist, dass Tiro etwa von jenen Zeichen Kenntniss gehabt und sie in seiner abgekürzten Schrift benutzt haben sollte, so kann man doch darin keine Quelle erkennen. Zu deren Auffindung sind wir genöthigt, uns weiter östlich zu wenden, dorthin, wo die Quellen aller Wissenschaft und Bildung so ergiebig flossen.

Einen Anhaltspunkt bei dieser Untersuchung kann uns das Leben

1) Elementare Arithmetik für Berg-, Gewerbe- und Fortbildungsschulen von Dr. Chr. Rauch. Zweite vermehrte Auflage. Duisburg 1857.

2) Arithmetik und Algebra von Anton Müller. Heidelberg 1833.

3) Diese Uebereinstimmung findet der Verfasser darin, dass Hundert, Tausend wesentlich deutsche Klänge und nicht aus fremden Sprachen abgeleitete Namen sind.

4) Vergl. *Angelo Fumagalli*, *Delle Istituzioni Diplomatiche. Milano* 1802. 4. Bd. I. S. 170—184.

5) *Don Calmet* in den *Mémoires de Trévoux* (*Septembre* 1707, *p.* 1622), *J. B. C. d'Ansse de Villoison*, *Anecdota Graeca. Venetiis.* 1781. 4. *p.* 152—157, u. A.

eines Mannes gewähren, dessen Name, wie in der ganzen Geschichte der Mathematik, auch bei der Geschichte des Zahlensystems und der Ziffern an dem Anfange steht, dessen eigener Bildungsgang aber erst in allerneuester Zeit durch die Arbeiten eines anderen Mannes von ähnlich universellem Wissen zur sicheren Kenntniss gelangt ist. Ich brauche wohl kaum hinzuzusetzen, dass ich Pythagoras meine und mich für dessen Lebensumstände auf den zweiten Band der „Geschichte unserer abendländischen Philosophie" von Eduard Röth beziehe.

Es ist hier nicht der Ort, das interessante Lebensbild des Vaters griechischer Mathematik ganz aufzurollen, so sehr es verdient, in weiteren und weitesten Kreisen bekannt zu werden[1]). Ich muss mich für den Augenblick darauf beschränken, nur mit dürren Worten und todten Jahreszahlen die Hauptmomente hervorzuheben: Die Geburt des Pythagoras im Jahre 569 auf der Insel Samos. Seinen ersten wissenschaftlichen Unterricht durch Pherekydes von Lesbos und Thales und Anaximander von Milet 551—547. Dann seine Reise nach Aegypten, wo er 21 Jahre lang im Dienste der Tempel die Priesterschulen besuchte und deren ganze Gelehrsamkeit empfing, bis er zuletzt selbst die heiligsten Weihen erhielt. Es folgt die Eroberung Aegyptens durch Cambyses 525, bei welcher die ganze Priesterschaft, und unter ihr auch Pythagoras, als Gefangene nach Babylon geführt wurden. Dort stand er während weiterer 12 Jahre in nächster Berührung zur chaldäischen Wissenschaft, bevor er, wieder befreit, in einem selbstgewählten neuen Vaterlande, in Unteritalien, seine Schule gründen konnte. Aus diesem an romanhaften Ereignissen und Abenteuern reichen Geschicke erklärt es sich auch, warum wir in seinen Lehren offenbar so Heterogenes gemischt finden. Es sind eben die Erwerbungen der verschiedensten Gegenden, in welche theils sein Wille, theils der Zufall ihn führte, und nur an den Faden dieser Erinnerungen konnte Röth das pythagoräische System der Philosophie und Religion aufreihen. Ganz ähnlich wird die Sache im vorliegenden Falle sich verhalten. Es wird nöthig sein, nach den Zahlzeichen der verschiedenen Orte zu fragen, welche Pythagoras auf seinem Bildungsgange berührte, und dann weiter die Frage aufzuwerfen, wo sich etwa Analogieen an die Zeichen finden lassen, deren Ursprung wir gerade aufsuchen wollen.

Es sei mir erlaubt, eine allgemeine Bemerkung über solche Analogieen vorauszuschicken, welche freilich Niemanden fremd sein wird, der sich irgendwie mit vergleichenden Sprachstudien zu beschäftigen Gelegenheit hatte. Um Aehnlichkeiten der Art zu begründen, ist es nämlich nur nöthig, dass die einzelnen Zeichen auf einander hinweisen, ohne dass es auf die Lage derselben, und ganz besonders, ohne dass es auf ihren Sinn ankommt.

Was namentlich den letzteren Punkt betrifft, so erinnere ich daran,

1) Vergl. meine ausführliche Recension des Röth'schen Werkes in der Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik, Bd. I, Heft 6.

wie noch heute Franzosen und Deutsche unter dem Worte Billion verschiedene Mengen verstehen. Ich mache weiter auf die Sanskritziffern aufmerksam (vergl. Taf. IV), welche in modernen Druckwerken benutzt werden, und bei welchen die Vier aussieht wie unsere 8, die Sieben wie unsere 6, die Acht wie unsere 7. Ich will endlich aus einem Uebergangsstadium zwei Manuscripte eines und desselben Buches aus der Bibliothek San Marco in Venedig anführen[1]), welche für die Ziffern derartige Gestalten geben, dass das Zeichen der Sieben in dem einen Codex gerade so aussieht, wie das der Acht in dem andern, während die Fünf des letztern mit der Vier des Sanskrit übereinstimmt, und die Zwei und Drei auch die Gleichgiltigkeit der Lage der Zeichen näher erläutern. Das Buch selbst rührt von Maximus Planudes her, welcher mit Leo Orphanostrophus als Gesandter des Andronicus Paläologus d. Ae. 1327 nach Venedig kam, wo er 1353 noch lebte. Ein Mann von mannigfaltigen Kenntnissen, dessen Ansichten über die Ziffern und ihren Ursprung wir später noch des Nähern berücksichtigen müssen.

Kehren wir jetzt zu den Zahlzeichen der Völker zurück, unter welchen Pythagoras sein Leben zubrachte. Schon die Griechen hatten vor seiner Zeit eine durchaus fertige Schrift und in derselben eine Bezeichnung der Zahlen durch Buchstaben, oder vielmehr, wie Fumagalli angiebt, dreierlei Arten solcher Bezeichnungen. Die älteste habe nur die Buchstaben

	I.	*Π.*	*Δ.*	*H.*	*X.*	*M.*
für die Zahlen	1.	5.	10.	100.	1000.	10000.

benutzt, wie der Grammatiker Herodian bezeuge[2]). Die Schreibweise war wie bei allen Buchstabenbezeichnungen additiv. Nur das Zeichen *Π* (πέντε) trat dabei multiplicativ auf und nahm alsdann das zu vervielfachende Gruppenzeichen zwischen sich, z. B. 50 = $\overline{|\Delta|}$, 500 = $\overline{|H|}$, 612 = $\overline{|H|}H\Delta II$.
Die zweite Bezeichnungsweise legte den Buchstaben α bis ω die Werthe 1 bis 24 bei; so seien nämlich die Bücher des Homer numerirt und in ähnlicher Weise im hebräischen Alphabete der 118. Psalm und die Klaglieder Jeremiä. Endlich die dritte Bezeichnungsweise ist die allgemein bekannte, in meinem früheren Aufsatze schon besprochene $\alpha = 1, \ldots \vartheta = 9, \iota = 10$ u. s. w. Aus dieser letzteren wollen verschiedene Autoren theils unsere modernen Ziffern, theils wenigstens die im frühern Mittelalter benutzten[3]) herleiten. Am feurigsten erfasste wohl der Bischof Huet diese Ansicht, der sie in seiner *Demonstratio evangelica ad seren. Delphinum. Paris* 1679. *p.* 647 in pomphafter Weise vertheidigt. Die 1 sei ein einfacher Strich, 2 das unten abgeschnittene β, 5 der Buchstabe ε mit umgedrehtem Kopfe u. s. w.[4])

1) Bruchstücke daraus vergl. bei Villoison, aus welchem auch die auf der Tafel angegebenen Zeichen entnommen sind.

2) Nesselmann citirt für diese Zeichen H. Stephanus, *thesaurus linguae Graecae.*

3) Don Calmet in dem oben citirten Aufsatze.

4) Vergl. auf der beigegebenen Tafel die Formen der einzelnen Buchstaben, aus welchen Huet die Zahlzeichen herleitet.

Das *ἀλώπηξ*-Fuchsartige dieser Ableitungen liegt zu sehr auf der Hand, als dass ein näheres Verweilen dabei nöthig wäre.

Gehen wir mit Pythagoras nach Aegypten über, so zeigt sich uns daselbst eine Hieroglyphenschrift, welche noch nicht durchgehends entziffert, manches Räthsel für zukünftige Forschung übrig lässt. Nichts desto weniger hat bereits die Entzifferung der Inschrift von Rosetta[1]) zur Kenntniss einiger wichtigen Zahlzeichen geführt, welche ich auf unserer Tafel nebst zwei anderen Zeichen dargestellt habe, deren Erklärung dem Horapollo[2]) entnommen ist. Es war lange Zeit Mode, lächelnd und mit Achselzucken über diesen letzteren halb apogryphen Autor vom Anfange des 5. Jahrhunderts nach Chr. Geb. abzusprechen und seine Competenz in Betreff des behandelten Gegenstandes geradezu zu leugnen. Es war dieses ein Schicksal, welches er mit allen Werken theilte, in welchen Thatsachen vorgetragen waren, die mit der Annahme des klassischen Philologenthums in Widerspruch standen, dass von den Griechen erst Bildung, Kunst und Wissenschaft erfunden und verbreitet worden. Musste doch in ähnlicher Weise selbst Herodot, der Vater der Geschichte, als Fabeldichter sich bezeichnen lassen. Die grossartigen Bemühungen der letzten dreissig Jahre haben indessen die Ehrenrettung der meisten jener verläumdeten Schriftsteller aufs Klarste zu Tage gebracht, und so hat auch Horapollo sich als durchaus wahrheitsliebend, als vollständig in der Hieroglyphensprache bewandert und als untadelhafte Controle bei modernen Uebersetzungen bewährt. Es scheint danach auch gerechtfertigt, nach ihm den Stern[3]) als Zeichen der 5 und zwei sich schneidende Linien[4]) als Zeichen der 10 anzunehmen. Hierbei drängen sich aber mehrere Bemerkungen von vielleicht nicht ganz unbedeutender Tragweite auf[5]). Das Zeichen der 1 ist nämlich mit dem von den Römern benutzten Striche ganz identisch; das Zeichen der 10, wie Horapollo es beschreibt, weist verschoben auf das römische Kreuz hin; und endlich das Zeichen der 100 zu Rosetta ist vollständig das spätere römische C. So wären also von den vier selbstständigen Zahlenelementen der Römer I, X, C, M[6]) drei auf die Aegypter zurückgeführt, und ich wenigstens möchte danach die in meinem ersten Aufsatze noch angenommene Entstehung aus Strichen um so mehr aufgeben, als auch in sehr

1) Vergl *W. Osburn, The monumental history of Egypt. London* 1854. 8. *Vol. I. p.* 147.

2) *Horapollinis Niloei Hieroglyphica edidit Leemans. Amsterdam* 1835.

3) *Ἀστέρα γράφοντες δηλοῦσι τὸν πέντε ἄριθμον· ἐπειδὴ πλήθους ὄντος ἐν οὐρανῷ πέντε μόνοι ἐξ ἀυτῶν κινόυμενοι τὴν τοῦ κόσμου οἰκονομίαν ἐκτελοῦσιν.* Lib. I cap. 13

4) *Γραμμὴ ὀρθὴ μία ἅμα γραμμῇ ἐπικεκαμμένῃ δέκα γράμμας ἐπιπέδους σημαίνουσιν.* Lib. II. cap. 30.

5) Die von Champollion aus dem sogenannten Grab der Zahlen entnommenen Hieroglyphen stimmen fast identisch mit denen aus Rosetta überein. Die Numerationsmethode ist additiv und nur selten multiplicativ.

6) V, L, D sind bekanntlich nur deren Hälften.



alten römischen Inschriften nicht blos die eckigen, sondern auch die abgerundeten Formen der Ziffern vorkommen.

Das Zeichen der Tausend in Rosetta lässt einen anderen Zusammenhang noch ahnen. Ich möchte dasselbe nämlich für einen Lotos halten und dann ergiebt sich die eigenthümliche Uebereinstimmung, dass *padma*, der Name dieser Blume auf Sanskrit, gleichzeitig auch ein Zahlwort ist, und als solches Tausend Millionen bedeutet.

Endlich das letzte Zeichen, welches zu Vergleichungen Anlass geben kann, ist der für die Fünf gebrauchte Stern. Ich will nur daran erinnern, dass die Araber als ältestes Zeichen der Fünf ihren Finalbuchstaben *He* benutzten, welcher mit einem Stern die grösste Aehnlichkeit hat. Freilich war dieser Buchstabe, wenn auch jetzt einer der letzten des arabischen Alphabetes, in einer früher gebräuchlichen Reihenfolge[1]) der fünfte, so dass die Aehnlichkeit mit dem Sterne nichts absolut Beweisendes hat. Interessant ist jedoch, dass als später die Araber, gleichviel aus welcher Quelle, die Null erhielten, sie auch dieses Zeichen mit ihrem *He* identificirten und aus Furcht vor Verwechselungen in einen Punkt concentrirten. Es ergiebt sich dieses deutlich aus einer Stelle des arabischen Scholiasten zum *Khilâsat al-Hisab*[2]), welche Nesselmann (Gesch. d. Alg. bei den Griechen, S. 103) im Original, sowie in der Uebersetzung abgedruckt hat, und welche auf Deutsch folgendermaassen lautet: „Wenn an irgend einer Stelle keine Zahl vorhanden ist, so schreibt man der Deutlichkeit wegen an der Stelle das Finalzeichen des Buchstaben *Ha*, nämlich ȣ, welches das Zeichen *Sifr*, in dem Sinne von etwas Leerem ist. Gegenwärtig ist die Veränderung eingetreten, dass das Finalzeichen *Ha* die Fünf bedeutet und für das Zeichen *Sifr* ein Punkt geblieben ist.“[3])

So ergab sich also auf ägyptischem Boden zwar manches Erwähnenswerthe, aber durchaus kein Anhaltspunkt dafür, dass Pythagoras seine Kenntniss der Zahlen dort geschöpft haben sollte. In der That stimmen auch damit die Zeugnisse der Alten überein, welche die mathematischen Kenntnisse des Pythagoras besprechen. Theon von Smyrna, Porphyr und Jamblich[4]) erzählen in ganz gleicher Weise, aus Aegypten stammten die geometrischen Kenntnisse des Pythagoras, während sie für seine arithmetischen und zahlentheoretischen Kenntnisse auf die Phöniker und Chaldäer verweisen. Begleiten wir deshalb Pythagoras in die Gefangenschaft nach **Babylon**, um zu sehen, ob und was er eigentlich dort lernen konnte. Ich

1) Jene ältere Reihenfolge, welche in den meisten Buchstaben mit der hebräischen übereinstimmt, ist noch unter dem Namen *Abudjed* in Erinnerung.

2) Ueber dieses persische Sammelwerk habe ich Bd. II, S. 361 dieser Zeitschrift Näheres angegeben.

3) Der Scholiast scheint mir hier ein Hysteronprotereon zu begehen, indem er die Null als länger bekannt, als das runde Zeichen für fünf annimmt. Hätte er indessen recht, so würde dieses nur um so mehr für die im Texte ausgesprochene Hypothese beweisen.

4) Vergl. Röth in dem citirten Bande, Note 51, 404, 817.

sage, ob er dort etwas lernen konnte, nicht als wenn ich glaubte, noch näher zeigen zu müssen, was seit Layard's und Anderer Bemühungen aus 2500jährigem Schutt klar und deutlich ans Licht kam, dass in Babylon eine ganze Civilisation mit allen ihren Vorzügen und Mängeln dem Ankommenden entgegentrat, sondern weil der Einwand leicht wäre, wie die Stellung als Gefangener einem tieferen Bekanntwerden mit der Wissenschaft der Mager hindernd in den Weg treten konnte. Sieht man doch gerade auf den Wandsculpturen der dortigen Ausgrabungen, wie Kriegsgefangene zum härtesten Frohndienste angehalten werden und unter der Peitsche des Aufsehers Statuen ziehen, Steine tragen und sonstiges Material beschaffen müssen. Allein abgesehen von dem zwölfjährigen Aufenthalte, während dessen ein so hervorragender Geist sich aus jeder Stellung zu erheben vermochte, ist doch wohl nicht anzunehmen, dass auch die gefangenen Priester zu gleich strengem Loose wie das gemeine Volk mitgeschleppt wurden, und ganz besonders dem Pythagoras, der ausser dem ägyptischen Tempeldienste auch in sämmtliche phönikische, dem assyrischen so nahe stehende Mysterien eingeweiht war[1]), musste es leicht werden, mit den babylonischen Priestern, den Magern, in nähere Berührung zu treten.

Diese besassen aber in der Keilschrift ein zwar nur aus wenigen Elementen bestehendes, aber aus diesen in überraschendster Reichhaltigkeit zusammengesetztes Alphabet nebst Zahlzeichen, deren Erklärung den nach einander folgenden Bemühungen von Hincks[2]), Rawlinson[3]), Grotefend[4]) (1847—1852) nicht Widerstand zu leisten vermochte. Ich will versuchen, das Gemeinsame dessen, was die genannten Gelehrten entdeckten, hervorzuheben, wenn auch deren Entzifferungen sich auf drei unter einander wesentlich verschiedene Arten von Keilschriften beziehen. Es ergiebt sich nämlich hier das eigenthümliche Verhältniss, dass trotz der Verschiedenheit der Sprachen gerade in der Schreibart der Zahlen die grösste Analogie herrscht. Genau betrachtet darf uns diese Thatsache bei Zahlzeichen am wenigsten wundern; auch heute werden wegen dieser Identität der Ziffern mathematische Schriften selbst von Solchen gelesen werden können, welche die Sprache des Textes absolut nicht verstehen. Und auch sonst lässt sich ein oder das andere Beispiel dafür auffinden, dass verschiedene Völker derselben Schrift sich bedienen. So erzählt Staunton[5]), dass Inselbewohner des indischen Oceans bei totaler Unkenntniss der chinesischen Sprache einen schriftlichen Verkehr in den Zeichen dieser Sprache

1) Vergl. Röth, S. 309.

2) *Hincks, On the Inscription at Van. (Journal of the Asiatic society. Vol. IX.)*

3) *Rawlinson, The Persian cuneiform Inscription at Behistun. (Journal of the Asiatic society Vol. X.)*

4) Grotefend, Die Tributverzeichnisse des Obelisken aus Nimrud. (Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. V.)

5) *Staunton, Embassy to China. Vol. I. p.* 311.

durchführen konnten, welche offenbar in ihrer Landessprache denselben Wortbedeutungen zum Bilde dienten.

Die Elemente der Keilschrift bestehen aus einem vertikalen Keile, einem horizontalen Keile und zwei mit der breiten Seite aneinander stossenden geneigten Keilen, welche letztere in der Regel Winkelhacken genannt werden. Von diesen drei Elementen wurden bisher das erste und dritte vereinzelt als Zahlzeichen gefunden, indem der Vertikalkeil die Einheit, der Winkelhacken die Zehn bedeutet (vergl. Taf. IV). Aus einzelnen neben- oder übereinander stehenden Vertikalkeilen sind alsdann die Ziffern bis neun gebildet, wobei ein ungerader Keil bald in breiterer Gestalt unter den übrigen, bald länger nach den übrigen steht, so dass die vorhergehende Doppelreihe ihn nicht überragt. Von zehn an wird, wie bereits bemerkt, der Winkelhacken hinzugenommen und dann die folgenden Zahlen aus Winkelhacken und Vertikalkeilen additiv so zusammengesetzt, dass immer die höhere Ziffer links steht. Darin scheint demnach auch der Grund zu liegen, dass der ungerade Vertikalkeil immer am Ende rechts steht. Aus der angegebenen Regel folgt nun von selbst die Vermuthung, dass ein der höhern Zahl vorgesetztes niedrigeres Element nicht mehr additiv zu nehmen sein dürfte, wie z. B. auch bei den Römern eine derartige Functionsänderung stattfand. In der That ergab sich der Operationswechsel dahin, dass ein niedrigeres Element, dem höheren vorgesetzt, dasselbe multiplicirt[1]), während dabei zugleich der Vertikalkeil den Sinn fünf annahm, so dass damit ein leichtes Zeichen für fünfzig entstand, an welches wieder additiv nach rechts fortgezählt wurde[2]). Bei der Hundert findet sich auch wieder ein Vertikalkeil am Anfange, dem aber ein horizontaler Keil folgt, so dass ich die Hypothese nicht unterdrücken kann, es dürfte vielleicht auch der horizontale Keil in der Bedeutung zwanzig noch einzeln vorkommen. Dass nämlich zwanzig auch durch zwei Winkelhacken bezeichnet wird, kann bei einer an Varianten so überreichen Schrift nicht als Einwand gelten[3]). Wenigstens bleibt von hier an das Gesetz der Addition zur Rechten, der Multiplication zur Linken bis in die höchsten Zahlen, so dass Tausend als 10×100 durch Vereinigung der drei Elemente (Winkelhacken, Vertikalkeil, Horizontalkeil) sich darstellt, und in ähnlicher Weise auch weiter numerirt wird. Ob der Vertikalkeil vor 1000[4])

1) Gewissermaassen als Coefficient des folgenden Gruppenzeichens, also ganz in moderner Weise.

2) Hincks scheint der Ansicht zu sein, dass der einer höheren Zahl vorhergehende Vertikalkeil schon allein das fünffache folgende Element bedeute. Demnach liest er das als 50 erklärte Zeichen als 60 und will in Khorsabad einen längeren Vertikalkeil vor zwei kleineren über einander stehenden Vertikalkeilen als 7 erkannt haben.

3) Wichtiger ist der Einwand von Hincks, welcher das Zeichen für 100 für den Anfangsbuchstaben des Zahlwortes hält und ebenso das Zeichen für 1000, das also nur zufällig der Multiplicationsregel zu folgen scheine. Derselbe will auch noch ein Zeichen für 10000 gefunden haben, welches auf der Tafel eingeklammert ist.

4) Dieses Zeichen findet sich *Br. Mus. Plate* 13, *Nr.* 2.



etwa 5000 bezeichnet, muss ich dahin gestellt lassen. Grotefend scheint diese Ansicht nicht zu theilen, indem er gerade in Bezug auf diese Stelle bemerkt: „Das Zeichen 1000 wurde so sehr als ein Nennwort behandelt, dass man sogar einen einzelnen Vertikalkeil davorgesetzt findet."

Wir haben somit hier ein System der Bezeichnung, welches von dem Abacussystem in doppelter Weise sich unterscheidet. Erstens, und das wäre durchaus ohne Bedeutung, dadurch, dass beim Abacus die Gruppenzeiger über den Ziffern stehen (resp. ganz weggelassen werden), während hier die Gruppenzeiger 10, 100, 1000 in der Regel den Ziffern nachgesetzt werden[1]). Zweitens ist aber dann noch der Hauptunterschied, dass beim Abacus und bei sämmtlichen übrigen Systemen, die mir bekannt geworden, die Ziffern in jeder Stellung denselben Werth behalten, während hier der Wechsel von eins in fünf charakteristisch und bisher ganz einzig auftritt. Dieser letzte Unterschied kann deshalb auch nicht genug hervorgehoben werden und so sind wir abermals in der Hoffnung getäuscht, sichere Spuren der künftigen pythagorischen Zeichen zu finden.

Freilich giebt Layard[2]) an, es existire noch eine assyrische Cursivschrift, welche, dem Hebräischen ähnlich, von rechts nach links sich lese, und welche auch eigenthümliche Zahlzeichen besitze, mit denen die Backsteine numerirt wurden; doch ist diese kurze nichtssagende Angabe Alles, was ich über diesen Gegenstand auffinden konnte.

Und dennoch muss es in Babylon gewesen sein, wo Pythagoras jene Kenntnisse schöpfte; dafür sprechen zu deutlich jene bereits erwähnten Angaben der Alten. So bleibt uns nur noch, bei den Völkern nachzuforschen, welche in damaliger Zeit mit Babylon in beständigem Handelsverkehr standen, und deren Rechen- und Schreibart dem von Wissbegierde Erfüllten nicht fremd bleiben konnte, wenn gleich der durchaus conventionelle Styl chaldäischer Kunst und Wissenschaft in starrer Undurchdringlichkeit nichts davon aufnahm. Bei dieser Untersuchung fühlen wir uns aber auf Freudigste überrascht durch die deutlichen Spuren des Gesuchten, wenn uns gleich andererseits eine kleine Verwirrung wieder dadurch bevorsteht, dass zwei Quellen sich ergeben, deren jede gewisse Gründe innerer Berechtigung in sich trägt.

Das erste Volk, von dem ich rede, ist das der **Chinesen**. Schon Hager stellte die Hypothese eines chinesischen Ursprungs unserer Ziffern auf und vertheidigte sie ausführlich in seiner „*Memoria sulle cifre arabiche*"[3]), auf welche sich die folgenden Betrachtungen wesentlich stützen. Ausser-

---

1) Die rein additive Bezeichnung von 20, 30, 40 u. s. w. wäre so als Ausnahme zu betrachten.

2) *Niniveh and its remains. London* 1849. *Vol. II. p.* 165.

3) Diese Abhandlung ist zuerst abgedruckt in den „Fundgruben des Orients", Wien 1811. Bd. II. S. 65; dann in der *Bibliothèque Britannique, Genève* 1812, *Mai Nr.* 393, *Littérature p.* 15; endlich als selbstständige Brochüre, Milano 1813. Ich konnte nur den ersten und dritten Abdruck vergleichen.

dem aber wurde noch der Aufsatz von Biernatzki: „Die Arithmetik der Chinesen"[1]) einer genauen Berücksichtigung unterworfen.

Dass die Chinesen in frühester Zeit mit einer ganzen Reihe von Kenntnissen vertraut waren, welche bei den Europäern erst spät Eingang fanden, grösstentheils nachentdeckt werden mussten, ist bekannt genug. Ich erinnere nur an die Bereitung des Schiesspulvers, an die Benutzung des Compasses, an die wichtigste aller Erfindungen, an die der Buchdruckerkunst, welche unbestrittenes Eigenthum jenes fernsten Ostens war lange bevor auch nur die Morgendämmerung der Wissenschaft für Europa erwachte. Weniger erforscht waren bis vor einigen Jahren die Kenntnisse des alten Chinas in Arithmetik und Geometrie und erst ein Aufsatz: *Jottings on the science of chinese arithmetic*[2]) im *Shanghae Almanac for* 1853 *and Miscellany, printed Shanghae*, hat auch hier den Beweis mannichfacher Prioritätsrechte für China geführt. So weist die Sage wenigstens den Anfang der gegenwärtig gebräuchlichen chronologischen Aera der Cyclen auf das 61. Jahr des Kaisers Hwang-ti zurück, welches dem Jahre 2637 vor Chr. Geb. entspricht. So setzte nach dem Schu-king Kaiser Yaou (2300 vor Chr. Geb.) ein Collegium von Astronomen ein, um die nöthigen Zeitrechnungen zu machen und einen Kalender abzufassen. So existirt bis auf den heutigen Tag eine mathematische Schrift „Tschau-pi" (Schenkelbein des Tschau)[3]), welche von dem Kaiser Tschau-kong selbst (um 1100 vor Chr. Geb.) oder doch unter seiner Mitwirkung verfasst wurde, und dessen erster Abschnitt in übersichtlicher Weise den Inhalt des ganzen Werkes angiebt. Nicht ohne Staunen sieht man darin schon den Satz von den Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks in folgender Gestalt auftreten: „Zerlegt man einen rechten Winkel in seine Bestandtheile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie gleich 5, wenn die Basis gleich 3 und die Höhe gleich 4 ist." Und wenn wir in späteren Paragraphen die Stelle finden: „Aufgerichtet bedient man sich des rechten Winkels zu Höhenmessungen. Umgekehrt braucht man ihn, um Tiefen zu ergründen. Mittelst des horizontal liegenden rechten Winkels bestimmt man Entfernungen", in welcher die Idee der ganzen neueren trigonometrischen Vermessungen ausgesprochen liegt, dann können wir nur in die Schlussworte jenes Abschnittes mit einstimmen: „Tschau-kong rief aus: In der That, das ist vortrefflich". Von weiteren Sätzen, deren Vorhandensein bei den Chinesen in dem Aufsatze von Biernatzki besprochen ist, will ich hier nur noch eine Auflösung unbestimmter Aufgaben erwähnen, welche

---

1) Crelle's Journal, Bd. LII, S. 59 ff.

2) Dieser Aufsatz wird von Biernatzki als seine Hauptquelle angegeben. Ich konnte mir das Original nicht verschaffen.

3) Die Basis und Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks wurden nämlich, nach Biernatzki, mit den Namen Schenkel und Bein angedeutet, ähnlich wie man auch im Deutschen von den Schenkeln eines Winkels spricht.

unter dem Namen Ta-yen (grosse Erweiterung) von Sun-Tsze[1]) gelehrt wurde, und welche in den Zeichen unserer Algebra sich folgendermaassen darstellt. Soll eine Zahl x gefunden werden, welche den Bedingungen entspricht:

$$x \begin{cases} \equiv n_1 \pmod{a_1} \\ \equiv n_2 \pmod{a_2} \\ \equiv n_3 \pmod{a_3}, \end{cases}$$

so bilde man drei Hilfszahlen h_1, h_2, h_3 in der Weise, dass

$$h_1 = (a_2 \,.\, a_3)^2 - a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \, E\left(\frac{a_2 \,.\, a_3}{a_1}\right),$$

$$h_2 = (a_1 \,.\, a_3)^2 - a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \, E\left(\frac{a_1 \,.\, a_3}{a_2}\right),$$

$$h_3 = (a_1 \,.\, a_2)^2 - a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \, E\left(\frac{a_1 \,.\, a_2}{a_3}\right),$$

wo E das bekannte Abel'sche Zeichen für Ganze bedeutet. Alsdann wird der Aufgabe genügt durch

$$x = h_1 \,.\, n_1 + h_2 \,.\, n_2 + h_3 \,.\, n_3 .$$

Offenbar ist übrigens diese Auflösung im Allgemeinen unrichtig, wenigstens nur in dem sehr speciellen Falle richtig, wenn gleichzeitig

$$(a_2 \,.\, a_3)^2 \equiv 1 \pmod{a_1}$$
$$(a_1 \,.\, a_3)^2 \equiv 1 \pmod{a_2}$$
$$(a_1 \,.\, a_2)^2 \equiv 1 \pmod{a_3};$$

und so scheinen gerade in Untersuchungen der unbestimmten Analytik die Chinesen hinter anderen gleichzeitigen Culturvölkern eher zurück gewesen zu sein.

Natürlich ist aber von solchen verhältnissmässig höheren Untersuchungen auf die Existenz der Zahlzeichen keinenfalls ein ungünstiger Rückschluss zu ziehen. Für das Vorhandensein solcher Zeichen spricht hingegen besonders ein Grund, welchen schon Hager scharf hervorgehoben hat. Die Chinesen, so lauten ungefähr seine Schlüsse, haben eine Schrift ohne irgend Buchstabenbezeichnung; jedes Wort wird vielmehr durch ein besonderes Zeichen angegeben. Da aber in jedem Buche wohl auch Zahlenausdrücke vorkommen, bald grössere, wenn es der Gegenstand so mit sich bringt, jedenfalls aber doch kleinere, wie zwei, drei, vier, so müssen auch Zeichen für solche Zahlwörter erfunden worden sein, und zwar gleichzeitig mit der übrigen Schrift. Wenn nun chinesische Zahlzeichen mit den unsrigen Aehnlichkeit haben, so müssen sie doch wohl dort erfunden sein. Denn wie so hätten die Chinesen gerade die Ziffernschrift allein von den Fremden übernommen, die dem Principe ihrer Sprache schon so nahe liegt?

Sehen wir nun zu, welche Zeichen Hager als echt chinesisch uns angiebt und wie er deren Zusammenhang mit unseren Ziffern erläutert. Wir

1) Dieser Schriftsteller lebte nach Einigen 220 vor Chr. Geb., wahrscheinlicher im dritten Jahrhundert nach Chr. Geb.

werden jetzt im Stande sein, die Bedeutsamkeit dieser Vergleichung zu würdigen. Es ist in der That keinem Zweifel unterworfen, dass die Zeichen, welche Hager für eins, zwei, drei, fünf, acht, neun angiebt, die grösste Aehnlichkeit besonders mit den Zeichen des Altdorfer Codex ergeben, wo sie in der Bedeutung eins, zwei, drei, acht, sieben, vier wieder vorkommen; es lässt sich ferner nicht leugnen, dass die Null der Chinesen von Hager in ganz moderner Gestalt abgebildet ist, und dass endlich die Schreibweise nach Rangordnung, wie derselbe Schriftsteller sie uns angiebt, völlig mit unserer heutigen übereinstimmt.

Trotz dieser wichtigen Analogieen steigen doch einzelne Zweifel an der Richtigkeit dieser Abstammung auf. Ein Einwand, den man erheben könnte, bestände darin, ob dem Principe der chinesischen Sprache nicht gerade das Zahlensystem widerspräche; ob nicht vielmehr eigentlich für jede neue Zahl ein neues Zeichen hätte erfunden werden müssen. Dem steht indessen siegreich entgegen, dass die Chinesen auch sonst zusammengesetzte Wörter kennen, welche durch Neben- oder vielmehr Untereinanderstellung der Zeichen für die einzelnen Wörter gebildet werden.

Ein anderer Einwand besteht darin, dass selbst Hager nicht im Stande ist, alle Ziffern aus China herzuleiten, und für den Ursprung einiger auf andere Quellen verweist; gewiss ein Zeichen von Schwäche bei seiner Hypothese.

Endlich der wichtigste Gegengrund ist folgender. Nach Hagers Annahme kannten die Chinesen vollständig die Schreibweise der Zahlen mit Positionswerth und Andeutung des Nichtvorhandenseins von Einheiten eines gewissen Ranges. Wenn nun Pythagoras von ihnen die Zahlenschrift gelernt haben soll, so scheint es im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass er nur die Hälfte des Erlernten angewandt haben sollte. Mag auch der sogenannte pythagoräische Lehrsatz aus chinesischer Urquelle stammen und dem directen oder indirecten Zusammenhange des Pythagoras mit chinesischer Kultur[1]) zum Stützpunkte dienen: wie können wir annehmen, dass er Positionswerth und Werthziffern beibehalten, den Gebrauch der Null wieder vergessen haben sollte. Und dass der Gebrauch einer solchen nicht stattfand, dafür zeugt schon der negative Umstand, dass gerade der ἄβαξ der alten Griechen nur eine Rechenmethode blieb und niemals eigentliches Volkseigenthum als Schrift wurde.

Ich weiss sehr wohl, dass in den Manuscripten des Boethius aus Altdorf und Chartres ausser den Zeichen des Textes auch noch auf der Rechentafel Zahlzeichen mit semitischen Namen vorkommen, welche von den angegebenen sich etwas unterscheiden und auch noch ein zehntes Zeichen neben sich haben, welches als Null gelesen wird. Aber gerade die Ver-

1) Für den Zusammenhang von China mit Assyrien zeugen auch Glasfläschchen mit chinesischer Inschrift, welche Layard in Arban unter altassyrischem Schutte fand. Vergl. dessen *Nineveh and Babylon*. London 1853, p. 279.

schiedenheit der Zeichen in einem und demselben Manuscripte, auf einer und derselben Seite spricht, wie Chasles[1]) sehr richtig bemerkt hat, gegen die Gleichzeitigkeit und für ein späteres Einschmuggeln dieser letzteren Ziffern, die auf dem Tableau ohnedies an durchaus ungehöriger Stelle sich befinden. Ich kann daher die Ansicht nicht aufgeben: Pythagoras kannte eine Rechentafel; er kannte auch Zeichen für die 9 Werthziffern, welche auf der Rechentafel benutzt wurden; aber die Null kannte er nicht; und somit hat er die von Hager als altchinesisch bezeichnete Zahlschrift nicht gekannt.

Oder hat Hager in Beziehung auf die Null geirrt? Manches scheint dafür zu sprechen. So besonders der Umstand, dass nach der chinesischen Grammatik von Abel-Rémusat (Paris 1822) ein Unterschied zwischen neu- und altchinesischen Zahlzeichen gemacht ist; dass aber bei den letzteren keine Null vorkommt, während selbst in der neuen Schrift die Null nur in der Mitte, nie am Ende der Zahlen benutzt wird[2]). Den Unterschied, dass die alten Zahlen übereinander, die neuen nebeneinander geschrieben erscheinen, führe ich nur der Vollständigkeit wegen an. Darnach könnte vielleicht doch die alte Schreibweise der Chinesen dem pythagorischen System nicht widersprechen, und es liegt hier jedenfalls ein Gegenstand zur Untersuchung vor, über welchen nur Sinologen abzuurtheilen berechtigt sind.

Für das Vorhandensein der Null bei den alten Chinesen muss ich allerdings noch auf einen wichtigen Punkt aufmerksam machen, den Hager auffallend genug übersehen hat. Ich meine das dyadische Zahlensystem mit den Zeichen für Eins und Null, welches schon zu Fohi's Zeiten (etwa 2200 vor Chr. Geb.) in einem astronomischen Werke vorkommen soll. Leibnitz lieferte bekanntlich in seiner *Arithmétique binaire*[3]) Proben eines dyadischen Systems, in welchem er eine allegorische Darstellung der Schöpfung aus Nichts sah. *Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum* schrieb er schon 1697 an den Herzog von Braunschweig, und fügte hinzu, er wolle seine Erfindung dem Pater Grimaldi nach China schicken, in der Erwartung, dass ihr tiefer Sinn den Kaiser von China bekehren möge. Auf diese Weise lernte der Missionär Bouvet die Dyadik kennen, welche ihm alsbald zur Entzifferung alter Manuscripte diente. Wenn aber somit die Null in einem Systeme bekannt war, so ist doch wohl kein Grund vorhanden, ihre Existenz in einem anderen Systeme zu leugnen.

Ich komme nun zu dem zweiten Volke, welches mit Babylon in Verkehr stand und bei welchem Spuren unserer Ziffern sich finden, zu den

---

1) Geschichte der Geometrie (deutsche Uebersetzung) S. 533 Note.

2) Vergl. die Bezeichnungsweise auf der beigegebenen Tafel. Die altchinesischen Ziffern ohne Null sind nach Abel-Rémusat p. 49. Indessen findet sich ebendaselbst p. 115 neben den neuen Kaufmannsziffern ein altes sehr complicirtes Zeichen für Null.

3) *Mémoires de l'académie des sciences. Année* 1703.

Indern. Es ist zum Volksausdrucke geworden, unsere Ziffern die indischen zu nennen, und so sehr ich damit einverstanden bin, dass weit verbreiteten Ansichten im Allgemeinen historische Wahrheit anhaftet, so muss man doch, wo es um eine Abstammung sich handelt, sich nicht dadurch täuschen lassen, dass oft der Name des blossen Vermittlers unterschoben wird. Heissen doch die Ziffern vielleicht noch häufiger arabische, als indische. Und ähnlicher Weise wurde, nach Hager, das chinesische Papier von den Arabern als Papier von Samarkand bezeichnet, weil sie es am dortigen Handelsplatze erhielten. Es ist demnach gerade hier um so nothwendiger, kritisch zu verfahren.

Dass die Inder wenigstens schon lange in dem Rufe standen, Erfinder unserer Zahlzeichen zu sein, dafür sprechen eine Menge Stellen seit Leonardo Fibanacci, der schon den *Modus Yndorum* hervorhebt. Von späteren Quellen will ich nur noch den schon genannten griechischen Mönch Maximus Planudes erwähnen, der sich zudem in einer Weise ausspricht[1]), als wenn sowohl die neun Werthzeichen, als auch die Null von den Indern erfunden worden, aber ohne dass Gleichzeitigkeit der Einführung anzunehmen wäre.

Nicht minder stimmen die Sanskritgelehrten unseres Jahrhunderts mit der Sage überein. So erwähnt Lassen in einem Aufsatze über den Gebrauch der Buchstaben zur Bezeichnung der Zahlen bei den indischen Mathematikern[2]) die Entdeckung der Zahlzeichen in indischen Inschriften, die etwa 250 Jahre älter als die Anfänge unserer Zeitrechnung seien; und namentlich Prinsep[3]) will es ausser allen Zweifel gesetzt haben, dass die älteste Gestalt der indischen Zahlreihen nichts Anderes als die Anfangssylbe des betreffenden Zahlwortes war. Ich konnte mir leider bisher das Original nicht zur Einsicht verschaffen und muss auf die Autorität von Bonfey[4]) und Brockhaus[5]) hin die Richtigkeit seiner Hypothese annehmen. So sehr ich aber die Competenz dieser Gelehrten anerkenne, so benutze ich doch diese Gelegenheit, um irgend Männer vom Fache, denen die Quelle zugänglich ist, zu bitten, nähere Auszüge aus jener Prinsep'schen Abhandlung dem mathematischen Publicum vorzulegen.

Wenn nun in dieser Weise einestheils die Originalität der Ziffern bei den Indern gesichert ist, so steht eben so fest die Möglichkeit, dass Pytha-

---

1) *Οἱ τῶν ἀστρονόμων φιλοσοφώτεροι, ἐπὲι ὁ μὲν ἀριθμὸς ἔχει τὸ ἄπειρον, τοῦδὲ ἀπέιρου γνῶσις. ὀυκ ἔστιν ἐφεῦρον σχήματά τινα καὶ μέθοδον δι' ἀυτῶν ὡς ἂν τὰ ἐν χρήσει ἀριθμῶν ἐυσκοπώτερον κατανοῆται καὶ ἀκριβέστερον· ἐισὶ δὲτὰ σχήματα ἔννεα μόνα ἃ κ' ἐισὶ ταῦτα·* (folgen die neun Zeichen) *τιθέασιδὲ καὶ ἕτερόν τι σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν κατ' Ἰνδοὺς σημαῖνον οὐδὲν. καὶ τὰ ἐννέα σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικὰ ἔστιν· ἡ δὲ τζίφρα γράφεται ὄντως, ο.*

2) Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes Bd. II, S. 419.

3) In einem berühmt gewordenen Aufsatze: *Journal of Bengal* 1838, April p. 348.

4) Artikel Indien bei Ersch und Gruber. S. 264.

5) Zur Geschichte des indischen Zahlensystems (Zeitschrift für Kunde des Morgenlandes Bd. IV, S. 74).

goras mit denselben bekannt wurde, da sein Zusammentreffen mit indischen Priestern ausdrücklich berichtet wird[1]).

Es bliebe also nur noch der Einwurf wegen der Null, den ich schon bei den Chinesen vorführte. Allein auch dieser löst sich hier auf's Schönste durch den Nachweis, dass in der That die Null erst nacherfunden wurde und zu Pythagoras Zeiten noch gar nicht existirte. Ich habe schon auf Maximus Planudes in dieser Beziehung hingewiesen. Weit schlagender sind indessen die Gründe, welche Brockhaus in dem angeführten Aufsatze besonders nach Rask[2]) entwickelt. Dort wird nämlich die seit urältester Erinnerung auf der Insel **Ceylon** existirende Zahlenbezeichnung in Betracht gezogen, welche, sowie die Gesammtbildung jenes Volkes, aus Indien sich herdatire und unstreitig im fünften Jahrhundert vor Chr. Geb. von dem Continente herüber gekommen sei. Diese Bezeichnungsweise lässt demnach einen Rückschluss auf die indischen Ziffern zu, wie sie noch hundert Jahre nach Pythagoras geschrieben wurden. Und so zeigt es sich denn, dass damals die Gruppenzeiger allerdings noch immer geschrieben, nicht blos durch Position angedeutet wurden, dass demnach das Zeichen der Null gar nicht denkbar, dessen Erfindung jedenfalls mit dem Weglassen der Gruppenzeiger Hand in Hand gehen musste. Ich will nicht einmal eine andere Bemerkung von Brockhaus besonders hervorheben, dass die vielen Gruppennamen[3]) des alten Sanskrit wohl auf eben so viele verschiedene Gruppenzeiger hinweisen, so glaube ich doch nach dem Bisherigen, die Annahme berechtigt Zweierlei bei den alten Indern festgestellt zu sehen: das Benutzen von Gruppenzeigern und Werthziffern, welche jene Gruppenzeiger multipliciren, und das Nichtvorhandensein der Null.

Das ist es aber gerade, was wir bei Pythagoras wiederfinden, und somit hat der indische Ursprung unserer Ziffern auch innere Wahrscheinlichkeit[4]). Für Diejenigen, welche den Resultaten meines früheren Aufsatzes Glauben schenken, hoffe ich demnach, durch die gegebene Zusammenstellung das Sagenhafte der bisherigen Annahmen in eine gesichertere Gestalt gebracht zu haben. Für Die aber, welche der Grundhypothese der Vermittelung des Pythagoras zur ältesten Einführung der Ziffern in Europa noch nicht beistimmen wollen, hoffe ich doch den Beweis geliefert zu haben, dass es mit der Einführung durch Inder und Araber nicht so ganz einfach zugegangen sein mag, wie sie wähnen. Die Existenz der in Asien nachgewiesenen alten Systeme lässt zum Mindesten darüber Ungewissheit

---

1) Röth, Note 401 citirt Clemens Alexandrinus. Stromat. I, p. 304 *Ἀλέξανδρος δὲ ἐν τῷ περὶ Πυθαγορικῶν συμβόλων ἀκηκοέναι τε πρὸς τούτοις Γαλατῶν καὶ Βραχμάνων τὸν Πυθαγόραν βούλεται.*

2) Rask, *Singalesik Skriftläre.* Kolombo 1821.

3) Es giebt solcher besonderen (nicht zusammengesetzten) Namen bis zu 10^{17}.

4) Es bleiben zum Schlusse dieser Untersuchungen noch Nachforschungen über die präcise Zeit der Erfindung der Null anzustellen. Dazu scheint aber das bisher vorliegende Material noch nicht zu genügen und nur sehr hypothetisch möchte ich diese Erfindung vorläufig etwa in die Zeit des Arjabhat't'a setzen.

zu, wie viel von der Erfindung den Indern, wie viel den Chinesen zukomme, und so dürften bei unseren Gegnern wenigstens Zweifel rege gemacht sein, welche sie zu einem eigenen Studium der ältesten Zeichen führen mögen. Dann wird es auch nicht lange dauern, bis sie ganz zu unserer Ansicht bekehrt sein werden.

XV.

Ueber confocale Curven und Flächen zweiten Grades.

Von Dr. Heilermann in Coblenz.

Euler bestimmt in der *Introductio* die Brennpunkte eines Kegelschnittes dadurch, dass er in der grossen Achse einen Punkt aufsucht, dessen Entfernung von einem beliebigen Punkte der Curve rational durch die Coordinaten des letzteren dargestellt werden kann. Aus dem Werthe dieser Entfernung ergiebt sich dann sogleich das bekannte Gesetz über die Summe der Brennstrahlen einer Ellipse und die Differenz der Brennstrahlen einer Hyperbel. Die ganzen Sehnen eines Brennpunktes sind, so viel ich weiss, bisher noch nicht zum Gegenstand einer besondern Untersuchung gemacht worden, obwohl sie sich vor den übrigen in mehrfacher Beziehung, unter anderm durch dasselbe Merkmal auszeichnen, welches von Euler für die Bestimmung der Brennpunkte zu Grunde gelegt wurde. Einige Eigenschaften solcher Sehnen waren die Veranlassung und bilden den Ausgangspunkt der nachfolgenden Abhandlung.

§. 1.

Wenn in der Ellipse

1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Sehne

2) $$\frac{x}{e}+\frac{y}{f}=1,$$

welche auf den Achsen die Stücke e und f abschneidet, gezogen wird, so trifft diese die Ellipse in zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2), deren Coordinaten folgende Werthe haben:

$$3)\quad \begin{cases} x_1 = ae\,.\,\dfrac{af^2 + b\sqrt{a^2f^2 + b^2e^2 - e^2f^2}}{a^2f^2 + b^2e^2}, \\ y_1 = bf\,.\,\dfrac{be^2 - a\sqrt{a^2f^2 + b^2e^2 - e^2f^2}}{a^2f^2 + b^2e^2}, \\ x_2 = ae\,.\,\dfrac{af^2 - b\sqrt{a^2f^2 + b^2e^2 - e^2f^2}}{a^2f^2 + b^2e^2}, \\ y_2 = bf\,.\,\dfrac{be^2 + a\sqrt{a^2f^2 + b^2e^2 - e^2f^2}}{a^2f^2 + b^2e^2}. \end{cases}$$

Die Länge der Sehne, welche mit $2s$ bezeichnet werde, ist nun bestimmt durch die Gleichung

$$4s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

und werden hierin die vorstehenden Werthe eingesetzt, so entsteht

$$4)\quad s^2 = \frac{a^2b^2(e^2 + f^2)(a^2f^2 + b^2e^2 - e^2f^2)}{a^2f^2 + b^2e^2}.$$

Damit nun der Werth von s rational durch die Abschnitte e und f ausgedrückt werden könne, muss $e^2 + f^2$ ein Factor von $a^2f^2 + b^2e^2 - e^2f^2$ sein; es ist aber

$$\frac{a^2f^2 + b^2e^2 - e^2f^2}{e^2 + f^2} = b^2 + \frac{(a^2 - b^2 - e^2)f^2}{e^2 + f^2},$$

also wird nur dann für jeden Werth von f die Summe $(e^2 + f^2)$ ein Factor von $(a^2f^2 + b^2e^2 - e^2f^2)$ sein können, wenn

$$5)\quad a^2 - b^2 - e^2 = 0,$$

d. h. wenn die Gerade 2) durch den Brennpunkt geht.

Es sind hiernach die Brennpunkte einer Ellipse die einzigen Punkte, deren Sehnen sämmtlich durch die Stücke, welche sie auf den Achsen abschneiden, rational ausgedrückt werden können.

Wenn nun der Gleichung 5) oder

$$e^2 = a^2 - b^2$$

Genüge geschieht, so ergiebt sich aus 4):

$$6)\quad s = ab^2\,.\,\frac{e^2 + f^2}{a^2f^2 + b^2e^2},$$

und dieser Werth von s bleibt auch dann noch real, wenn $a < b$, also der Brennpunkt, durch welchen die Sehne 2) geht, imaginär wird.

Da die Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 der Gleichung 2) genügen, also

$$\frac{x_1}{e} + \frac{y_1}{f} = 1 \text{ und } \frac{x_2}{e} + \frac{y_2}{f} = 1,$$

so lassen sich auch die Abschnitte e und f durch dieselben rational ausdrücken, es ist nämlich

$$7)\quad \begin{cases} e = \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_2 - y_1}, \\ f = -\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2 - x_1}, \end{cases}$$

und durch Einsetzung dieser Werthe ergiebt sich aus 6):

$$s = ab^2 \cdot \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{a^2 (y_1 - y_2)^2 + b^2 (x_1 - x_2)^2} = \frac{4ab^2 s^2}{a^2 (y_1 - y_2)^2 + b^2 (x_1 - x_2)^2},$$

folglich ist:

$$8) \qquad s = a \left[\left(\frac{x_1 - x_2}{2a} \right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2b} \right)^2 \right].$$

Es können mithin alle Sehnen der Brennpunkte durch die Coordinaten ihrer Endpunkte rational ausgedrückt werden.

Noch einfacher als die Ausdrücke 6) und 8) wird der Werth für die Halbsehne s, wenn man die Coordinaten des Punktes einführt, dessen Tangente parallel zu der Sehne ist. Es sei die Gerade

$$9) \qquad \frac{\xi}{a^2} \cdot x + \frac{\eta}{b^2} \cdot y = 1,$$

welche die Ellipse 1) im Punkte (ξ, η) berührt, zu den Sehnen 2) parallel, also

$$\frac{a^2}{\xi} : \frac{b^2}{\eta} = e : f.$$

Hierdurch geht die Gleichung 6) über in

$$s = ab^2 \cdot \frac{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4}}{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}},$$

und da der Punkt (ξ, η) ein Punkt der Ellipse 1), also

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

so ist

$$10) \qquad s = ab^2 \cdot \left(\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} \right).$$

Wird nun noch vom Mittelpunkte der Ellipse 1) auf die Berührende 9) eine Senkrechte p gefällt, und der Winkel, welchen sie mit der Achse $2a$ bildet, mit α bezeichnet, so ist

$$\frac{p}{\cos \alpha} = \frac{a^2}{\xi} \text{ und } \frac{p}{\sin \alpha} = \frac{b^2}{\eta},$$

folglich

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4}.$$

Die Gleichung 10) geht nun durch Anwendung der vorstehenden über in

$$11) \qquad s = \frac{ab^2}{p^2} \quad \text{oder} \quad sp^2 = ab^2,$$

d. h.: **Die Hälfte einer Brennpunkts-Sehne, multiplicirt mit dem Quadrate der Entfernung der zu derselben parallelen Tangente vom Mittelpunkte, ist constant.**

Bezeichnet man den Durchmesser der Ellipse 1), welcher zu der Berührenden 9) parallel ist, mit $2d$, so ist bekanntlich

$$pd = ab,$$

und wird mittelst dieser Gleichung die Senkrechte p aus der Gleichung 11) alinimirt, so entsteht

$$12) \qquad s = \frac{d^2}{a},$$

d. h.: Jeder Durchmesser einer Ellipse ist mittlere Proportionale zu der demselben parallelen Brennpunkts-Sehne und der grossen Achse.

Diese Eigenschaft der Brennpunkts-Sehne ist eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes, nach welchem die kleine Achse mittlere Proportionale ist zu dem Parameter und der grossen Achse.

Die Einfachheit des Satzes 12) lässt erwarten, dass derselbe auch noch auf einfachere Weise hergeleitet werden kann. Bezeichnet man mit q die vom Mittelpunkte auf die Sehne 2) gefällte Senkrechte, so ist

$$\frac{s^2}{d^2} = 1 - \frac{q^2}{p^2},$$

dazu ist

$$\frac{q}{p} = \frac{e}{a^2 : \xi},$$

folglich

$$\frac{s^2}{d^2} = 1 - \frac{e^2 \xi^2}{a^4} = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{e^2 \xi^2}{a^4} = b^2 \left(\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4}\right),$$

mithin

$$\frac{s^2}{d^2} = \frac{b^2}{p^2},$$

oder

$$s = \frac{bd}{p} = \frac{d^2}{a},$$

wie auch oben gefunden wurde.

Wenn man den zu $2d$ conjugirten Durchmesser mit $2d_1$ und die zu diesem parallele Brennpunkts-Sehne mit $2s_1$ bezeichnet, so ist nach 12)

$$s_1 = \frac{d_1^2}{a}.$$

Durch Verbindung der Werthe s und s_1 entsteht

$$s + s_1 = \frac{d^2 + d_1^2}{a},$$

oder da bekanntlich

$$d^2 + d_1^2 = a^2 + b^2,$$

so ist

$$13) \qquad s + s_1 = \frac{a^2 + b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}.$$

Werden zur Abkürzung zwei Sehnen, welche zu conjugirten Durchmessern parallel sind, selbst „conjugirte" genannt, so ist der in vorstehender Gleichung enthaltene Satz folgender:

Die Summe zweier conjugirten Brennpunkts-Sehnen einer Ellipse ist constant und zwar gleich der grossen Achse vermehrt um den Parameter.

Durch Multiplication der Werthe von s und s_1 erhält man

$$s s_1 = \frac{d^2 d_1^2}{a^2},$$

und wenn man den Winkel, welchen die Durchmesser $2d$ und $2d_1$ mit einander bilden, mit φ bezeichnet, so ist

$$d d_1 \sin\varphi = a b,$$

folglich

$$14) \qquad s s_1 = \frac{b^2}{\sin^2\varphi},$$

oder: **Die mittlere Proportionale zu den Hälften zweier conjugirten Brennpunkts-Sehnen ist Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, in welchem die kleine Halbachse Kathete und der ihr gegenüberliegende Winkel gleich dem Winkel der conjugirten Sehnen ist.**

Sind insbesondere die conjugirten Sehnen einander gleich, so geht die Gleichung 14) über in

$$15) \qquad s = \frac{b}{\sin\varphi},$$

d. h.: **Fällt man von einem Endpunkte einer Brennpunkts-Sehne, welche der conjugirten gleich ist, eine Senkrechte auf den zur conjugirten parallelen Durchmesser, so ist diese Senkrechte gleich der halben kleinen Achse.**

§. 2.

Die Brennpunkte der Ellipse 1) können angesehen werden als eine Ellipse, deren kleine Ache Null ist; diese Ellipse hat dann mit der Ellipse 1) die Brennpunkte gemeinsam, und jede Gerade, welche durch einen dieser Punkte geht, ist als Tangente derselben zu betrachten. Wir wollen jetzt untersuchen, welche von den im vorigen Paragraphen entwickelten Eigenschaften der Brennpunkts-Sehnen auch dann noch bestehen bleiben, wenn statt der Brennpunkte eine beliebige confocale Ellipse eingeführt wird und statt der Brennpunkts-Sehnen solche, welche die confocale Ellipse berühren.

Ein Kegelschnitt, welcher mit der Ellipse 1) die Brennpunkte gemeinsam hat, ist dargestellt durch

$$16) \qquad \frac{x^2}{a^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2} = 1,$$

wofür wir der Kürze wegen schreiben

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1;$$

und die Gleichung einer Geraden, welche diesen Kegelschnitt im Punkte (x, y) berührt, ist

$$17)\qquad \frac{x}{a_1^2}\cdot x_1 + \frac{y}{b_1^2}\cdot y_1 = 1.$$

Soll diese parallel sein zu der Geraden

$$18)\qquad \frac{\xi}{a^2}\cdot x_1 + \frac{\eta}{b^2}\cdot y_1 = 1,$$

welche die Ellipse 1) im Punkte (ξ, η) berührt, so muss der Bedingung

$$\frac{x}{a_1^2} : \frac{\xi}{a^2} = \frac{y}{b_1^2} : \frac{\eta}{b^2}$$

Genüge geschehen, und wenn vom Mittelpunkte auf die Geraden 18) und 17) die Senkrechten p und q gefällt werden, so ist auch

$$q : p = \frac{a_1^2}{x} : \frac{a^2}{\xi} = \frac{b_1^2}{y} : \frac{b^2}{\eta}.$$

Hieraus folgt nun zunächst

$$\frac{x^2}{a_1^2} = \frac{p^2}{q^2}\cdot\frac{a_1^2\xi^2}{a^4} \text{ und } \frac{y^2}{b_1^2} = \frac{p^2}{q^2}\cdot\frac{b_1^2\eta^2}{b^4},$$

mithin ist weiter

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = \frac{p^2}{q^2}\cdot\left(\frac{a_1^2\xi^2}{a^4} + \frac{b_1^2\eta^2}{b^4}\right);$$

da zudem

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

und

$$\frac{a_1^2\xi^2}{a^4} + \frac{b_1^2\eta^2}{b^4} = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - k^2\left(\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4}\right) = 1 - \frac{k^2}{p^2},$$

so folgt

$$\frac{q^2}{p^2} = 1 - \frac{k^2}{p^2},$$

oder

$$20)\qquad p^2 - q^2 = k^2,$$

d. h.: Werden an zwei confocalen Ellipsen parallele Tangenten gezogen, so ist der Unterschied der Quadrate ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte constant.

Da nach 20)

$$(p+q)(p-q) = k^2$$

und zwei Tangenten an den Kegelschnitt 16) gezogen werden können, welche zu der Geraden 18) parallel sind, so dass die eine von diesen Geraden um $p+q$ und die andere um $p-q$ entfernt ist, so lässt sich der vorstehende Satz auch in folgender Weise ausdrücken:

Werden an einem Kegelschnitte die beiden Tangenten gezogen, welche zu einer Geraden, die eine confocale Ellipse berührt, parallel sind, so ist das Rechteck aus den Entfernungen der letztern von den beiden erstern constant.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist die bekannte Eigenschaft der Ellipse, dass das Rechteck aus den Entfernungen einer Tangente von den Brennpunkten constant ist.

Die auf der Geraden 17) durch die Ellipse abgeschnittene Sehne $2s$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{s^2}{d^2} = 1 - \frac{q^2}{p^2};$$

wird hierin nun nach 20) gesetzt

$$q^2 = p^2 - k^2,$$

so entsteht

$$s = \frac{kd}{p},$$

und weil

$$pd = ab,$$

so ist

$$21) \qquad s = \frac{abk}{p^2}.$$

Diese Gleichung, aus welcher die oben unter 11) erwähnte hervorgeht, wenn $k = b$ gesetzt wird, berechtigt uns zu folgendem Satze:

Sind um dieselben Brennpunkte zwei Ellipsen beschrieben und werden an dieselben parallele Tangenten gezogen, so ist das Product aus den auf der einen abgeschnittenen Sehne und dem Quadrate der Entfernung der andern vom Mittelpunkte constant.

Setzt man noch

$$p = \frac{ab}{d},$$

so geht die Gleichung 21) über in

$$22) \qquad s = \frac{k}{ab} \cdot d^2,$$

und hieraus ergiebt sich als Verallgemeinerung des Satzes 12) folgender:

Sind zwei Ellipsen um dieselben Brennpunkte beschrieben und wird in der einen ein Durchmesser und eine parallele Sehne, welche die andere berührt, gezogen, so steht die Sehne zu dem Quadrate des Durchmessers in einem constanten Verhältnisse.

Wenn ausser dem Kegelschnitte 16) um die Brennpunkte der Ellipse 1) auch noch der Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2 - h^2} + \frac{y^2}{b^2 - h^2} = 1$$

beschrieben wird, so genügt eine Sehne $2r$, welche diesen berührt und zu dem Durchmesser $2d$ parallel ist, auch der Gleichung 22), es ist also

$$r = \frac{h}{ab} \cdot d^2,$$

folglich

$$23) \qquad s : r = k : h,$$

d. h.: Werden um die Brennpunkte der Ellipse 1) noch zwei Kegelschnitte beschrieben und in jener parallele Sehnen gezogen, welche diese Kegelschnitte berühren, so stehen diese Sehnen in einem constanten Verhältnisse.

Zieht man dagegen in der Ellipse 1) zwei conjugirte Sehnen $2s$ und $2s_1$, welche beide den Kegelschnitt 16) berühren, so ist nach 22)

$$s = \frac{k}{ab} \cdot d^2,$$

$$s_1 = \frac{k}{ab} \cdot d_1^2,$$

folglich

$$s + s_1 = \frac{k}{ab} (d^2 + d_1^2),$$

oder weil

$$d^2 + d_1^2 = a^2 + b^2,$$

so ist

$$24) \qquad s + s_1 = \frac{k}{ab} (a^2 + b^2),$$

d. h.: Die Summe zweier conjugirter Sehnen einer Ellipse, welche denselben confocalen Kegelschnitt berühren, ist constant.

Ferner erhält man durch Multiplication der Werthe von s und s_1

$$s s_1 = \frac{k^2}{a^2 b^2} \cdot d^2 d_1^2;$$

und weil ausserdem

$$d d_1 = \frac{ab}{\sin \varphi},$$

wo wieder φ der Winkel der Durchmesser $2d$ und $2d_1$ ist, so folgt

$$25) \qquad s s_1 = \frac{k^2}{\sin^2 \varphi},$$

d. h.: Das Rechteck aus zwei conjugirten Sehnen einer Ellipse, welche denselben confocalen Kegelschnitt berühren, ist dem Quadrate des Sinus des eingeschlossenen Winkels umgekehrt proportional.

Wenn insbesondere der Winkel φ ein rechter, also s und s_1 zu den Achsen der Ellipse parallel sind, so ist

$$s s_1 = k^2,$$

oder

$$26) \qquad 2s \,.\, 2s_1 = 4k^2 = 4a^2 - 4a_1^2 = 4b^2 - 4b_1^2,$$

d. h.: Das Rechteck der Sehnen der Ellipse 1), welche den Kegelschnitt 16) in den Scheiteln berühren, ist gleich dem Unterschied der entsprechenden Achsenquadrate der confocalen Kegelschnitte.

Ist dagegen der Winkel φ am kleinsten, also $d = d_1$ und $s = s_1$, so ist nach 25)

$$s = \frac{k}{\sin\varphi}, \tag{27}$$

oder: **Fällt man von dem einen Endpunkte einer der gleichen conjugirten Sehnen eine Senkrechte auf den zur conjugirten parallelen Durchmesser, so ist diese Senkrechte gleich der Grösse k.**

§. 3.

Obwohl in dem vorhergehenden Paragraph die Annahme, dass auch der Kegelschnitt 16) eine Ellipse sei, zu Grunde gelegt wurde, so ist doch diese Einschränkung im Verlaufe der Untersuchung nicht nothwendig gewesen; die Resultate der Rechnung bleiben giltig und behalten ihre geometrische Bedeutung, so lange k^2 positiv, also k real ist, und an den Kegelschnitt 16) zwei Berührende gezogen werden können, welche zu zwei conjugirten Durchmessern der Ellipse parallel sind. Es ist also zunächst

$$a^2 > k^2 > 0 \tag{28}$$

zu setzen, damit der Kegelschnitt weder ganz imaginär, noch auch eine Ellipse, welche die Ellipse 1) einschliesst, werden könne. Wenn k^2 und eben so h^2 zwischen diesen Grenzen liegt, so bleiben die Sätze 20), 21), 22) und 23) anwendbar, mag nun der Kegelschnitt 16) eine Ellipse oder Hyperbel sein.

Die Sätze 24) und 25) beziehen sich aber auf conjugirte Sehnen der Ellipse 1), welche den Kegelschnitt 16) berühren; und wenn dieser eine Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2 - k^2} - \frac{y^2}{k^2 - b^2} = 1, \tag{29}$$

wo $a > k > b$, so können an diese keine Tangenten von beliebiger Richtung gezogen werden, also auch nicht solche, welche zu einem beliebigen System von conjugirten Durchmessern der Ellipse 1) parallel sind.

Der Winkel, welchen eine Berührende der Hyperbel 29) mit der realen Achse bildet, ist grösser oder wenigstens so gross als derjenige, welchen die Asymptote mit derselben Achse macht, und dieser, den ich mit α bezeichne, ist bekanntlich bestimmt durch die Gleichung

$$\tang\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - b^2}{a^2 - k^2}}.$$

Ferner weichen die conjugirten Durchmesser der Ellipse 1) dann am wenigsten von der grossen Achse ab, wenn sie gleich sind, und der Winkel β, welchen die gleichen conjugirten Durchmesser mit der Achse bilden, genügt der Gleichung

$$\tang\beta = \frac{b}{a}.$$

Damit also an die Hyperbel 29) zwei Berührende gezogen werden können, welche conjugirte Sehnen der Ellipse 1) sind, muss

$$tang\,\beta \geqq tang\,\alpha.$$

Hieraus ergiebt sich zur Bestimmung des Maximums, welches k^2 erreichen kann, wenn an die Hyperbel 29) zwei Berührende gezogen werden sollen, welche in der Ellipse 1) conjugirte Sehnen sind, die Bedingung

$$\frac{b^2}{a^2} \geqq \frac{k^2 - b^2}{a^2 - k^2},$$

also

$$k^2 \leqq \frac{2\,a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

oder

$$30)\qquad \frac{2}{k^2} \geqq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

d. h.: **Der grösste Werth, welchen k^2 annehmen kann, ist das harmonische Mittel der beiden Halbachsen-Quadrate der Ellipse 1).**

Es ist hiernach in Bezug auf die Sätze 24) und 25)

$$31)\qquad \frac{2\,a^2 b^2}{a^2 + b^2} > k^2 > 0.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich auch auf folgende Weise. Da nach 20)

$$k^2 = p^2 - q^2,$$

so gehören die grössten Werthe, welche k annehmen kann, offenbar zu denjenigen, für welche $q = 0$ ist; wenn aber $q = 0$, so geht die Sehne $2s$ durch den Mittelpunkt, fällt also mit dem Durchmesser $2d$ zusammen, und eben so die Sehne $2s_1$ mit dem Durchmesser $2d_1$. Folglich ist nach 21) unter dieser Bedingung

$$d = \frac{ab}{k} \text{ und } d_1 = \frac{ab}{k};$$

weil ausserdem

$$d^2 + d_1^2 = a^2 + b^2,$$

so folgt

$$2 \,.\, \frac{a^2 b^2}{k^2} = a^2 + b^2,$$

oder

$$\frac{2}{k^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

wie oben.

Wenn k^2 seinen grössten Werth erreicht, so sind die Asymptoten die einzigen Berührenden der Hyperbel 29), welche zugleich conjugirte Sehnen der Ellipse 1) sind. Diese Sehnen fallen dann mit den gleichen Durchmessern zusammen und haben den Werth

$$2s = 2s_1 = 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

§. 4.

Dieselben Gesetze, welche in den vorigen Paragraphen für conjugirte Sehnen einer Ellipse entwickelt wurden, gelten auch dann noch, wenn statt der Ellipse eine Hyperbel genommen wird; doch ist die Herleitung zum Theil nicht in derselben Weise zu erreichen. Man setze in der Gleichung 1) $-b^2$ statt b^2, dadurch geht sie über in

$$32)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

und stellt nun eine Hyperbel dar. Der confocale Kegelschnitt 16) ist nun

$$\frac{x^2}{a^2-k^2}-\frac{y^2}{b^2-k^2}=1;$$

damit aber an diesen Berührende gezogen werden können, welche Sehnen des vorhergehenden sind, so muss auch k imaginär sein, so dass nun nach diesen Aenderungen die Gleichung 16) die Form

$$33)\qquad \frac{x^2}{a^2+k^2}-\frac{y^2}{b^2-k^2}=1$$

annimmt, welche eine Ellipse oder Hyperbel ist, jenachdem $b<k$ oder $b>k$.

Eine Gerade, welche die Hyperbel 32) im Punkte (ξ, η) berührt, hat die Form

$$34)\qquad \frac{\xi}{a^2}\cdot x_1-\frac{\eta}{b^2}\cdot y_1=1,$$

und eben so ist

$$35)\qquad \frac{x}{a^2+k^2}\cdot x_1-\frac{y}{b^2-k^2}\cdot y_1=1$$

die Gerade, welche den Kegelschnitt 33) im Punkte (x, y) berührt.

Werden auf diese Geraden vom Mittelpunkte die Senkrechten p und q gefällt, so muss die Relation

$$q:p=\frac{a^2+k^2}{x}:\frac{a^2}{\xi}=\frac{b^2-k^2}{y}:\frac{b^2}{\eta}$$

statthaben, wenn jene Geraden parallel sein sollen. Aus diesen geht aber in ähnlicher Weise wie früher für die Ellipse hervor

$$36)\qquad q^2-p^2=k^2,$$

und diese Gleichung in Verbindung mit der unter 20) stellt den allgemeinen Satz dar:

Werden an zwei confocale Kegelschnitte parallele Tangenten gezogen, so ist die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte constant.

Denkt man sich an den einen Kegelschnitt zwei parallele Tangenten und an den confocalen Kegelschnitt eine, welche auch zu jenen parallel ist, und zerlegt die Differenz p^2-q^2 in ein Produkt, so nimmt der vorhergehende Satz folgende Form an:

Das Rechteck aus den Entfernungen einer Tangente eines Kegelschnittes von den beiden Tangenten eines con-

focalen Kegelschnittes, welche zu jenen parallel sind, ist constant.

Zieht man dagegen an die Hyperbel

$$37)\qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Berührende

$$38)\qquad -\frac{\xi}{a^2}\cdot x_1+\frac{\eta}{b^2}\cdot y_1=1$$

und an den Kegelschnitt 33) die Berührende 35) und fällt auf diese Geraden von dem Mittelpunkte die Senkrechten p_1 und q_1, so ist

$$q_1:p_1=-\frac{a^2+k^2}{x}:\frac{a^2}{\xi}=-\frac{b^2-k^2}{y}:\frac{b^2}{\eta},$$

wenn diese Berührenden parallel sind. Aus dieser Proportion ergiebt sich nun in derselben Weise, wie oben in §. 2, dass

$$39)\qquad p_1^2+q_1^2=k^2,$$

d. h.: Die Summe der Quadrate der Entfernungen des Mittelpunktes von zwei parallelen Geraden, welche die Kegelschnitte 33) und 37) berühren, ist constant.

Man kann diesen Satz in derselben Weise, wie vorher, beweisen von je zwei Kegelschnitten, von welchen die Summe der entsprechenden Achsenquadrate für beide Achsenrichtungen gleich gross ist. Nennt man nun solche Kegelschnitte, welche zwar auch confocal sind, jedoch so, dass die imaginären Brennpunkte des einen mit den realen des andern zusammenfallen, „imaginär-confocal", so lässt sich der vorstehende Satz in allgemeinerer Weise auch folgendermassen aussprechen:

Werden an zwei imaginär-confocale Kegelschnitte zwei parallele Tangenten gezogen, so ist die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte constant.

Gleichbedeutend mit der vorstehenden Gleichung 39) ist folgende

$$(p_1+q_1)^2+(p_1-q_1)^2=2k^2;$$

da es zudem zwei Berührende der Hyperbel 37) giebt, welche zu der Geraden 35) parallel sind, so kann dem vorigen Satz auch folgende Form gegeben werden:

Die Summe der Quadrate der Entfernungen einer Tangente eines Kegelschnittes von den beiden Tangenten eines imaginär-confocalen Kegelschnittes, welche zu jenen parallel sind, ist constant.

Einen speciellen Fall dieses Satzes bildet die bekannte Eigenschaft der imaginären Brennpunkte eines Kegelschnittes, dass die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von einer Tangente desselben constant ist.

Bezeichnet man nun die Sehne, welche die Hyperbel 32) auf der Geraden 35) abschneidet, mit $2s$ und die Länge des parallelen (imaginären) Durchmessers von 32) mit $2d$, so ist

$$\frac{q^2}{p^2}-\frac{s^2}{d^2}=1,$$

folglich durch Anwendung von 36)

$$s=\frac{kd}{p},$$

oder weil

$$pd=ab$$

auch

40) $$s=\frac{abk}{p^2}=\frac{k}{ab}\cdot d^2.$$

Wird ferner eben so die Sehne, welche durch die Hyperbel 32) auf der Geraden 35) abgeschnitten wird, mit $2s_1$ und der parallele reale Durchmesser von 32) mit $2d_1$ bezeichnet, so ist auch

$$\frac{s_1^2}{d_1^2}-\frac{q_1^2}{p_1^2}=1,$$

folglich wegen der Gleichung 39)

41) $$s_1=\frac{abk}{p_1^2}=\frac{k}{ab}\cdot d_1^2.$$

Diese Resultate 40) und 41) berechtigen nun, die Sätze 21) und 22), welche in §. 2 nur für confocale Ellipsen entwickelt wurden, auf die confocalen Kegelschnitte überhaupt auszudehnen:

Sind zwei Kegelschnitte confocal und werden an dieselben zwei parallele Tangenten gezogen, so ist das Produkt der auf der einen abgeschnittenen Sehne und dem Quadrate der Entfernung der andern vom Mittelpunkte constant.

Und:

Sind zwei Kegelschnitte confocal und wird in dem einen ein Durchmesser und eine parallele Sehne gezogen, welche die andere berührt, so steht die Sehne zu dem Quadrate des Durchmessers in einem constanten Verhältnisse.

Wenn man noch parallel zu den Durchmessern $2d$ und $2d_1$ an den Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2+h^2}-\frac{y^2}{b^2-h^2}=1$$

Berührende gezogen und auf diesem durch die Hyperbel 32) die Sehnen $2r$ und $2r_1$ abgeschnitten, so ist nach 40) und 41)

$$r=\frac{h}{ab}\cdot d^2,$$

$$r_1=\frac{h}{ab}\cdot d_1^2,$$

folglich

42) $$s:r=k:h \text{ und } s_1:r_1=k:h,$$



mithin gilt auch der Satz 23) nicht blos für confocale Ellipsen, sondern für Kegelschnitte im Allgemeinen:

Werden um die Brennpunkte eines Kegelschnittes zwei andere Kegelschnitte beschrieben und in jenem parallele Sehnen gezogen, welche diese berühren, so stehen diese Sehnen in einem constanten Verhältnisse.

Durch Subtraction der Gleichungen 40) und 41) entsteht

$$s_1 - s = \frac{k}{ab}(d_1^2 - d^2)$$

und da

$$d_1^2 - d^2 = a^2 - b^2,$$

$$43) \qquad s_1 - s = \frac{k}{ab}(a^2 - b^2),$$

d. h. die Differenz zweier conjugirten Sehnen einer Hyperbel, welche denselben confocalen Kegelschnitt berühren, ist constant.

Wenn die Hyperbel eine gleichseitige, also $a^2 = b^2$, so sind die conjugirten Sehnen derselben, welche einen confocalen Kegelschnitt berühren, einander gleich.

Durch Multiplication der Werthe von s und s_1 erhält man

$$s s_1 = \frac{k^2}{a^2 b^2} \cdot d^2 d_1^2,$$

und da

$$d^2 d_1^2 = \frac{a^2 b^2}{\sin^2 \varphi},$$

wo φ den Winkel der Durchmesser $2d$ und $2d_1$ bezeichnet, so ist

$$44) \qquad s s_1 \cdot \sin^2 \varphi = k^2.$$

Ist insbesondere die Hyperbel, in welcher $2s$ und $2s_1$ Sehnen sind, eine gleichseitige, so ist, wie eben gezeigt wurde, $s = s_1$, folglich:

$$45) \qquad s \cdot \sin \varphi = k.$$

Fällt man also in einer gleichseitigen Hyperbel von dem Endpunkte einer Sehne, welche einen confocalen Kegelschnitt berührt, eine Senkrechte auf den Durchmesser, welcher durch den Halbirungspunkt der Sehne geht, so ist diese Senkrechte constant.

§. 5.

Die Theorie der Flächen zweiten Grades, welche den grossen griechischen Mathematikern fast ganz unbekannt blieb, aber seit Euler so grosse Fortschritte machte und noch immer ein fruchtbares Feld für neue Arbeiten ist, wurde am meisten dadurch gefördert, dass man, von den Curven zweiten Grades ausgehend, vom Besondern zum Allgemeinen aufsteigend, für die Flächen diejenigen Eigenschaften aufsuchte, welche die bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte als besondere Fälle enthielten. Es ist des-

halb auch hier von Interesse, die vorliegenden Untersuchungen auch auf die vollkommneren Gestalten des Raumes auszudehnen.

Durch die wichtigen Arbeiten des Herrn M. Chasles ist dargethan, dass für das Ellipsoid

$$46)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

die drei Kegelschnitte

$$47)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-c^2}+\dfrac{y^2}{b^2-c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{a^2-b^2}+\dfrac{z^2}{c^2-b^2}=1, \\ \dfrac{y^2}{b^2-a^2}+\dfrac{z^2}{c^2-a^2}=1 \end{cases}$$

in mancher Beziehung dieselbe Bedeutung haben, welche in der Ebene den Brennpunkten eines Kegelschnittes zukommt. Diese drei Kegelschnitte, auch wohl Focalcurven genannt, von welchen der eine zwei reale, der andere eine reale und eine imaginäre und der dritte zwei imaginäre Achsen hat, sind aber nur specielle Fälle von einer Fläche, welche mit dem Ellipsoide confocal ist, d. h. die Focalcurven gemeinsam hat. Eine solche Fläche hat im Allgemeinen die Form

$$48)\qquad \frac{x^2}{a^2-k^2}+\frac{y^2}{b^2-k^2}+\frac{z^2}{c^2-k^2}=1$$

oder

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1,$$

wenn zur Abkürzung

$$a_1^2=a^2-k^2,\quad b_1^2=b^2-k^2,\quad c_1^2=c^2-k^2$$

gesetzt wird, und geht der Reihe nach in die vorstehenden Focalcurven über, wenn k^2 einem der Halbachsen-Quadrate a^2, b^2, c^2 gleich wird. Es ist daher nur nöthig, die gegenwärtige Untersuchung für den allgemeinen Fall durchzuführen.

Werden an die Flächen 46) und 48) die parallelen Berührungsebenen

$$49)\qquad \frac{\xi}{a^2}\cdot x_1+\frac{\eta}{b^2}\cdot y_1+\frac{\zeta}{c^2}\cdot z_1=1,$$

$$50)\qquad \frac{x}{y_1^2}\cdot x_1+\frac{y}{b_1^2}\cdot y_1+\frac{z}{c_1^2}\cdot z_1=1$$

gelegt und vom Mittelpunkte der confocalen Flächen die Senkrechten p und q auf dieselben gefällt, so genügen diese und die Coefficienten in 49) und 50) der Proportion

$$51)\qquad q:p=\frac{a_1^2}{x}:\frac{a^2}{\xi}=\frac{b_1^2}{y}:\frac{b^2}{\eta}=\frac{c_1^2}{z}:\frac{c^2}{\zeta}.$$

Durch Verbindung der Gleichungen 46), 48) und 51) erhält man nun in ähnlicher Weise, wie in §. 2 das Resultat

$$52)\qquad p^2 - q^2 = k^2,$$

d. h. **werden an zwei confocale Ellipsoide zwei parallele Berührungsebenen gelegt, so ist der Unterschied der Quadrate ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte constant.**

Es giebt zwei Ebenen, welche die Fläche 48) berühren und zu der Ebene 49) parallel sind, die eine ist von dieser um $p + q$, die andere um $p - q$ entfernt; der vorstehende Satz lässt sich also auch in folgender Weise ausdrücken:

Wird ein Ellipsoid von zwei Ebenen berührt, welche zu einer Berührungsebene eines confocalen Ellipsoides parallel sind, so ist das Rechteck aus den Entfernungen der letztern von den beiden erstern constant.

Bezeichnet man die Halbachsen der Ellipse, in welcher das Ellipsoid 46) von der Ebene 49) geschnitten wird, mit s und s_1 und die parallelen Halbachsen des Centralabschnittes mit d und d_1, so ist

$$\frac{s^2}{d^2} + \frac{q^2}{p^2} = 1$$

und

$$\frac{s_1^2}{d_1^2} + \frac{q^2}{p^2} = 1,$$

folglich

$$\frac{s s_1}{d d_1} = 1 - \frac{q^2}{p^2}.$$

Nimmt man nun noch die Gleichung 52) hinzu, so erhält man zunächst

$$s s_1 = \frac{k^2}{p^2} . d d_1,$$

und da bekanntlich

$$p d d_1 = a b c,$$

so ist auch

$$53)\qquad s s_1 = \frac{a b c k^2}{p^3} = \frac{k^2}{a^2 b^2 c^2} . d^3 . d_1^3.$$

Da $\pi s s_1$ die Fläche des Schnittes 50) und $\pi d d_1$ die des parallelen Centralschnittes ist, so berechtigen die vorstehenden Gleichungen zu folgenden Sätzen:

Werden zwei confocale Ellipsoide von zwei parallelen Ebenen berührt, so ist das Produkt aus der Schnittfläche, welche in der einen Ebene liegt, und dem Cubus der Entfernung der andern Ebene vom Mittelpunkte constant.

Und:

Wird das eine von zwei confocalen Ellipsoiden von einer Ebene, welche das andere berührt, und von einer parallelen Centralebene geschnitten, so steht die Fläche des Schnittes in der Berührungsebene zu dem Cubus des Centralschnittes in einem constanten Verhältnisse.

Wenn ausser der Fläche 48) auch die ebenfalls mit 46) confocale Fläche

$$\frac{x^2}{a^2-h^2}+\frac{y^2}{b^2-h^2}+\frac{z^2}{c^2-h^2}=1$$

von einer Ebene berührt wird, welche zu der der Ebene 49) parallel ist, und die Halbachsen des Schnittes mit r und r_1 bezeichnet werden, so ist nach 53)

$$r r_1=\frac{abc\,h^2}{p^3}=\frac{a^2b^2c^2}{h^2}\,.\,d^3\,.\,d_1^{\,3}.$$

Durch Vergleichung der Werthe der parallelen Schnittflächen entsteht

54) $$s s_1 : r r_1 = k^2 : h^2,$$

d. h.: Wenn ein Ellipsoid durch zwei parallele Ebenen, welche zwei mit ihm confocale Flächen berühren, geschnitten wird, so stehen die Schnittflächen in einem constanten Verhältnisse.

Denkt man sich in der Fläche 46) drei conjugirte Centralebenen, deren Halbachsen der Reihe nach d und d_1, e und e_1, f und f_1 sind, und parallel zu dieser Ebene drei andere, welche die Fläche 48) berühren und die Halbachsen s und s_1, t und t_1, u und u_1 haben, so ist nach dem Satze 53)

$$s s_1=\frac{k^2}{a^2b^2c^2}\,.\,d^3\,.\,d_1^{\,3},$$

$$t t_1=\frac{k^2}{a^2b^2c^2}\,.\,e^3\,.\,e_1^{\,3},$$

$$u u_1=\frac{k^2}{a^2b^2c^2}\,.\,f^3\,.\,f_1^{\,3}.$$

Wenn man nun noch berücksichtigt, dass

$$d^2\,.\,d_1^{\,2}+e^2\,.\,e_1^{\,2}+f^2\,.\,f_1^{\,2}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$$

so erhält man

55) $$\sqrt[3]{s^2\,.\,s_1^{\,2}}+\sqrt[3]{t^2\,.\,t_1^{\,2}}+\sqrt[3]{u^2\,.\,u_1^{\,2}}=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\sqrt[3]{\frac{k^4}{a^4b^4c^4}},$$

und diese Gleichung, welche der unter 24) entspricht, enthält für das Ellipsoid folgenden Satz:

Die Summe der Cubikwurzeln aus den Quadraten dreier conjugirten Schnittflächen, welche dieselbe confocale Fläche berühren, ist constant.

Bezeichnet man die Durchmesser des Ellipsoides, in welchen die Ebene (f, f_1) von (e, e_1), die Ebene (d, d_1) von (f, f_1) und die Ebene (e, e_1) von (d, d_1) geschnitten wird, mit $2D$, $2E$ und $2F$, und die Winkel, welche diese Durchmesser mit einander bilden, mit α, β, γ, so sind $2D$, $2E$, $2F$ ein System von conjugirten Durchmessern, folglich ist:

$$d d_1 = EF \sin\alpha,$$

$$e e_1 = FD \sin\beta,$$

$$f f_1 = DE \sin\gamma.$$

Die Durchmesser, welche in den conjugirten Schnitten (s, s_1), (t, t_1) und (u, u_1) liegen und parallel zu $2D$, $2E$, $2F$ sind, seien $2S$ und $2S_1$, $2T$ und $2T_1$, $2U$ und $2U_1$; in diesen Zeichen ist

$$s s_1 = S S_1 \sin\alpha,$$
$$t t_1 = T T_1 \sin\beta,$$
$$u u_1 = U U_1 \sin\gamma.$$

Durch Anwendung dieser Gleichungen ergiebt sich aus 53) zunächst

$$S S_1 = \frac{k^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot E^3 F^3 \sin^2\alpha,$$
$$T T_1 = \frac{k^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot F^3 D^3 \sin^2\beta,$$
$$U U_1 = \frac{k^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot D^3 E^3 \sin^2\gamma,$$

und danach durch Multiplication:

$$S S_1 \,.\, T T_1 \,.\, U U_1 = \frac{k^6}{a^6 b^6 c^6} \cdot D^6 E^6 F^6 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma.$$

Bezeichnet man nun noch mit λ, μ, ν die Winkel, welche die Durchmesser $2D$, $2E$, $2F$ mit den conjugirten Centralebenen bilden, so ist bekanntlich

$$D E F \sin\alpha \sin\lambda = a b c,$$
$$D E F \sin\beta \sin\mu = a b c,$$
$$D E F \sin\gamma \sin\nu = a b c,$$

und durch Anwendung dieser Gleichung geht die vorhergehende Gleichung über in

$$56) \qquad S S_1 \sin^2\lambda \,.\, T T_1 \sin^2\mu \,.\, U U_1 \sin^2\nu = k^6.$$

Hierdurch ist für das Ellipsoid diejenige Eigenschaft nachgewiesen, welche dem Satze 25) von der Ellipse entspricht. Wenn die Winkel λ, μ, ν rechte sind, so ist

$$S S_1 \,.\, T T_1 \,.\, U U_1 = k^6,$$

d. h. das Produkt der Halbachsen der drei Schnitte, welche die Fläche 48) in drei Scheiteln berühren, ist gleich der sechsten Potenz von k.

§. 6.

Die Sätze 52), 53) und 54) des vorigen Paragraphen bleiben giltig und behalten eine geometrische Bedeutung, so lange noch eine Achse der Fläche 48) real ist, so lange also, vorausgesetzt, dass $a > b > c$, die Grösse $k^2 < a^2$ angenommen wird. Sollen aber, wie in 55) und 56) verlangt wird, an die Fläche 48) drei berührende Ebenen gelegt werden, welche zu drei conjugirten Centralebenen des Ellipsoides 46) parallel sind, so ist die Grösse k^2 in engere Grenzen eingeschlossen. Da nach 52)

$$k^2 = p^2 - q^2,$$

so erreicht k^2 seine grössten Werthe, wenn

$$q = 0, \text{ also } k = p,$$

und unter dieser Voraussetzung wird

$$s = d, \quad s_1 = d_1,$$

folglich nach 53)

$$dd_1 = \frac{abc}{k},$$

$$ee_1 = \frac{abc}{k},$$

$$ff_1 = \frac{abc}{k},$$

oder die Ebenen aller Schnitte, welche die Fläche 48), für welche k ein Maximum ist, berühren, gehen durch den Mittelpunkt und sind einander gleich.

Nimmt man nun noch die bekannte Relation

$$d^2 d_1^2 + e^2 e_1^2 + f^2 f_1^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$$

hinzu, so erhält man für den grössten Werth, welchen k erreichen kann, die Gleichung

57)
$$\frac{3}{k^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Das Maximum von k^2, für welches an die Fläche 48) drei Berührungsebenen gelegt werden können, welche zu einem System von conjugirten Centralebenen des Ellipsoides 46) parallel sind, ist das harmonische Mittel der Halbachsenquadrate dieser Fläche.

Bezeichnet man diesen grössten Werth von k^2 mit m^2, setzt also

$$\frac{3}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

so sind durch

58)
$$m^2 > k^2 > 0$$

die Grenzen von k^2 bestimmt, für welche die Grössen in den Gleichungen 55) und 56) eine geometrische Bedeutung haben.

Die Fläche 48) geht für diesen Werth von k^2 über in das Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2 - m^2} + \frac{y^2}{b^2 - m^2} + \frac{z^2}{c^2 - m^2} = 1,$$

und die Ebenen der conjugirten Schnitte (ss_1), (tt_1) und (uu_1), welche durch den Mittelpunkt gehen, berühren alle den Asymptotenkegel dieses Hyperboloides, nämlich

59)
$$\frac{x^2}{a^2 - m^2} + \frac{y^2}{b^2 - m^2} + \frac{z^2}{c^2 - m^2} = 0.$$

Die Halbachsenquadrate dieser Flächen sind

$$a^2 - m^2 = \frac{a^2 b^2 - 2 b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \cdot a^2,$$

$$b^2 - m^2 = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 - 2 c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \cdot b^2,$$

$$c^2 - m^2 = \frac{-2 a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \cdot c^2.$$

Alle Schnitte des Ellipsoides, welche den Kegel 59) berühren, haben denselben Inhalt, und zwar ist das Produkt der Halbachsen derselben, wie oben angegeben,

$$60)\qquad dd_1 = ee_1 = ff_1 = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{3}}.$$

Wenn die Halbachsen des Ellipsoides so beschaffen sind, dass b^2 selbst das harmonische Mittel ist von a^2 und c^2, dass also

$$\frac{2}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$

oder

$$a^2b^2 + b^2c^2 - 2c^2a^2 = 0,$$

so ist

$$b^2 - m^2 = 0,$$

mithin geht das oben erwähnte Hyperboloid über in die Hyperbel

$$\frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}\cdot\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}\cdot\frac{z^2}{c^2} = 1$$

und der Kegel 59) in das System zweier Geraden

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

und die Grösse der Halbachsenprodukte der Schnittflächen ist in diesem speciellen Falle nach 60)

$$dd_1 = ee_1 = ff_1 = ac.$$

§. 7.

Es ist noch übrig zu ermitteln, welche Veränderungen die Untersuchungen des §. 5 erleiden, wenn statt des Ellipsoides 46) eines der beiden Hyperboloide eingeführt wird.

Nehmen wir zunächst das einschalige Hyperboloid

$$61)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und geben der confocalen Fläche die Form

$$62)\qquad \frac{x^2}{a^2 + k^2} + \frac{y^2}{b^2 + k^2} + \frac{z^2}{c^2 - k^2} = 1$$

oder

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

damit an diese Berührungsebenen gelegt werden können, welche die erstere schneiden.

Werden nun wieder diese Flächen von zwei parallelen Ebenen

$$63)\qquad \frac{\xi}{a^2}\cdot x_1 + \frac{\eta}{b^2}\cdot y_1 - \frac{\zeta}{c^2}\cdot z_1 = 1,$$

$$64)\qquad \frac{x}{a_1^2}\cdot x_1 + \frac{y}{b_1^2}\cdot y_1 - \frac{z}{c_1^2}\cdot z_1 = 1$$

berührt und vom Mittelpunkte auf diese Ebenen die Senkrechten p und q gefällt, so genügen diese und die Coefficienten der Gleichungen 63) und 64) den Bedingungen

65) $$q : p = \frac{a_1^2}{x} : \frac{a^2}{\xi} = \frac{b_1^2}{y} : \frac{b^2}{\eta} = \frac{c_1^2}{z} : \frac{c^2}{\xi}.$$

Durch die Verbindung der Gleichungen 61), 62) und 65) erhält man nun in derselben Weise, wie früher, die Gleichung

66) $$q^2 - p^2 = k^2,$$

welche zeigt, dass der unter 52) für das Ellipsoid ausgesprochene Satz auch für das einschalige Hyperboloid giltig ist.

Wird aber an das Hyperboloid

67) $$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

welches mit dem Hyperboloid gleich grosse Achsenquadrate, aber von entgegengesetzten Zeichen, hat, die Berührungsebene

68) $$-\frac{\xi}{a^2} \cdot x_1 - \frac{\eta}{b^2} \cdot y_1 + \frac{\zeta}{c^2} \cdot z_1 = 1$$

gelegt, so muss, wenn diese zu der Ebene 64) parallel sein soll, der Proportion

$$\frac{a_1^2}{x} : \frac{a^2}{\xi} = \frac{b_1^2}{y} : \frac{b^2}{\eta} = \frac{c_1^2}{z} : \frac{c^2}{\zeta}$$

Genüge geschehen. Werden nun noch auf die Ebenen 64) und 68) vom Mittelpunkte die Senkrechten q_1 und p_1 gefällt, so ist auch

69) $$q_1 : p_1 = -\frac{a_1^2}{x} : \frac{a^2}{\xi} = -\frac{b_1^2}{y} : \frac{b^2}{\eta} = -\frac{c_1^2}{z} : \frac{c^2}{\zeta}.$$

Aus diesen Bedingungen ergiebt sich, wie früher für die Hyperbel,

70) $$q_1^2 + p_1^2 = k^2,$$

mithin ist die Summe der Quadrate der Entfernungen des Mittelpunktes von zwei parallelen Ebenen, welche die Flächen 62) und 67) berühren, constant.

Werden nun durch die Fläche 61) drei conjugirte Centralebenen gelegt, so schneidet eine derselben die Fläche 61) in einer Ellipse, deren Halbachsen d und d_1, die beiden anderen in Hyperbeln, welche e und e_1, f und f_1 als Halbachsen haben. Parallel zu der Centralebene (d, d_1) denke man sich an den Flächen 62) und 67) die Berührungsebenen 64) und 68) und fälle auf diese die Senkrechten q_1 und p_1; bezeichnet man dann wieder mit s und s_1 die Halbachsen des Schnittes 64), so ist

$$\frac{s^2}{d^2} - \frac{q_1^2}{p_1^2} = 1$$

und

$$\frac{s_1^2}{d_1^2} - \frac{q_1^2}{p_1^2} = 1.$$

Nimmt man nun noch die Gleichung 70) hinzu, so ergiebt sich

$$s s_1 = \frac{k^2}{p^2} \cdot d d_1,$$

und weil zudem

$$p_1 d d_1 = a b c,$$

so ist

71) $$s s_1 = \frac{a b c k^2}{p_1^3} = \frac{k^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot d^3 d_1^3.$$

Wird ferner das Hyperboloid 61) von zwei Ebenen geschnitten, welche den Centralschnitten (e, e_1) und (f, f_1) parallel sind, die Fläche 62) berühren und die Halbachsen t, t_1 und u, u_1 haben, so ist auch

$$t t_1 = \frac{a b c k^2}{p_2^3} = \frac{k^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot e^3 \cdot e_1^3$$

$$u u_1 = \frac{a b c k^2}{p_3^3} = \frac{a^2 b^2 c^2}{k^2} \cdot f^3 \cdot f_1^3,$$

wo p_2 und p_3 die Senkrechten sind, welche vom Mittelpunkte auf zu $(e e_1)$ und $(f f_1)$ parallelen Berührungsebenen gefällt werden.

Diese Gleichungen berechtigen nun zunächst dazu, die oben unter 53) und 54) für das Ellipsoid ausgesprochenen Sätze auch auf das einschalige Hyperboloid auszudehnen.

Ferner entsteht durch Verbindung derselben

72) $$\sqrt[3]{s^2 \cdot s_1^2} - \sqrt[3]{t^2 \cdot t_1^2} - \sqrt[3]{u^2 \cdot u_1^2} = (a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2) \sqrt[3]{\frac{k^4}{a^4 b^4 c^4}},$$

wodurch auch die Giltigkeit des Satzes 55) in Bezug auf das einschalige Hyperboloid dargelegt wird.

Wenn insbesondere die Halbachsen des Hyperboloides 61) der Bedingung

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

genügen, so ist

$$\sqrt[3]{s^2 \cdot s_1^2} = \sqrt[3]{t^2 \cdot t_1^2} + \sqrt[3]{u^2 \cdot u_1^2}$$

für alle Werthe von k.

Eben so wie die Gleichung 55) ist auch die unter 56) auf das einschalige Hyperboloid anwendbar.

§. 8.

Auch für das zweischalige Hyperboloid

73) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und eine mit demselben confocale Fläche

74) $$\frac{x^2}{a^2 + k^2} - \frac{y^2}{b^2 - k^2} - \frac{z^2}{c^2 - k^2} = 1$$

oder

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

lassen sich nach Analogie des Vorhergehenden leicht dieselben Eigenschaften nachweisen, welche wir bisher von dem Ellipsoide und dem einschaligen Hyperboloide gefunden haben.

Werden die Flächen 73) und 74) von den Ebenen

$$75)\qquad \frac{\xi}{a^2}\cdot x_1 - \frac{\eta}{b^2}\cdot y_1 - \frac{\zeta}{c^2}\cdot z_1 = 1,$$

$$76)\qquad \frac{x}{a_1^2}\cdot x_1 - \frac{y}{b_1^2}\cdot y_1 - \frac{z}{c_1^2}\cdot z_1 = 1$$

berührt und auf diese vom Mittelpunkte die Senkrechten p und q gefällt, so muss der Proportion

$$77)\qquad q : p = \frac{a_1^2}{x} : \frac{a^2}{\xi} = \frac{b_1^2}{y} : \frac{b^2}{\eta} = \frac{c_1^2}{z} : \frac{c^2}{\zeta}$$

Genüge geschehen, wenn die berührenden Ebenen parallel sein sollen. Aus dieser Proportion, in Verbindung mit den Gleichungen der berührten Flächen, folgt

$$78)\qquad q^2 - p^2 = k^2.$$

Diese Gleichung und die ähnlichen unter 52) und 66) zeigen nun, dass die Flächen zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt haben, im Allgemeinen folgende Eigenschaft besitzen:

*Werden zwei confocale Flächen zweiten Grades von parallelen Ebenen berührt, so ist die Differenz der Quadrate der Entfernungen dieser Ebenen vom Mittelpunkte constant.**)

Wird dagegen an das einschalige Hyperboloid

$$79)\qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dessen Halbachsenquadrate sich von denen der Fläche 73) nur durch das Vorzeichen unterscheiden, von der Ebene

$$80)\qquad -\frac{\xi}{a^2}\cdot x_1 + \frac{\eta}{b^2}\cdot y_1 + \frac{\zeta}{c^2}\cdot z_1 = 1$$

berührt und bestimmt, dass sie parallel sei zu der Ebene 76), so findet zwischen den Coefficienten dieser Ebenen und ihren Entfernungen vom Mittelpunkte p_1 und q_1 folgender Zusammenhang statt:

$$81)\qquad q_1 : p_1 = -\frac{a_1^2}{x} : \frac{a^2}{\xi} = -\frac{b_1^2}{y} : \frac{b^2}{\eta} = -\frac{c_1^2}{z} : \frac{c^2}{\zeta}.$$

Daraus ergiebt sich dann weiter durch das oft erwähnte Verfahren

$$82)\qquad q_1^2 + p_1^2 = k^2.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der unter 70) stellt eine Eigenschaft derjenigen Flächen zweiten Grades dar, deren Focalcurven Halbachsenquadrate von gleicher Grösse, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wenn man diese Flächen „imaginär-confocal" nennt, so erhält man folgenden Satz, welcher dem vorigen an die Seite gestellt werden kann:

Werden zwei imaginär-confocale Flächen zweiten Gra-

---

*) Ich hielt diesen Satz, sowie den entsprechenden über Kegelschnitte, anfangs für neu, fand aber später, dass er von Herrn M. Chasles in der Geschichte der Geometrie angeführt wird.

des von zwei parallelen Ebenen berührt, so ist die Summe der Quadrate der Entfernungen dieser Ebenen vom Mittelpunkte constant.

Durch Anwendung dieser Sätze lassen sich nun auch von dem zweischaligen Hyperboloid dieselben Eigenschaften nachweisen, welche oben unter 53), 54), 55) und 56) für das Ellipsoid angeführt wurden; sonach sind für die Mittelpunktsflächen zweiten Grades, das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide, in Bezug auf die Schnitte, welche eine confocale Fläche berühren, folgende Sätze giltig.

Erstens. Werden zwei confocale Flächen zweiten Grades F und F_1 von zwei beliebigen parallelen Ebenen E und E_1 berührt, so ist das Produkt aus den Halbachsen des in der Ebene E_1 gelegenen Schnittes der Fläche F und dem Cubus der Entfernung der Ebene E vom Mittelpunkte constant.

Zweitens. Wenn eine Fläche zweiten Grades durch eine beliebige Ebene, welche eine confocale Fläche berührt, geschnitten wird, so steht das Halbachsenprodukt des Schnittes in einem constanten Verhältnisse zu dem Cubus des Halbachsenproduktes des Centralschnittes der ersten Fläche, welcher zu jenem Schnitte parallel ist.

Drittens. Wenn die drei Flächen F, F_1 und F_2 confocal sind und die beiden letztern von zwei beliebigen parallelen Ebenen berührt werden, so stehen die Halbachsenprodukte der Schnitte, welche in der ersten Fläche und in den Berührungsebenen liegen, in einem constanten Verhältnisse.

Viertens. Wenn die Flächen F und F_1 confocal sind und die Fläche F von drei Ebenen, welche die Fläche F_1 berühren und zu drei conjugirten Centralebenen der Fläche F parallel sind, geschnitten wird, so ist die Summe der Kubikwurzeln aus den Quadraten der Halbachsenprodukte der Schnitte constant.

Das Quadrat einer imaginären Halbachse ist hierbei als negativ in Rechnung zu bringen.

Fünftens. Sind in einer Fläche zweiten Grades drei beliebige conjugirte Durchmesser gezogen und wird dieselbe von drei Ebenen geschnitten, welche eine confocale Fläche berühren und zu den Ebenen jener Durchmesser parallel sind, so ist das Produkt aus den sechs Durchmessern dieser Schnitte, welche zu jenen parallel sind, und den Quadraten der Sinus der Winkel, welche die Durchmesser der Fläche mit der conjugirten Ebene bilden, constant.

XVI.

Die Elektricitätslehre vom Standpunkte der Undulationstheorie.

Ein Versuch von Dr. Ed. Zetzsche,
K. K. Telegrapheningenieur in Triest.

Erster Artikel.

Sobald man zugesteht, dass die Physik mit der Erklärung der einzelnen Naturerscheinungen, mit der Aufstellung der Gesetze, in welchen gewisse sich nahestehende Thatsachen einen gemeinschaftlichen allgemeinen Ausdruck finden, ihre Aufgabe noch nicht vollständig gelöst hat, dass sie vielmehr dann noch aus jeder Gruppe von zusammengehörigen Erscheinungen ein wissenschaftliches Gebäude aufführen und in ihm die ursächliche Verknüpfung der Erscheinungen unter einander nachweisen und aus den an die Spitze gestellten Grundwahrheiten herleiten müsse, so wird schon für dieses systematische Aneinanderreihen und Ordnen eine mathematische Begründung der physikalischen Sätze unerlässlich. Damit ist aber auch zugleich die Richtung des Forschens scharf und bestimmt vorgezeichnet, und wie befruchtend das Einführen der Mathematik in die Physik war, zeigt die Reihe von glänzenden Erfolgen, welche die Physik mit Beihilfe der Mathematik in rascher Aufeinanderfolge errang. So rückte die Statik und Dynamik der Ponderabilien ihrem Abschlusse merklich näher und feierte in der Astronomie die herrlichsten Triumphe. So wurden die tönenden Schwingungen, sich eng anschliessend an die Gesetze der Wellenbewegungen in schweren Flüssigkeiten (Weber), für uns zur Brücke, auf der wir hinüberstiegen (Huyghens, Euler) zu den sichtbaren Schwingungen des Aethers und mit derselben Ungezwungenheit zu den Wärmeschwingungen. Liessen sich daran noch die Elektricität und der Magnetismus reihen, so bildete die Physik ein abgerundetes und abgeschlossenes Ganze, von einem leitenden Gedanken durchzogen. Folgt man dagegen der dualistischen Theorie, so ist man sogar genöthigt, die Lehre von der Elektricität wieder von der Lehre vom Magnetismus zu trennen. Denn während man für die Erklärung der elektrischen Erscheinungen annehmen muss, dass die beiden hypothetischen, einander polar entgegengesetzten elektrischen Materien

oder Fluida mit Leichtigkeit von dem einen Theile eines damit behafteten Körpers auf einen noch so entfernten andern Theil, ja selbst auf einen ganz andern Körper übergehen können, kann man für die magnetischen Fluida nur einen Schein von Beweglichkeit zulassen und betrachtet sie lieber als unzertrennlich mit den einzelnen damit behafteten Körperpartikelchen (den magnetischen Elementen — Poisson) verbunden[1]) und räumt ihnen blos eine drehende Bewegung ein, vermöge welcher die Fläche, in der sie an einander grenzen (die Scheidefläche), ihre Lage ändern kann. Hat aber nicht Ampère (und Weber) nachgewiesen, dass die Ursachen des Magnetismus in der Elektrodynamik zu suchen sind und also beide nicht getrennt werden dürfen? Zudem ist es überhaupt doch etwas bedenklich, anzunehmen, dass diese elektrischen und magnetischen Materien der allgemeinen Massenanziehung, die wir Schwere nennen, nicht unterworfen wären; denn nachdem die Erscheinungen des Lichtes besonders durch Young, Fresnel und Cauchy, und jene der Wärme besonders durch Melloni aus den Undulationen eines hypothetischen Aethers abgeleitet worden sind, blieben die Elektricität und der Magnetismus als einzige schwerelose Materien übrig. Indessen stossen wir in den Erklärungen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen selbst noch auf gewichtigere Schwierigkeiten. Zunächst nämlich kann man sich nicht gut Rechenschaft davon geben, wie zwei wirkliche Materien, die positive und negative Elektricität oder der positive und negative Magnetismus, durch ihre Vereinigung zu Nichts verschmelzen und dadurch ihre Wirkungsfähigkeit nach aussen verlieren können, zwei Materien, die trotz mancher Gegensätze in ihrem Auftreten, dennoch von jenem vollständigen und reinen Gegensatze der abstracten mathematischen positiven und negativen Grössen weit entfernt sind, sich vielmehr in so vielen Beziehungen wesentlich gleichen. Wenn es nun aber hierbei auch möglich wäre, dass diese beiden polaren Materien in jedem Körper in ganz unbegrenzter Menge vorhanden wären und durch Vertheilung von einander geschieden werden könnten, so sieht man doch daraus noch nicht ein, wie und warum diese Scheidung der vorher sich gegenseitig bindenden Materien schon durch Druck, oder durch Reibung, oder gar durch blose Berührung herbeigeführt wird[2]), und gleichwohl besitzen wir in der Berührung die reichhaltigste Quelle der Elektricität. Ferner muss in den meisten Fällen die Bewegung der elektrischen Fluida von Theil zu Theil und die Drehung der Scheideflächen der magnetischen Fluida mit grosser Heftigkeit und bedeutender Geschwindigkeit vor sich gehen,

1) Vergl. Pouillet, Elemente der Experimentalphysik, 3. Aufl., ins Italienische übersetzt von Palmieri, II, §§. 161 und 162.

2) Eine besondere Anziehung der schweren Körpertheilchen gegen die elektrischen Materien findet sich ja nirgends ausgesprochen; sie müsste übrigens in jedem Körper je nach der Art des ihn berührenden zweiten Körpers wechselnd bald auf die positive, bald auf die negative Elektricität gerichtet sein und hätte in allen Fällen die kräftige gegenseitige Anziehung der beiden elektrischen Materien selbst zu überwinden.

aber doch hat noch Niemand unzweideutige Spuren einer solchen Bewegung an den Körpern, auf oder in denen sie vor sich ging, aufgefunden, und es weisen uns (wie wir später sehen werden) die zerstörenden Wirkungen des überspringenden elektrischen Funkens sogar auf eine ganz andere Art der Bewegung hin. Sodann erscheint in den Ohm'schen Gesetzen über die Stromstärke in dem Ausdrucke für den Widerstand w des Leiters zwar die Länge l des Leiters im Zähler, wie es die Gesetze der Hydrodynamik erfordern; allein anstatt des einfachen Querschnittes q im Nenner sollte das Verhältniss desselben zum Umfange u stehen, also $w = \alpha \frac{l}{\frac{q}{u}} = \alpha \frac{lu}{q}$[1]) sein, wie es dort der Fall ist, wo sich (schwere) Flüssigkeiten in Röhren bewegen. Endlich verstösst man gegen das so einfache und allgemeine Gesetz der Beharrung, wenn man die Thatsache, dass der durch Vertheilung erzeugte Magnetismus in vielen Körpern nicht auf Dauer zurückgehalten wird, durch die Behauptung erklären will, dass in diesen Körpern die durch die Vertheilung senkrecht zur magnetischen Achse gestellten Scheidungsflächen des positiven und negativen magnetischen Fluidums sich bei Entfernung der vertheilenden Ursache ganz willkürlich und beliebig, ohne alle Regelmässigkeit wendeten und drehten und doch auch wieder gerade blos soweit, dass eben der Körper unmagnetisch erscheint, nie darüber hinaus, wodurch sich der Körper dann entgegengesetzt magnetisch zeigen würde. Zu einer solchen Wendung müsste doch wohl ein Grund vorhanden sein[2]), und wenn man diesen auf die eine oder die andere Art beseitigte, so müssten auch diese Körper dauernd magnetisch bleiben, um so mehr, als gerade die gegenseitige Anziehung zwischen dem nord- und südmagnetischen Fluidum die durch die Vertheilung herbeigeführte Lage der Fluida in jenen magnetischen Elementen zu erhalten strebt, welche in Linien parallel zur magnetischen Achse liegen. Fast noch sonderbarer jedoch ist der Umstand, dass selbst für längere Zeit magnetisch bleibende Körper unmittelbar nach dem Magnetisiren am stärksten magnetisch sind und dann wieder einen Theil ihres Magnetismus verlieren und auf den sogenannten Sättigungspunkt[3]) zurückgehen; denn dazu müsste bei ihnen jene willkürliche Wendung der Scheidungsflächen nur bis zu einer gewissen Grenze hin möglich sein, und zwar allezeit bis zu derselben Grenze. Nicht weniger

---

1) In dieser Form würden aber die Ohm'schen Gesetze der Erfahrung widersprechen.

2) Eine verwandte Ansicht finde ich von Zantedeschi in seinem *trattato di fisica elementare III, II*, S. 24 ausgesprochen: „Coercitivkraft ist ein Wort ohne entsprechenden Begriff. Die natürliche Neigung zur Verwirrung ferner ist ein Unsinn, welcher der Erfahrung widerspricht, nach der die Ströme sogar streben, sich parallel und gleichgerichtet zu stellen, d. h. in die Lage, in der sie sich anziehen, und es muss dieselbe Kraft, welche sie in diese Lage einzustellen strebt, sie auch in ihr erhalten.

3) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri III, §. 184. — Dub verbindet mit dem Ausdruck Sättigung bei Elektromagneten einen andern Begriff. Vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins, Jahrg. IV, Heft 2 und 3.

merkwürdig ist es jedenfalls auch, dass bei Stahl, Eisen, Mangan, Nickel, Kobalt, Chrom im Zustande des Kirschrothglühens eine Trennung der Fluida selbst durch die kräftigsten Magnete nicht herbeigeführt werden kann[1]). Und gewiss bleibt es dabei immer noch sehr fraglich, wie[2]) dieselbe Coercitivkraft, welche sich der Trennung der beiden Fluida entgegenstellte, nach der einmal erfolgten Trennung sich der Wiedervereinigung derselben widersetzt, und zwar mit noch besserem Erfolge, weil ja der Magnetismus dann eine weit längere Zeit hindurch zurückbleibt, als zu seiner Erregung nöthig war. Wie schon angedeutet wurde, darf man allerdings den Einfluss und die Mitwirkung der gegenseitigen Anziehung und Abstossung der beiden Fluida hierbei nicht unberücksichtigt lassen, und selbst der Erdmagnetismus muss unter Umständen das Auftreten oder Verschwinden des Magnetismus beschleunigen oder verzögern.

Dringend genug sind wir mithin veranlasst und aufgefordert, uns nach einer Theorie umzusehen, welche uns über diese Schwierigkeiten hinweg hilft. In ähnlicher Lage war man einst in Bezug auf die Lehre vom Lichte und von der Wärme. Hier wie dort ist die nahe liegende rein stoffliche Anschauung gewiss zum Theil mit aus Gewohnheit und Bequemlichkeit angenommen worden, da man ja anderwärts Wirkungen in die Ferne nur dadurch auszuüben vermochte, dass man sich etwas Körperliches (z. B. Steine, Kugeln, Boten, Briefe etc.) nach jenem Orte hin bewegen liess, wo man eben die Wirkung hervorbringen wollte. Ueberdiess hatte die stoffliche Anschauung in der Lehre vom Licht und der Wärme einen Umstand mehr für sich, indem man es ja bei Licht und Wärme in den Flammen wirklich mit etwas Stofflichem und Greifbarem, mit entzündeten Gasen, zu thun hatte, während bei der Elektricität höchstens der überspringende Funke an etwas Stoffliches denken lässt[3]). Nichtsdestoweniger wurde beim Licht und bei der Wärme jene stoffliche Anschauung, die Newton'sche Emanationstheorie, verlassen und an ihre Stelle trat eine geistigere, tiefer liegende, die Undulationstheorie. Und sollte dieselbe auch für die Elektricität brauchbar[4]) sein? Machen wir den Versuch; sehen wir zu, wie sich die

---

1) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri II, §. 185 S. 207.

2) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri II, §. 162 S. 145.

3) Das elektrische Flugrad wird keineswegs durch ausströmende Elektricität in drehende Bewegung versetzt (wie das hydraulische Flugrad und die Turbinen durch das ausströmende Wasser); denn im luftleeren Raum dreht es sich nicht, während gerade hier das Ausströmen stärker sein müsste. Seine Bewegung ist vielmehr eine Folge der Abstossung, welche von der umgebenden elektrisirten Luft ausgeht. Daher beginnt es seine Umdrehung auch in isolirenden Mitteln. Aimé, vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri II, §. 213 Note.

4) Schon Cornelius Gemma (1535) spricht von unsichtbaren Strahlen zwischen dem Eisen und dem Magnete. Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri II, §. 181 S. 197.

Gintl sagt in der Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins Jahrg. II, Heft 2 S. 25: „wenn dem Wesen der Elektricität, gleich jenem des Schalles, der Wärme und des Lichtes, Vibrationen eigenthümlicher Art zu Grunde liegen" etc.

A. v. Ettingshausen (die Principien der heutigen Physik, Wien 1857, S. 7)

Erregung, das Wesen und die Wirkungen des elektrischen Zustandes, von diesem Standpunkte aus betrachtet, ausnehmen; überzeugen wir uns jedoch zuvor, ob denn wirklich zwischen den elektrischen Erscheinungen und denen des Lichts und der Wärme irgend ein inniger Zusammenhang obwaltet.

Bei der Betrachtung der Punkte, in welchen Schall, Wärme, Licht, Elektricität und Magnetismus übereinstimmen oder sich von einander unterscheiden, lenken wir unsern Blick zuerst auf die Entstehungsursachen, um zu bemerken, dass Schall, Wärme, Licht, Elektricität und Magnetismus in der Regel zugleich auftreten, wenn auch oft die eine nur in sehr geringem, die andere in weit überwiegendem Grade; dass sie ferner alle bei ihrem Auftreten von mechanischen oder Molecular-Veränderungen derart begleitet sind, dass der ursächliche Zusammenhang zwischen ihnen und diesen Veränderungen nicht zu verkennen ist[1]).

Schall, Wärme, Licht und Elektricität bedürfen zu ihrer Fortbewegung von einem Orte zu einem anderen einer Zeit, welche mit der Entfernung des zweiten Ortes vom ersten zunimmt. Wie ein Beobachter, welcher dem Entstehungsorte eines Tones nahe ist, diesen Ton schon nicht mehr hört, wenn ihn ein entfernterer Beobachter hört oder selbst noch nicht gehört hat, so zeigen auch die an den verschiedenen Stellen einer hinreichend

---

bezeichnet „das Bestreben, die Zahl der Imporderabilien zu verringern und an die Stelle willkührlicher Voraussetzungen die bewährten Gesetze der Mechanik treten zu lassen" als einen bedeutenden Schritt vorwärts und fügt S. 17 hinzu, dass man bei dem Ausdrucke „elektrischer Strom" nicht an ein „wirkliches Fortfliessen von Elektricität, sondern vielmehr nur an eine wellenartige Mittheilung eines Bewegungszustandes in einem ätherischen Medium" denke, und dass die Zeit nicht mehr fern zu liegen scheine, worin die Ansicht festen Fuss fassen werde, es sei die Grundlage der Elektricität von jener des Lichts nicht verschieden.

Oersted setzt ebenfalls, behufs der Erklärung des auf beiden Seiten aufgebogenen Randes einer vom elektrischen Funken durchbohrten Karte, in der Elektricität nicht eine fortschreitende Bewegung eines Stoffes, sondern blos eine Vibration voraus. Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri, II. §. 206. S. 266.

Becquerel, *traité de physique etc.* I. S. 367, sagt: „In der Theorie, in welcher man voraussetzt, dass die Elektricität die Folge von Aetherschwingungen sei, ist das natürliche Fluidum blos der Zustand der Ruhe des Aethers".

Faraday theilt im *London Philos. Magaz.* IV. IX. S. 161 ff. (von da übersetzt in der Zeitschrift des deutsch-österr. Telegraphenvereins, Jahrg. II. Hft 5, S. 102) folgenden Ausspruch von Melloni mit: „Die Gleichheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei Strömen von verschiedener Spannung bietet im Gegentheil ein gewichtiges Argument für die Ansicht derer, welche eine Analogie zwischen dem elektrischen Strome und den durch tönende Körper hervorgerufenen Schwingungen der Luft annehmen. Wie Töne von jeder Höhe denselben Raum in der Luft in derselben Zeit durchlaufen, welches auch die Länge oder die Intensität der Schallwellen sei, so werden auch die mehr oder weniger starken Schwingungen des elektrischen Fluidums etc.

Wenn dagegen an anderen Orten, z. B. in der Zeitschrift des deutsch-österr. Telegraphenvereins, J. I. S. 131, von Faraday, und J. II. S. 275, von Whitehouse, selbst von elektrischen Wellen gesprochen wird, so dürfte daselbst unter „Welle" die Menge der dem Drahte durch eine einmalige Ladung mitgetheilten Elektricität zu verstehen sein.

1) Die Begründung davon wird im Laufe der Abhandlung nebenbei erfolgen. Pouillet nennt als Wärmequellen: elektrische, mechanische und Molecular-Actionen und fasst unter den letztern zusammen chemische und Capillar-Action, Ausdehnung elastischer Flüssigkeiten und Actionen, welche bei jeder Berührung der Körper entstehen. Vergl. Uebersetzung von Palmieri, IV. S. 95.

langen Drahtleitung eingeschalteten Bussolen nicht gleichzeitig, sondern nach einander den Ausschlag, welchen ein die Leitung durchlaufender (momentaner) Strom verursacht. Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung ist wesentlich abhängig von dem Mittel, in welchem sie erfolgt. Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Schall in verschiedenen Mitteln fortbewegt, liegen viele Beobachtungen vor[1]). Dass das Licht von verschiedenen Mitteln mit verschiedener Geschwindigkeit fortgepflanzt wird, wies Fizeau nach. Die Geschwindigkeit der gestrahlten Wärme suchten Pictet und Melloni zu bestimmen[2]). Die als Strahlung zu bezeichnende vertheilende oder inducirende Wirkung der Elektricität ist zwar bis jetzt immer nur auf sehr kleine Entfernungen beobachtet worden; doch scheint es auch hier einer Zeit zu bedürfen, da ja der Elektromagnetismus nicht augenblicklich auftritt und verschwindet, ein Umstand, welcher sich besonders für Elektromotoren als Uebelstand bemerklich macht, wenn dieselben aus festen und beweglichen Magneten construirt werden[3]). Zur Bestimmung der Leitungsgeschwindigkeit der Elektricität hat die Telegraphie wiederholt Gelegenheit geboten[4]), und die angestellten Versuche haben gezeigt, dass die Geschwindigkeit von der Art der Elektricität[5]) abhängig, bei der galvanischen Elektricität aber für alle Stromstärken gleich gross sei[6]), dass sie jedoch mit der Beschaffenheit des Leiters und mit der Natur seiner Umgebung wechselt. Wie also für Lichtstrahlen von verschiedener Farbe, da sie in ihren Schwingungszahlen so ungeheuer von einander abweichen, schwerlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, d. i. das Produkt aus Schwingungszahl und Wellenlänge, gleich gross sein dürfte, so haben auch Elektricitäten verschiedener Quellen verschiedene Geschwindigkeit, namentlich die Reibungselektricität eine weit grössere als die galvanische.

1) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri. III. §§. 353—356.

2) Vergl. *Zantedeschi, trattato.* II. I. 208 und 209. Wride setzt sie gleich $\frac{4}{5}$ von der Geschwindigkeit des Lichts.

3) Ueber die Zeit, welche erforderlich ist, damit der elektrische Strom auf den telegraphischen Apparat wirke, vergl. Zeitschrift des deutsch-österr. Telegraphenvereins. J. II. Hft. 10. S. 228. Hipp sagt: „Da aber die Wirkung der Elektromagnete nicht eine momentane ist etc.“, vergl. Zeitschr. des deutsch-österr. Tel.-Vereins. J. III. Hft. 10. S. 227. Nach Pouillet überwindet der elektrische Strom die Coercitivkraft „plötzlich oder vielmehr im Augenblicke“, vergl. Uebersetzung von Palmieri. II. §. 238. S. 338.

4) Vergl. Zeitschrift des deutsch-österr. Tel.-Vereins. J. I. Hft. 5. S. 133. Ganz neuerdings fand Dr. Wichmann, dass die Zeit, welche der Strom braucht, um von Pillau nach Königsberg zu kommen, kleiner als 0,02 Secunde sei. Vergl. Zeitschrift des deutsch-österr. Tel.-Vereins. J. III. Hft. 9.

5) Wheatstone bestimmte die Geschwindigkeit der Reibungselektricität zu 62000 geogr. Meilen. Die grösste Geschwindigkeit der galvanischen Elektricität fanden Fizeau und Gounelle bei einer Kupferdrahtleitung und Guillemin und Bourneuf bei Eisendrahtleitung, nämlich beide 24258 geogr. Meilen. Freilich wurden die Geschwindigkeiten für beide Elektricitäten nicht nach derselben Methode bestimmt.

6) Nach Clark bei Anwendung von Guttaperchadrähten, vergl. Zeitschrift des Tel.-Vereins. J. II. Hft. 5. S. 102, und nach Fizeau und Gounelle in gewöhnlichem Eisen- und Kupferdraht, vergl. Zeitschr. d. Tel.-Vereins. J. I. Hft. 10. S. 254, u. J. I. Hft. 5. S. 133. Fizeau u. Gounelle fanden zugleich, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig vom Querschnitte und nicht proportional dem Leitungsvermögen ist.

Während aber die Wärme bei gleicher Leitungsfähigkeit der leitenden Substanz um so geschwinder fortgeleitet wird, je grösser die Temperaturdifferenz zwischen dem erwärmten und dem ableitenden Körper ist[1]), so durchlaufen galvanische Ströme von irgend welcher Spannung und Batteriezahl denselben Raum in derselben Zeit, ebenso wie die Geschwindigkeit, mit welcher ein Ton einen Raum in der Luft durchläuft, nicht von der Intensität, von der Länge der Schallwelle oder der Höhe des Tons abhängt[2]).

Hinsichtlich ihres Verhaltens gegen Licht und gegen die Wärme theilen wir die Körper ein in durchsichtige und undurchsichtige, in diathermane und adiathermane[3]). In ähnlicher Weise wird nach Riess[4]) und Henry[5]) die elektrische Induction nicht geschwächt, wenn zwischen den inducirenden Stromleiter und den Körper, in welchem inducirt werden soll, isolirende Zwischenkörper gebracht werden, während dazwischen gebrachte (geschlossene) Leiter die elektrische Induction und die magnetisirende Wirkung in um so höherem Grade schwächen, je besser sie leiten und je vollkommener sie geschlossen sind. Für die Elektricität und für die Wärme giebt es gute und schlechte Leiter. Wir sehen also hinreichend, wie es bei Licht, Wärme und Elektricität (und so auch beim Schall) übereinstimmend von der Beschaffenheit eines Mittels abhängt, ob und in welchem Grade[6]) die bis zu demselben gelangende Bewegung[7]) durch dasselbe hindurch fortgepflanzt wird. Bei allen wird die Fähigkeit eines Stoffs zu isoliren (d. h. eine gewisse Art der Bewegung nicht durch sich hindurch gehen zu lassen) durch die zunehmende Intensität der Bewegung vermindert. Wie mit der Dicke der vorhandenen Schicht eines und desselben Mittels seine Undurchsichtigkeit zunimmt, so wird der elektrische Strom um so schwächer, je länger der schliessende Leiter ist, und eine bestimmte Menge von Elektricität erzeugt auf dem Körper, dem sie mitgetheilt wird, eine um so geringere Spannung, je grösser dieser Körper ist, genau so wie die durch dieselbe Wärmemenge erzeugte Temperaturerhöhung um so geringer ist, je grösser der Körper ist, dem sie mitgetheilt wird. Während endlich dieselbe Substanz für verschiedenfarbige Lichtstrahlen durchsichtig oder undurchsichtig sein kann, kann auch ein und dieselbe Substanz für die eine Elektricität Isolator, für eine andere Leiter sein. Ueber den Zusammenhang zwischen der Leitungsfähigkeit für die Elektricität und der Durchsichtigkeit wissen wir freilich ebenso wenig, wie über den zwischen der Durchsichtigkeit und der Diathermanität, obschon man für Licht und Wärme bereits eine und

1) Vergl. *Pictet, essai de physique. Genève* 1790. I. S. 36.
2) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri. III. §. 328. S. 57.
3) Letzteres nach Melloni.
4) Vergl. Poggendorf, Annalen. XLVII. S. 55.
5) Vergl. *Transactions of the Phil. Soc.* 1840.
6) Vergl. *Zantedischi trattato.* II. I. S. 258 ff.
7) Doch ist auch die Art der Bewegung nicht gleichgiltig, wie besonders die Versuche mit polarisirtem Lichte gezeigt haben.

dieselbe Theorie angenommen hat. Der bei festen und flüssigen Körpern sich nicht in gleichem Sinne äussernde Einfluss der Temperatur auf die elektrische Leitungsfähigkeit eines Körpers scheint eine Folge der dabei im Innern der Körper eintretenden Veränderungen zu sein[1]).

Eine Anzahl von Mineralien besitzen die Eigenthümlichkeit, dass sie, wenn sie beleuchtet werden, selbst nach dem Aufhören der von aussen kommenden Lichteinwirkung noch eine Zeit hindurch leuchten, phosphoresciren[2]); sie lassen sich also wegen dieses Verhaltens vergleichen mit permanenten Magneten, mit elektrisirten Nichtleitern der Elektricität, mit erwärmten Nichtleitern der Wärme.

Die beiden Arten der Fortpflanzung, die Strahlung und die Leitung, sind wesentlich von einander verschieden[3]), und die Nothwendigkeit, sie von einander zu sondern, drängt sich uns besonders in der Wärmelehre und in der Elektricitätslehre auf. Während indessen bei der Wärme die Fortpflanzung durch Strahlung und durch Leitung ungefähr gleichen Rang behaupten, ist bei der Elektricität die Leitung, bei dem Lichte die Strahlung ungemein vorwiegend, ja es dürfte beim Lichte überhaupt nicht leicht sein, eine Leitung durch den Versuch nachzuweisen. Man müsste dann etwa die eine Hälfte eines undurchsichtigen Körpers plötzlich dem Lichte in einer Weise aussetzen, dass eine Strahlung in die andere Hälfte unmöglich ist, und beobachten, ob sich in der andern, in einem dunkeln Raume befindlichen Hälfte das Eintreten der Beleuchtung der ersten Hälfte kund giebt. Andererseits wieder ist es nicht zu verwundern, dass man bei der Elektricität bis jetzt weder eine Reflexion noch eine Brechung beobachtet hat, und man hat sie wohl auch kaum bei ihr gesucht. Ob indess die Elektricität reflectirt wird oder nicht, liesse sich vielleicht auf dieselbe Weise mittelst zweier Hohlspiegel entscheiden, wie Saussure und Pictet die Reflexion der Wärmestrahlen nachwiesen[4]). Und wenn es eine Brechung elektrischer Strahlen giebt, so wird sich dieselbe wohl zu erkennen geben, wenn man einen elektrischen oder magnetischen Körper durch eine aus einer nichtleitenden Substanz verfertigten Sammellinse hindurch auf einen andern Körper (ein Elektrometer) wirken lässt, den man in den Brennpunkt der Linse stellt. Wird aber durch die Linse die Wirkung nicht vergrössert, so würde man doch die Brechung erst dann in Abrede stellen dürfen, wenn man denselben Versuch mit Linsen aus den verschiedenen

1) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri. II. §. 186. S. 208: „die Wärme wirkt auf den Magnetismus nur durch die verschiedene Entfernung, in welche sie die Körpertheilchen von einander bringt.

2) Vergl. C. F. Naumann, Elemente der Mineralogie. Leipzig 1850. S. 133. — Pouillet, übersetzt von Palmieri. II. §. 208. S. 278. — *Becquerel, traité de physique considerée dans ses rapports etc. Paris* 1842—1844. *avant-propos* S. IV. S. 81 des 1. Theiles desselben Werkes bezeichnet Becquerel die Elektricität als Ursache der Phosphorescenz.

3) Ihre gegenseitigen Beziehungen und Unterschiede für die Elektricität werden wir später selbst festzustellen suchen.

4) Vergl. *Zantedeschi, trattato.* II. I. S. 213.



Substanzen und von verschiedenen Halbmessern gemacht hat. Eine ähnliche Bewandtniss hat es mit der Doppelbrechung, welche ja auch in Beziehung auf das Licht nicht bei allen Substanzen auftritt, sondern nur bei denen, welche das Licht, zufolge einer nach verschiedenen Richtungen hin ungleichen Elasticität des Aethers, nicht nach allen Seiten hin mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen[1]). Und endlich gar etwas der Farbenzerstreuung Entsprechendes liesse sich nur da erwarten, wo mehrere von einander verschiedene Wellen vergesellschaftet und vereinigt fortgepflanzt werden.

Wie schon angedeutet wurde, tritt in der Elektricität und im Magnetismus ein gewisser Gegensatz hervor, durch den man sich zur Annahme einer positiven und negativen Elektricität, eines Nord- und Südmagnetismus bewogen fand. Auch beim Licht und bei der Wärme spricht sich zwar eine gewisse Doppelsinnigkeit in den Polarisationserscheinungen aus, und schon die Wahl des Namens „Polarisation" beweist, dass man zur Zeit, als Malus die Polarisation entdeckte[2]), diese Doppelsinnigkeit, der damals herrschenden Emissionstheorie gemäss, für verwandt mit der magnetischen Polarität hielt. Allein ich möchte dieselbe nicht ganz diesem polaren Gegensatze gleichstellen. Wir kommen indessen am Schlusse nochmals darauf zurück.

Rücksichtlich des Zusammenwirkens verschiedener Strahlen und der aus deren verschiedenen Antrieben zu Schwingungen hervorgehenden Erfolge müssen wir nothwendig zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden. Es ist nämlich der Erfolg entweder bedingt durch den Unterschied in den von den Wellen bereits zurückgelegten Wegen und wechselt dann periodisch mit jeder halben Wellenlänge, um welche dieser Unterschied wächst oder abnimmt: oder der Erfolg ist unabhängig von dem Unterschiede der Wege[3]) und es ist höchstens die absolute Länge der Wege von Einfluss, insofern durch sie die Heftigkeit jedes einzelnen Antriebes bestimmt wird. Nur im ersten Falle ist ein eigentliches Zusammenwirken vorhanden und dieses bezeichnet man als Interferenz; im letztern Falle bestehen die Wellen neben einander und behalten mehr oder weniger jede ihre Eigenthümlichkeiten bei; auch ist der letztere Fall der allgemeinere und der erstere ist von ihm nur ein specieller Unterfall, denn er tritt bei den tönenden und leuchtenden Schwingungen nur ein, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Ganz allgemein scheint jedoch die Interferenz bei Flüssigkeitswellen zu sein, denn es wirken zwei sich kreuzende Flüssig-

1) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri. III. §. 446.

2) Im Jahre 1810; vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri. III. §. 447. S. 350 und 351.

3) Z. B. Fresnel: Rechtwinklig auf einander polarisirte Strahlen können nicht auf einander einwirken, oder mit andern Worten, ihre Vereinigung erzeugt immer gleich intensives Licht, welches auch die Differenzen in den von den sich treffenden Wellensystemen zurückgelegten Wegen sein mögen. Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri. III. §. 458. S. 372.

keitswellen[1]) gemeinschaftlich auf die Flüssigkeitstheilchen im Durchkreuzungspunkte ein und erzeugen dadurch, je nachdem sie die Theilchen zu einer Bewegung nach gleichen oder nach verschiedenen Seiten antreiben, in diesem Punkte eine grössere oder geringere Ausweichung, als jede Welle allein erzeugen würde. Man pflegt aber hier als Interferenz nur die Erscheinungen bei parallelen Wellen zu bezeichnen, wo sich nach Befinden stehende Wellen bilden. Ziemlich allgemein noch sind die Interferenzen bei den tönenden Schwingungen, insofern hier nach Seebeck d. J. eine Verstärkung oder Vernichtung einzelner Schwingungen und ganzer Folgen von Schwingungen, d. i. ganzer Töne, auch dann eintreten kann, wenn die Töne nicht an derselben Stelle im Raume entstehen. Im Allgemeinen freilich hören wir zwei nach ihren Schwingungszahlen verschiedene Töne getrennt, und es bezeichnet nur das Anschwellen des Tones zu Stössen oder die Vereinigung dieser letztern zu Combinationstönen die Momente, in denen die Schwingungen beider Töne zusammenfallen. Anders ist es beim Lichte. Wenn sich zwei Lichtstrahlen kreuzen, so werden sie in den meisten Fällen ohne Rücksicht auf Wellenlänge oder den Unterschied in den zurückgelegten Wegen sich in ihren Wirkungen unterstützen, d. h. grössere Helligkeit erzeugen. Nur wenn sie, von gleicher Lichtquelle abstammend, gleiche Wellenlänge besitzen, unter einem sehr kleinen Neigungswinkel zusammentreffen und zugleich ihr Gangunterschied gering ist und nicht etwa eine grosse Anzahl von Wellenlängen beträgt: nur in diesem Falle sind sie interferenzfähig und erzeugen jetzt an dem Durchkreuzungspunkte Licht oder Dunkel, je nachdem ihr Gangunterschied eine gerade oder ungerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt. Polarisirte Strahlen müssen ausserdem noch gleiche Polarisation haben.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Interferenz der Wärmestrahlen. Nur beim Magnetismus und bei der Elektricität sind noch keine eigentlichen Interferenzerscheinungen beobachtet worden, ebenso wenig bei der geleiteten Wärme[2]). Wenn man auf einen Körper zwei magnetische oder zwei elektrische Körper vertheilend einwirken lässt, so wird die Einwirkung des einen durch die des andern unter allen Umständen verstärkt oder vermindert; ob aber das Eine oder das Andere geschieht, hängt keineswegs von dem Unterschiede in den Entfernungen der beiden einwirkenden Körper von jenem, auf den sie einwirken, ab, sondern lediglich von den Vorzeichen der Elektricität oder des Magnetismus der beiden einwirkenden Körper und von ihrer Lage gegen den Körper, auf welchen sie wirken. Allerdings sind hier in der Regel die Quellen der beiden Elektricitäten und

1) Nicht zu übersehen ist wohl hierbei, dass bei den durch Wirkung der Schwere in Flüssigkeiten erzeugten Wellen die Schwingungsbahn im Durchkreuzungspunkte für beide Wellen in ein und dieselbe Gerade fällt, nämlich in die durch diesen Punkt gezogene Richtungslinie der Schwerkraft, dass also gleiche Polarisation vorhanden ist.

2) Hierin liegt eine Veranlassung zu der Annahme, dass die Leitungswellen Wellen der Körpertheilchen sind.

der beiden Magnetismen verschieden. Auf der andern Seite dagegen sehen wir, dass sich positive und negative Elektricität noch so verschiedenen Ursprungs völlig ausgleichen oder theilweise vernichten, so oft ihnen Gelegenheit zur Vereinigung geboten wird. Ebenso unterstützen oder vermindern sich zwei verschiedene elektrische Ströme in ihren magnetisirenden Wirkungen auf denselben Körper unter allen Umständen und wiederum das Eine oder das Andere, je nachdem sie in demselben Ende des zu magnetisirenden Körpers gleiche oder entgegengesetzte magnetische Pole entwickeln[1]). Und auch die chemische Wirkung zweier Ströme ist die Summe oder Differenz der Einzelwirkungen, je nachdem die Ströme gleichgerichtet oder entgegengesetzt sind.

Ein in ein finsteres Zimmer fallender Lichtstrahl erhellt dasselbe nach allen Seiten hin; es theilt sich also die vorherrschend in gerader Linie fortgepflanzte Bewegung nach allen Seiten hin mit, indem von jedem durch den Strahl beleuchteten Punkte Kugelwellen ausgehen und die Bewegung allseitig verbreiten. Dasselbe geschieht auch bei der Reflexion des Lichts von der Reflexionsstelle aus, und beim Schalle, bei der Wärme, bei Flüssigkeitswellen finden wir ein ganz gleiches Verhalten. Auch ein elektrischer oder magnetischer Körper macht alle in seinem Wirkungskreise rings um ihn befindliche Körper elektrisch oder magnetisch und nach den Untersuchungen von Barnabita und Pelagi vertheilt sich ein elektrischer Strom in Flächen allseitig und zwar in verschiedenen Punkten des zur Stromrichtung normalen Querschnitts mit verschiedener[2]) Intensität, beschränkt sich also nicht auf die kürzeste, d. i. geradlinige Verbindungslinie zwischen dem Ein- und Austrittspunkte. — Gewissermaassen als Folge von dieser Verbreitung in Kugelwellen lässt es sich hinstellen, dass die Helligkeit, der Grad der Erwärmung, die Stärke der elektrischen Induction mit dem Quadrate der Entfernung des zu erleuchtenden, zu erwärmenden oder zu inducirenden Körpers von der Licht-, Wärme- oder Elektricitätsquelle abnimmt.

Die Elektricität wirkt endlich auch auf unsere Nerven ganz ähnlich wie Licht und Wärme. Wenn wir uns im milden Sonnenschein befinden, so werden die Gefühlsnerven angenehm von den Licht- und Wärmestrahlen berührt; wenn wir uns einem elektrischen Körper nähern oder auf dem

1) Wenn demnach die vorauszusetzenden elektrischen Wellen sich nicht als interferenzfähig erweisen, so dürfen wir deshalb vielleicht für sie eine kleinere Wellenlänge und eine schnellere Folge der Schwingungen, d. h. eine grössere Schwingungszahl, in Anspruch nehmen, und bei der kurzen Dauer der Phasen noch überdies eine im Verhältniss zur Wellenlänge kleine Aplitude; ferner dürften elektrische Wellen von verschiedenen Quellen nur einen geringen Unterschied in der Wellenlänge haben. Oder es könnte auch dieses Verhalten der elektrischen Wellen eine Folge der eigenthümlichen Schwingungsweise sein, worauf wir später noch einmal zurückkommen werden.

2) Nach der dualistischen Theorie wäre die Ursache davon die verschiedene Länge der Wege *acb, adb, aeb, afb* u. s. w. (S. Taf. IV, Fig. 1.)

Isolirschemel selbst elektrisch werden, so empfinden wir auch ein eigenthümliches Gefühl. Springt ein mässiger Funke auf unsern Körper über, so erzeugt er ein Stechen an der getroffenen Stelle. Eine zu starke Dosis Elektricität unterbricht die Lebensthätigkeit ebenso wie zu grosse Hitze und Kälte. Wenn ein mässiger elektrischer Strom durch den thierischen Körper geht, so veranlasst er die Nerven zur Ausübung ihrer Funktionen und erzeugt örtlichen Schmerz überall da, wo ein gewaltsamer Uebergang nothwendig wird; doch antworten die Nerven blos auf Veränderungen des Stroms, weil, so lange der Strom derselbe bleibt, keine Umstimmung in den Schwingungen der (schlechtleitenden) organischen Theile nothwendig ist. Wie könnte ferner das Auge und das Ohr (auch selbst Geruch und Geschmack), welche ja andere Bewegungen zum Bewusstsein zu bringen bestimmt sind, gegen die Elektricität empfindlich sein, wenn nicht die Elektricität in ähnlicher Weise wie Licht und Töne[1]) auf sie einwirkte? Ausser dieser Einwirkung auf unsere Seh- und Hörorgane veranlasst aber die Elektricität auch objektiv hörbare und sichtbare Erscheinungen. Denn auch wenn der Strom nicht direkt auf die Hörnerven wirkt, vernimmt das Ohr ein Geräusch, namentlich beim Ueberspringen des Funkens. Hat man doch selbst beim Magnetisiren von Eisen Töne vernommen. Desgleichen kennen wir die Elektricität als Quelle eines intensiven Lichts[2]), das sich bei der prismatischen Zerlegung vom Sonnenlichte verschieden zeigt. Die Lichtwirkung geht von beiden Polen zugleich aus und ändert sich mit der Substanz der Poldrähte. Die Farbe und Stärke dieses elektrischen Lichts hängt besonders von der Umgebung ab, d. h. von der grössern oder geringern Fähigkeit des umgebenden Mittels zur Aufnahme und Fortpflanzung der Schwingungen[3]). Offenbar spricht sich hierin die Möglichkeit aus, dass

1) Die Grenzen der hör- und sichtbaren Schwingungen überhaupt sind durch die Einrichtung unserer Hör- und Sehorgane bestimmt. Für die Elektricität hat uns die Natur kein besonderes Organ gegeben; wir sind also in Bezug auf die Elektricität in einer ungünstigeren Lage.

2) Pouillet, übersetzt von Palmieri. II. §. 207. S. 275: Die erste Bedingung für das Erscheinen des elektrischen Lichtes ist die Bewegung der Fluida oder die Störung ihres Gleichgewichts.

3) Daher ist das elektrische Licht im luftleeren Raume so lebhaft und glänzend. Ausserdem ist die Licht- und Wärmeentwickelung um so bedeutender, je stärker der Strom ist und je mehr Hindernisse ihm an dem Orte in den Weg gelegt werden, wo er Wärme und Licht entwickeln soll. Funken und andere leuchtende elektrische Erscheinungen zeigen sich (wenn man von dem durch einen hohen Wärmegrad herbeigeführten Glühen absieht) blos in Nichtleitern und an der Grenze guter Leiter gegen schlechtere. Es scheinen demnach die elektrischen Schwingungen zu Licht- und Wärmeschwingungen herabgestimmt zu werden, so dass durch den Widerstand des Mittels die unsichtbaren, sehr stark brechbaren Strahlen des elektrischen Lichts erst sichtbar werden, und zwar eine um so grössere Menge derselben, je grösser jener Widerstand ist. Da nun für dieselbe brechende Substanz die Brechungsexponenten zweier Strahlen sich umgekehrt verhalten wie deren Wellenlänge, so müssen die Wellenlängen des elektrischen Lichts wegen dessen stärkerer Brechbarkeit kleiner sein, als die des gewöhnlichen Lichts (übereinstimmend mit der Note 1) auf Seite 375). Und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit müsste wachsen, wie man vom Schall zur Wärme, zum Licht und zur Elektricität fortschreitet. Die Brechbarkeit der Wärmestrahlen wächst nach Melloni (vergl. Zantedeschi. II. I. S. 244) mit der Temperatur der Wärmequelle.

durch den Zustand elektrischer Erregtheit und bei der elektrischen Entladung die Aethertheilchen zu jenen Schwingungen angetrieben werden, welche unser Auge als Lichteindruck empfindet[1]). Und mit diesen leuchtenden Schwingungen müssen auch Wärmeerscheinungen verbunden sein, weil ja die elektrischen Funken entzündliche Körper zu entzünden vermögen. Die Wärmeentwickelung zeigt sich aber meist ohne Lichtentwickelung, kann jedoch bis zum Glühen (mit Lichtentwickelung) gesteigert werden. Dass umgekehrt durch das Licht elektrische Erscheinungen hervorgerufen werden, und dass das Licht und die Elektricität chemisch wirken, erwähnen wir hier blos flüchtig, da wir später darauf zurückkommen werden.

Kleinere Mittheilungen.

XL. Bemerkungen über das indirecte Eliminiren bei geodätischen Arbeiten. Obgleich ich bis jetzt glaubte, in meinen verschiedenen Schriften hinsichtlich des indirecten Eliminirens Alles beigebracht zu haben, was dem Praktiker zum sichern Anhaltspunkte dienen könnte, so sehe ich mich doch veranlasst, noch einmal darauf zurückzukommen.

Ich finde nämlich im 1. Heft des 3. Jahrgangs dieser Zeitschrift einen Aufsatz des Herrn Steuerraths Vorländer, welcher das directe Eliminiren bei den geodätischen Rechnungen empfiehlt, dabei aber hinsichtlich des indirecten Eliminirens einige Bemerkungen macht, bei welchen meiner Ansicht Missverständnisse untergelaufen sind, oder an welche sich deren anknüpfen könnten.

Diese Missverständnisse aufzuklären halte ich mich deshalb verpflichtet, weil es begegnen könnte, dass Praktiker, welche noch keine selbstständige Erfahrung in diesen Sachen haben, sich durch die Autorität des Herrn Verfassers irre leiten liessen.

Zum Voraus muss ich meine immer festgehaltene Ueberzeugung aussprechen, dass es für den Zweck selbst im Grunde herzlich gleichgiltig ist, wie man sich des immer verdriesslichen Eliminationsgeschäfts entledigt, und es deshalb, gleiche Zuverlässigkeit des Resultats vorausgesetzt, jedem

1) Die von Pouillet (Uebersetzung von Palmieri. II. §. 210. S. 281) vorgetragene Erklärung, nach welcher das elektrische Licht als eine Reihenfolge sehr kleiner elektrischer Funken bezeichnet wird, erklärt eigentlich gar Nichts, da sie über die Entstehungsweise dieser kleinen Funken keine Rechenschaft giebt.

Arbeiter überlassen werden kann, denjenigen Weg einzuschlagen, welcher ihm gerade der bequemste ist.

Sodann aber glaube ich, dass bei der Vergleichung der beiden Gauss'schen Eliminationsmethoden ein anderer Weg eingeschlagen werden muss, als welchen der geehrte Herr Verfasser einschlägt.

Herr Steuerrath Vorländer berechnet nämlich S. 19 ein von mir in der Ausgleichungsrechnung indirect eliminirtes Beispiel nach der directen Methode, unter Mitbenutzung der meines Wissens zuerst von Encke (Jahrbuch für 1836, S. 256) empfohlenen Summencoefficienten und stellt sodann seine Vergleichung mit meinem Beispiel (Ausgleichungsrechnung S. 391) dadurch an, dass er die Ziffern zählt, welche aufgeschrieben sind.

Hierin ist aber meines Erachtens ein doppeltes Missverständniss. Zuvörderst nämlich liegt der Aufwand von Zeit und Mühe, worauf am Ende doch alles ankommt, nicht, oder doch wenigstens bei weitem nicht allein, im Aufschreiben der Ziffern, die für die weitere Rechnung nothwendig sind, sondern vielmehr in den Rechnungen, die zu diesen nothwendig aufzuschreibenden Ziffern führen; und überdem ist es ein Missverständniss, wenn es heisst, dass ich die Ziffern, welche ich aufschrieb (abdrucken liess) zu diesem Beispiel „verwenden musste".

Was das Erste betrifft, so kann ich zwar über die Abkürzung, welche die von Herrn Steuerrath Vorländer für diesen Zweck empfohlenen Crelleschen Multiplicationstafeln gewähren, nicht aus eigener Erfahrung urtheilen. Sehr unwahrscheinlich aber will es mir dünken, dass z. B. die vierte Zeile des Beispiels + 3,110 u. s. w. durch blosses Ablesen aus dem Buche, ohne irgend eine weitere Bemühung als die, das Buch herbeizuholen und aufzuschlagen, entstanden sein könne. Sind aber Zwischenrechnungen (zu welchen ich ohne Tafeln für diese Zeile doch etwa 24 Ziffern gebrauchen würde) nothwendig, so müssen sie offenbar wenigstens mitgezählt, vielleicht wegen vermehrter Anstrengung der Aufmerksamkeit doppelt gezählt werden.

Hinsichtlich des zweiten Punktes ist übersehen, dass ich bei meinem Beispiel alles aufschrieb, was gerechnet werden musste, und zwar nach dem in meinem Buche durchweg angewandten und auch verschiedentlich (z. B. S. 115, 192) ausdrücklich hervorgehobenem Princip, für die Anfänger einstweilen alles weitläufig aufzuschreiben und es denselben zu überlassen, demnächst das, was sie bequem im Kopfe rechnen können, nicht mehr aufzuschreiben. Keineswegs musste ich also so viel Ziffern verwenden, als gedruckt stehen, vielmehr wird ein schon geübter Rechner je nach dem Grad seiner Uebung im Kopfrechnen, vielleicht mehr als die Hälfte der dort abgedruckten Ziffern ersparen. So z. B. ist S. 391 überall die erste Columne, worin die Producte stehen, für die Anfänger mit hingeschrieben; in der wirklichen Ausführung aber wird man diese Producte in der Regel gleich, ohne sie aufzuschreiben, von der vorhergehenden Differenz-

columne im Kopf abziehen und nur die Differenz aufschreiben; es sei denn, dass man einem grösseren oder aus mehreren Ziffern zusammengesetzten Multiplicationsfactor genommen habe, der dann eine Columne der Producte nothwendig oder doch bequem machte.

Dasselbe Beispiel von einem Rechner behandelt, welcher nur eine sehr mässige Uebung im Kopfrechnen zu haben braucht, wird dann etwa so aussehen:

$k_3 = +2,4$		$k_1 = -0,7$		$k_2 = -0,1$	$k_1 = +0,05$	$k_3 = -0,032$	
— 1,831	+ 4,336	— 4,200	+ 0,136	— 0,206	+ 0,004	+ 0,024	+ 0,028
+ 6,391	+ 10,593	— 3,023	+ 7,570	— 0,193	+ 0,023	— 0,085	+ 0,062
+ 7,212	— 0,133	+ 0,534	+ 0,401	+ 0,135	+ 0,097	— 0,096	+ 0,001
— 11,772	— 14,796	+ 6,089	— 8,107	+ 0,354	— 0,124	+ 0,157	+ 0,033

$k_1 = -0,005$	$k_2 = +0,001$	$k_3 = -0,003$	$k_1 = -0,001$	$k_2 = +0,0002$
— 0,002	+ 0,002	+ 0,004	— 0,002	— 0,001
— 0,084	— 0,006	— 0,014.	— 0,018	— 0,002
+ 0,005	+ 0,008	— 0,001	0,000	+ 0,001
+ 0,081	— 0,004	+ 0,011	+ 0,020.	+ 0,002.

und wären von ihm dann nur 245 Ziffern aufgeschrieben.

Ich wiederhole aber, dass meines Erachtens die Abzählung der aufgeschriebenen Ziffern durchaus nicht den richtigen Maasstab zu Vergleichung beider Methoden abgiebt. Das indirecte Verfahren, richtig angewandt, behält immer den unläugbaren Vortheil, dass man bei ihm keinerlei Tafeln oder Nebenpapier gebraucht und nur in einem durchweg unverändert bleibenden Schematismus so viel aufschreibt, als man, je nach dem Grade der Uebung und Munterkeit, gerade nicht Lust hat, im Kopf zu rechnen.

Auch das zweite, S. 20 des Vorländer'schen Aufsatzes mitgetheilte Beispiel giebt mir noch zu einer Bemerkung Veranlassung, die vielleicht angehenden Praktikern von Nutzen sein kann.

Hier habe ich zuvörderst gegen das blosse Zusammenzählen der aufgeschriebenen Ziffern wieder die obige Ausstellung zu machen. Zu den Zwischenrechnungen, die doch, z. B. bei Erzeugung der Gleichungen (8), (9), (11), (18), offenbar nöthig sind, gebraucht man nämlich, wenn man keine fremden Hilfsmittel benutzt, vielleicht noch an 200 Ziffern auf einem Nebenpapier, welche gerade die meiste Bemühung machen. Uebrigens bin ich ganz einverstanden damit, dass dieses specielle Beispiel direct eliminirt werden musste, denn es ist gerade ein solches, welches wegen des von mir (Ausgleichungsr. S. 392) erwähnten Uebelstandes beim indirecten Eliminiren unerträglich langweilig wird.

Nur muss ich hinzufügen, dass mir und denjenigern Praktikern, welche nach meiner Anweisung gerechnet haben, dieses Beispiel bei einem Horizontabschluss nicht vorgekommen sein könnte, weil wir (eben in der

Absicht, demnächst indirect zu eliminiren) immer den Gauss'schen Kunstgriff anwenden, den ich Beiträge S. 101, Pothenotsche Aufgaben S. 22, Ausgleichungsrechnung S. 163 mitgetheilt habe. — Dadurch würden also hier für die 5 Richtungen auch 5 Normalgleichungen zu Grunde liegen, und deren Bearbeitung würde schwerlich bis zuletzt aufgespart, sondern nach den Bemerkungen Beiträge S. 167 vorbereitet und erleichtert sein. — Auch hat uns immer bei den Repetitionszahlen (versteht sich mit gehörigem Durchschlagen) vorzugsweise die, Beiträge S. 167 erwähnte Rücksicht geleitet, ohne an demnächstige Bequemlichkeit des doch immer secundär bleibenden Eliminationsgeschäfts zu denken.

Obschon ich also, wie gesagt, Niemand tadeln will, welcher bei seinen geodätischen Arbeiten sich gern immer noch des directen Eliminirens bedient, so muss ich doch gestehen, dass ich an meinen bisher den Praktikern gegebenen Rathschlägen hinsichtlich des indirecten Eliminirens durchaus nichts abzuändern wüsste.

Ich benutze aber, in der Hoffnung, dadurch vielleicht manchem Leser dieser Zeitschrift einen Gefallen zu thun, diese Gelegenheit, um authentische Nachricht über die Art und Weise zu geben, wie ich diese indirecte Eliminationsweise von Gauss gelernt habe, welcher leider selbst nie etwas darüber hat drucken lassen, unter Mittheilung seiner eigenen Worte.

Im Frühjahr 1823 hatte er mir seine abgeschlossenen Azimuthe (er nannte sie Tableaux) von 1822 gezeigt, und auf meine Bemerkung, dass ich mich vor der langen Weile des Eliminirens scheuen würde, erwidert, dass er, wenn am Ende nur kleine Grössen zu erwarten seien, „nie mehr direct eliminire“. Ueber sein indirectes Eliminiren hatte er mir sodann einige kurze Andeutungen mündlich gegeben. — Ich eliminirte nun nach diesen im Sommer 1823 meine, Beiträge S. 22—43 angeführten Azimuthe indirect, hatte ihn aber doch nicht ganz richtig verstanden und mir deshalb die Sache ohne Noth viel zu weitläufig gemacht. — Im Herbst 1823 eliminirte ich sodann die Inselsberg-Beobachtungen, Beiträge S. 47, wieder einmal direct*) und klagte ihm bei Uebersendung meines „Tableau“ über die Anstrengung dabei.

Darauf erhielt ich denn unter dem 26. December 1823 einen Brief, von welchem ich die betreffende Stelle hier wörtlich folgen lasse.

„Mein Brief ist zu spät zur Post gekommen und mir zurückgebracht. Ich erbreche ihn daher wieder, um noch die praktische Anweisung zur Elimination beizufügen. Freilich giebt es dabei vielfache kleine Lokalvortheile, die sich nur *ex usu* lernen lassen.

Ich nehme Ihre Messungen auf Orber-Reissig zum Beispiel **). Ich mache zuerst

*) Ich hatte damals, so viel ich mich erinnere, zuerst die 11 ersten Richtungen zu einem Abschluss zusammen genommen und somit, da ich den Kunstgriff noch nicht kannte, 10 Normalgleichungen erhalten.

**) Sie sind gedruckt Beiträge S. 33, vergl. S. 108.



$$1 = 0,$$

nachher aus 1 . 3

$$3 = 77 . 57 . 53{,}107$$

(ich ziehe dies vor, weil 1.3 mehr Gewicht hat als 1.2)

dann aus

$$\left.\begin{array}{ll} 13\,[1\,.\,2]\;2 = & 26 . 44 . 7{,}423 \\ 50\,[2\,.\,3] & 6{,}507 \end{array}\right\}\; 2 = 26 . 44 . 6{,}696,$$

endlich aus

$$\left.\begin{array}{ll} 26\,[1\,.\,4]\;4 = & 136 . 21 . 13{,}481 \\ 6\,[2\,.\,4] & 8{,}529 \\ 78\,[3\,.\,4] & 11{,}268 \end{array}\right\}\; 4 = 136 . 21 . 11{,}641.$$

Ich suche nun die Annäherung erst noch zu vergrössern aus

$$\left.\begin{array}{ll} 13\,[1\,.\,2]\;1 = & -0{,}727 \\ 28\,[1\,.\,3]\;1 = & 0 \\ 26\,[1\,.\,4]\;1 = & -1{,}840 \end{array}\right\}\quad 1 = -0'',855.$$

Da jede gemeinschaftliche Aenderung aller Richtungen erlaubt ist, so lange es nur die relative Lage gilt, so ändere ich alle vier um + 0,855 und setze

$$\begin{array}{l} 1 = 0 + a, \\ 2 = 26 . 44 . 7{,}551 + b, \\ 3 = 77 . 57 . 53{,}962 + c, \\ 4 = 136 . 21 . 12{,}496 + d. \end{array}$$

Es ist beim indirecten Verfahren sehr vortheilhaft, **jeder** Richtung eine Veränderung beizulegen. Sie können sich davon leicht überzeugen, wenn Sie dasselbe Beispiel ohne diesen Kunstgriff durchrechnen, wo Sie überdies die grosse Bequemlichkeit, an der Summe der absoluten Glieder = 0 immer eine Controle zu haben, verlieren.

Jetzt formire ich die **vier** Bedingungsgleichungen und zwar nach diesem Schema (bei eigener Anwendung und wenn die Glieder zahlreicher sind, trenne ich wohl die positiven und negativen Glieder)

$$\begin{array}{llll} ab - 1664, & ba + 1664, & ca + 23940, & da - 25610, \\ ac - 23940, & bc + 9450, & cb - 9459, & db + 18672, \\ ad - 25610, & bd - 18672, & cd - 29094, & dc + 29094. \end{array}$$

Die Bedingungsgleichungen*) sind also

$$\begin{array}{l} 0 = + 6 + 67a - 13b - 28c - 26d, \\ 0 = - 7558 - 13a + 69b - 50c - 6d, \\ 0 = - 14604 - 28a - 50b + 156c - 78d, \\ 0 = + 22156 - 26a - 6b - 78c + 110d, \\ \text{Summe} = 0. \end{array}$$

Um nun indirect zu eliminiren, bemerke ich, dass wenn drei der Grössen a, b, c, $d = 0$ gesetzt werden, die vierte den grössten Werth be-

*) **Gauss** brauchte damals noch den Ausdruck Normalgleichungen blos für die **nach** Vollendung der Eliminationsarbeit übrig bleibenden Gleichungen.

kommt, wenn d dafür gewählt wird. Natürlich muss jede Grösse aus ihrer eigenen Gleichung, also d aus der vierten bestimmt werden. Ich setze also $d = -201$ und substituire diesen Werth. Die absoluten Theile werden dann

$$+5232, \quad -6352, \quad +1074, \quad +46,$$

das Uebrige bleibt dasselbe.

Jetzt lasse ich b an die Reihe kommen, finde $b = +92$, substituire und finde die absoluten Theile

$$+4036, \quad -4, \quad -3526, \quad -506;$$

so fahre ich fort, bis nichts mehr zu corrigiren ist. Von dieser ganzen Rechnung schreibe ich aber in der Wirklichkeit blos folgendes Schema:

	$d = -201$	$b = +92$	$a = -60$	$c = +12$	$a = +5$	$b = -2$	$a = -1$
+ 6	+ 5232	+ 4036	+ 16	− 320	+ 15	+ 41	− 26
− 7558	− 6352	− 4	+ 776	+ 176	+ 111	− 27	− 14
− 14604	+ 1074	− 3526	− 1846	+ 26	− 114	− 14	+ 14
+ 22156	+ 46	− 506	+ 1054	+ 118	− 12	0	+ 26

Insofern ich die Rechnung nur auf das nächste $\frac{1}{1000}$ Secunde führe, sehe ich, dass jetzt nichts mehr zu corrigiren ist. Ich sammle daher

$a = -60$	$b = +92$	$c = +12$	$d = -201$
+ 5	− 2		
− 1			
− 56	+ 90	+ 12	− 201

und füge die *correctio communis* + 56 bei, wodurch wird

0	+ 146	+ 68	− 145

also die Werthé

1	0
2	26 . 44 . 7,697
3	77 . 57 . 54,030
4	136 . 21 . 12,351.

Fast jeden Abend mache ich eine neue Auflage des Tableau, wo immer leicht nachzuhelfen ist. Bei der Einförmigkeit des Messungsgeschäfts giebt dies immer eine angenehme Unterhaltung; man sieht dann auch immer gleich, ob etwas zweifelhaftes eingeschlichen ist, was noch wünschenswerth bleibt etc. Ich empfehle Ihnen diesen Modus zur Nachahmung. Schwerlich werden Sie je wieder direct eliminiren, wenigstens nicht, wenn Sie mehr als zwei Unbekannte haben. Das indirecte Verfahren lässt sich halb im Schlafe ausführen, oder man kann während desselben an andere Dinge denken." —

So weit Gauss. — Ich habe nichts hinzuzufügen, als dass ich mich bei Befolgung dieser Rathschläge immer sehr gut gestanden habe.

Marburg, den 25. Sept. 1858. GERLING.



XLI. Einfache Ableitung eines Poncelet's Theoremes. Poncelet's Theorem lehrt bekanntlich für $\sqrt{a^2+b^2}$ einen Näherungswerth finden, indem man setzt:

$$\sqrt{a^2+b^2} = ma + nb$$

und darin die Coefficienten m und n so bestimmt, dass der Fehler, den man dadurch begeht, im Verhältniss zum wahren Werthe des Wurzelausdruckes ein Minimum wird.

Zwar sind die beiden Coefficienten m und n nach Poncelet*) auch schon von Anderen und auf besonders elegante Weise von Weisbach**) und Scheffler***) bestimmt worden, doch glaube ich, dass ebenso die folgende Ableitung nicht nur wegen ihrer grossen Einfachheit von Interesse sein dürfte, sondern auch, weil sich zeigen wird, wie leicht sich die genannten Coefficienten durch einfache Construction finden lassen.

Der Fehler, den man durch Annahme des obigen Näherungswerthes begeht, ist

$$ma + nb - \sqrt{a^2+b^2}$$

und sein Verhältniss zum wahren Werthe des Wurzelausdruckes oder der relative Fehler, den ich mit ζ bezeichnen will,

$$\zeta = \frac{ma+nb}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1,$$

oder wenn man $\frac{a}{b} = tang\,\omega$ setzt:

$$\zeta = \frac{m + n\,tang\,\omega}{\sqrt{1+tang^2\,\omega}} - 1,$$

woraus einfacher

$$1)\qquad \zeta = m\cos\omega + n\sin\omega - 1$$

folgt.

Bei den Anwendungen des Poncelet'schen Lehrsatzes, wie sie besonders häufig im Gebiete der technischen Mechanik vorkommen, sind gewöhnlich die Werthe a und b unbekannt und man kennt nur die Grenzen des Verhältnisses $\frac{b}{a}$ oder des Werthes $tang\,\omega$, d. h. man weiss von dem rechtwinkeligen Dreiecke (s. Taf. IV, Fig. 2) nur, dass die Hypotenuse zwischen die beiden Richtungen OZ_1 und OZ_2 hineinfällt, dass also der kleinste Werth von $\omega = \varphi_1$ und der grösste Werth φ_2 ist. Unter dieser allgemeinen Voraussetzung sollen nun im Folgenden die Werthe m und n so bestimmt werden, dass der relative Fehler

$$\zeta = m\cos\omega + n\sin\omega - 1$$

der möglichst kleinste werde.

---

*) *Poncelet, Mécanique appliqué aux machines.*

**) Weisbach, Polytechn. Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Heft 1.

***) Scheffler's Uebersetzung von Moseley, Mechanische Principien der Ingenieurkunst und Architektur.

Der letzte Ausdruck lässt sich aber sehr leicht graphisch darstellen, wenn man beachtet, dass die ersten beiden Glieder

$$m \cos \omega + n \sin \omega$$

nichts anderes als die Polargleichung eines Kreises ausdrücken, dessen Pol in der Peripherie liegt.

Macht man nämlich $OA = m$ (s. Taf. IV, Fig. 3) und $OB = n$, wobei OB normal zu OA, und legt durch die drei Punkte O, A und B einen Kreis, so lässt sich leicht beweisen, dass ein beliebiger Radiusvector OZ, der mit OA den Winkel $ZOA = \omega$ bildet, durch den zuletzt gegebenen Ausdruck bestimmt ist.

Zieht man, um das zu beweisen, den Durchmesser OZ_0 und verbindet Z_0 mit Z, so ist

$$OZ = OZ_0 \cos Z_0OZ$$

oder wenn wir die Neigung des Durchmessers OZ_0 gegen OA mit φ und den Radius des Hilfskreises mit ϱ bezeichnen:

$$OZ = 2\varrho \cos (\varphi - \omega)$$

$$OZ = 2\varrho \cos \varphi \cos \omega + 2\varrho \sin \varphi \sin \omega.$$

Nun ist aber der Figur gemäss

$$2\varrho \cos \varphi = m \quad \text{und} \quad 2\varrho \sin \varphi = n,$$

daher, wie behauptet wurde,

$$OZ = m \cos \omega + n \sin \omega.$$

Beschreibt man nun noch von O aus mit dem Radius

$$OX = OP = 1$$

einen Kreis, so ist allgemein das Stück

$$PZ = m \cos \omega + n \sin \omega - 1,$$

oder PZ ist nichts anderes, als der relative Fehler, den man durch die Annahme der Grössen $OA = m$ und $OB = n$ gemacht hat.

Hiernach ist leicht zu ermessen, wie sich aus der Figur für jeden Werth von ω sofort der relative Fehler ζ entnehmen lässt, er ist stets durch das zwischen die beiden Kreise hineinfallende Stück PZ des Radiusvectors OZ bestimmt.

Die Grenzwerthe von ω waren φ_1 und φ_2; macht man daher in der Figur noch

$$\angle P_1OA = \varphi_1 \quad \text{und} \quad \angle P_2OA = \varphi_2,$$

so geben die Strecken P_1Z_1 und P_2Z_2 die Grösse des (negativen) Fehlers an den Grenzen und man bemerkt ohne Weiteres, dass dieser Fehler überhaupt dreimal zu einem Maximum wird, erstens an den beiden Grenzen und dann für $\omega = \varphi$, d. h. wenn der Radiusvector mit dem Durchmesser zusammenfällt; dieser dritte grösste (positive) Fehler ist also P_2Z_0, welcher letztere sich auch einfach durch Differentiation von Gleichung 1) ergeben hätte.

Nun ist aber nach der eingeführten Bezeichnung

$$OZ_2 = 2\varrho,$$

ferner

$$OZ_1 = 2\varrho \cos(\varphi - \varphi_1)$$

und

$$OZ_2 = 2\varrho \cos(\varphi_2 - \varphi),$$

und daher ergeben sich denn die drei grössten Fehler, die ich beziehungsweise mit ζ_0, ζ_1 und ζ_2 bezeichne,

2) $$\zeta_0 = 2\varrho - 1,$$

3) $$\zeta_1 = 1 - 2\varrho \cos(\varphi - \varphi_1)$$

und

4) $$\zeta_3 = 1 - 2\varrho \cos(\varphi_2 - \varphi).$$

Bis jetzt wurden die Lage und Grösse des Hilfskreises, also auch m und n als bekannt angenommen und daraus die Fehler abgeleitet. Das vorliegende Problem erfordert aber das Umgekehrte; man macht in Betreff der grössten Fehler bestimmte Voraussetzungen und bestimmt daraus die Werthe von m und n. Die vortheilhaftesten Bedingungen hinsichtlich der anzunehmenden Werthe für die grössten Fehler bestehen nun darin, dass man alle drei gleich gross annimmt. Die Richtigkeit dieser Annahme leuchtet sogleich ein, wenn man sich in Fig. 3 (Taf. IV) bei unveränderlicher Lage der Linien OP_1 und OP_2 den Durchmesser OZ_0 des Kreises um O gedreht denkt, dann ferner den Durchmesser ein Mal grösser, das andere Mal sich kleiner vorstellt; man bemerkt dann bald, dass die günstigsten Verhältnisse, wie erwähnt, unter der Voraussetzung

$$\zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2$$

eintreten.

Aus der einen Bedingung $\zeta_1 = \zeta_2$ folgt nun zunächst nach Gleichung 3) und 4)

$$1 - 2\varrho \cos(\varphi - \varphi_1) = 1 - 2\varrho \cos(\varphi_2 - \varphi),$$

woraus sich zunächst

5) $$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

ergiebt. Es muss also der Durchmesser OZ_0 des Hilfskreises den Winkel $P_1OP_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ halbiren.

Dann folgt aus

$$\zeta_0 = \zeta_2$$

oder nach Gleichung 2) und 4)

$$2\varrho - 1 = 1 - 2\varrho \cos(\varphi_2 - \varphi)$$

unter Benutzung des Werthes von φ der Radius des Hilfskreises:

6) $$\varrho = \frac{1}{1 + \cos\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

oder

7) $$\varrho = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{4}(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Und nun ergeben sich die verlangten Coefficienten nach Fig. 3:

$$OA = m = 2\varrho \cos\varphi \quad \text{und} \quad OB = n = 2\varrho \sin\varphi,$$

für welche Werthe sich unter Benutzung von Gleichung 5) und 7) folgende Ausdrücke finden:

$$8) \qquad m = \frac{2 \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)}{1 + \cos \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos^2 \frac{1}{4} (\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$9) \qquad n = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)}{1 + \cos \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_1)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos^2 \frac{1}{4} (\varphi_2 - \varphi_1)},$$

und der grösste Fehler wird:

$$\zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2 = 2 \varrho - 1 = \frac{1 - \cos \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)}{1 + \cos \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)},$$

oder einfacher

$$10) \qquad \zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{4} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Das sind dieselben Ausdrücke, welche Poncelet zuerst entwickelte. Gewöhnlich weiss man von den beiden Grössen a und b wenigstens, welche die grössere ist; nehme ich a als die grössere, dann liegt das Verhältniss $\frac{b}{a} = \operatorname{tang} \omega$ (Fig. 2, Taf. IV) zwischen 0 und 1 und es folgt

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 45^0,$$

wonach sich nach obigen Gleichungen folgende Werthe berechnen:

$$\varphi = 22 \tfrac{1}{2}{}^0;$$
$$\varrho = 0{,}51978,$$
$$m = 0{,}96046,$$
$$n = 0{,}36783,$$

und der grösste Fehler $= 0{,}03945$, d. h. 3,9 Procent des wahren Werthes; gewöhnlich setzt man in diesem Falle genau genug:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}96\, a + 0{,}40\, b.$$

Weitere Ausführung des Gegenstandes findet sich an den oben bezeichneten Orten; im Folgenden soll nur noch kurz angedeutet werden, in welcher Weise sich für einen beliebigen Fall die Coefficienten m und n durch Construction bestimmen lassen.

Man trage die beiden senkrecht auf einander stehenden Achsen OX und OY auf (s. Taf. IV, Fig. 4) und ziehe OZ_1 und OZ_2 in der Art, dass $\angle Z_1OX = \varphi_1$ und $\angle Z_2OX = \varphi_2$ ist, halbire dann den Winkel Z_1OZ_2 durch OZ_0 und beschreibe von O aus mit dem Radius $OX = OY = 1$ einen Kreis. Nun ist der Hilfskreis so zu legen, dass sein Mittelpunkt C auf OZ fällt, dass er durch O geht und dass dabei die Abschnitte Z_1P_1, Z_2P_2 und Z_0P_0 gleich gross ausfallen. Zu diesem Zwecke bestimmt man nach Gleichung 7) den Radius ϱ dieses Kreises und zwar durch Construction, indem man berücksichtigt, dass $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = Z_0OZ_1 = Z_0OZ_2$, und dass nach Gleichung 7) 1 die mittlere Proportionale zwischen $1 + \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ und ϱ ist. Dieser Hilfskreis schneidet dann die beiden Achsen OX und OY der Art, dass $OA = m$ und $OB = n$ ausfällt, welche Grössen sich dann mit dem Zirkel direct abnehmen lassen.

Zürich, den 12. April 1858. Prof. Dr. Zeuner.

XLII. Ueber den Grenzwerth von $n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$ für $n=\infty$. In dem Lehrbuche der Arithmetik des für die Wissenschaft zu früh verstorbenen Dr. Barfuss (s. Literaturzeitung zu Heft 2, Jahrgang III) findet sich ein Versuch, direct und ohne Voraussetzung der Formel $Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e$ zu beweisen, dass der Ausdruck $n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$ bei unendlich wachsenden ganzen positiven n sich einer bestimmten Grenze nähert, welche für $a \gtrless 1$ von Null differirt. Da jener Beweis äusserst umständlich, ein kürzerer aber mir nirgends vorgekommen ist, so will ich hier zeigen, wie ungemein einfach sich die Sache gestaltet, wenn man die Ungleichung

$$1)\qquad n x^{\frac{1}{n}}+y>(n+1)(xy)^{\frac{1}{n+1}}$$

zum Ausgangspunkte nimmt, die für alle positiven x und y, mit alleiniger Ausnahme des Falles $x=y^n$, giltig bleibt (s. Heft 3, Jahrgang III, S. 188).

Für $x=a$ und $y=1$ hat man nach Nr. 1), wenn a nicht $=1$ ist,

$$n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)>(n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right),$$

mithin

$$2)\qquad a-1>2\left(\sqrt{a}-1\right)>3\left(\sqrt[3]{a}-1\right)>4\left(\sqrt[4]{a}-1\right)\ldots.;$$

der Ausdruck $n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$ nimmt also bei unendlich wachsenden n fortwährend ab. Aus Nr. 1) folgt weiter für $x=a$ und $y=\frac{1}{a}$

$$3)\qquad n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)>1-\frac{1}{a};$$

jene Abnahme geht daher nur bis zu einer, die Grösse $1-\frac{1}{a}$ übersteigenden Grenze, die wir mit A bezeichnen wollen:

$$4)\qquad Lim\left[n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]=A.$$

Nehmen wir zuerst $a>1$, so beträgt nach Nr. 2) A weniger als $a-1$, und nach Nr. 3) mehr als $1-\frac{1}{a}$, ist also jedenfalls positiv; im Falle $a<1$ setzen wir $a=\frac{1}{b}$, wo $b>1$, und haben

$$Lim\left[n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]=Lim\left[-\frac{n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)}{b^{\frac{1}{n}}}\right]=-B,$$

und zwar liegt B zwischen $b-1=\frac{1}{a}-1$ und $1-\frac{1}{b}=1-a$, d. i. zusammen

$$5)\qquad \begin{cases} 1-\frac{1}{a} < A < \qquad a-1 \text{ für } a>1, \\ -\left(\frac{1}{a}-1\right) < A < -(1-a) \text{ für } a<1. \end{cases}$$

Hiermit erledigt sich die Hauptsache, dass A eine bestimmte, endliche, von Null verschiedene Grösse ist. Man kann aber noch etwas weiter gehen.

Bezeichnet τ eine unendlich wachsende nicht ganze positive Zahl, so giebt es doch immer zwei benachbarte ganze positive Zahlen m und $n=m+1$, zwischen denen τ enthalten ist, und es darf daher ebensowohl $\tau=m+\mu$ als $\tau=n-\nu$ gesetzt werden, wo μ und ν positive ächte Brüche sind, die sich zur Einheit ergänzen. Der Ausdruck $\tau\left(a^{\frac{1}{\tau}}-1\right)$ liegt nun zwischen

$$\tau\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right)=\left(1+\frac{\mu}{m}\right).m\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right)$$

und

$$\tau\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\left(1-\frac{\nu}{n}\right).n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right);$$

die Ausdrücke rechter Hand convergiren bei unendlich wachsenden τ, m, n gegen die gemeinschaftliche Grenze A, daher gilt die Gleichung

$$6)\qquad Lim\left[\tau\left(a^{\frac{1}{\tau}}-1\right)\right]=A,$$

welche die Verallgemeinerung des früheren Satzes darstellt. Für $\frac{1}{\tau}=\delta$ wird

$$7)\qquad Lim\frac{a^{\delta}-1}{\delta}=A$$

und hier bedeutet δ eine, der Grenze Null zueilende Grösse.

Wir betrachten noch den Ausdruck

$${}^{a}log\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=\omega\,.\,{}^{a}log\left(1+\frac{1}{\omega}\right),$$

worin ω irgend eine positive unendlich wachsende Zahl bedeuten möge. Da unter dieser Voraussetzung $log\left(1+\frac{1}{\omega}\right)$ die Null zur Grenze hat, so setzen wir

$${}^{a}log\left(1+\frac{1}{\omega}\right)=\vartheta \text{ mithin } \omega=\frac{1}{a^{\vartheta}-1}$$

und erhalten

$$Lim\left\{{}^{a}log\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]\right\}=Lim\left\{\frac{\vartheta}{a^{\vartheta}-1}\right\}=\frac{1}{A}={}^{a}log\left(a^{\frac{1}{A}}\right)$$

und durch Rückgang zu den Zahlen

$$8)\qquad Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=a^{\frac{1}{A}}.$$

Diese Gleichung beweist, dass sich der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)$ einer bestimmten endlichen Grenze nähert, die nur eine absolute Zahl sein kann, weil linker Hand ausser ω keine andere Grösse vorkommt; nennen wir e diese Zahl, setzen also

$$9)\qquad Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e,$$

so folgt durch Vergleichung der rechten Seiten

$$10)\qquad e=a^{\frac{1}{A}}.$$

Hiervon lässt sich ein doppelter Gebrauch machen. Einerseits ist nämlich nach Nr. 5), wenn $a>1$ genommen wird,

$$a^{\frac{1}{a-1}}<e<a^{\frac{a}{a-1}},$$

oder für $a=1+\frac{1}{\alpha}$

$$11)\qquad \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}<e<\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha+1},$$

z. B.

$$2<e<2^2,\quad (\tfrac{3}{2})^2<e<(\tfrac{3}{2})^3,\quad (\tfrac{4}{3})^3<e<(\tfrac{4}{3})^4\quad \text{u. s. w.},$$

wonach e mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden könnte. Andererseits bestimmt sich A aus der Gleichung 10), nämlich

$$A=\frac{1}{{}^{a}log\, e}={}^{e}log\, a.$$

Vermöge dieser Betrachtungen kann man auf die Differentiation der Potenz sogleich die Differentiation der Exponentialgrössen folgen lassen, während man sonst die Differentiation des Logarithmus dazwischen schieben muss; strengen Systematikern wird dies wohl erwünscht sein.

Schlömilch.

XLIII. Ueber die elementare Entwickelung der unendlichen Produkte für die trigonometrischen Functionen. Aus dem bekannten Satze, dass $\sin mz$ bei ungeraden m unter der Form

$$\sin mz=\sin z\left\{A_1\sin^{m-1}z+A_2\sin^{m-2}z+\ldots+A_{m-1}\sin z+A_m\right\}$$

dargestellt werden kann, leitet man gewöhnlich eine Produktenformel für $\sin mz$ her, welche für $mz=x$ die Gestalt

$$\sin x=m\sin\frac{x}{m}\left[1-\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{2\pi}{m}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{n\pi}{m}}\right)^2\right],$$

$$n=\frac{m-1}{2},$$

annimmt, und gewinnt aus dieser das unendliche Produkt für $\sin x$, indem man m unendlich wachsen lässt. Dieser Grenzübergang bedarf indessen einiger Vorsicht, denn wenn es auch keinem Zweifel unterliegt, dass der Satz

$$Lim \frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{h\pi}{m}} = \frac{x}{h\pi}$$

auf die anfänglichen Faktoren des obigen Produktes ohne Weiteres anwendbar ist, so weiss man doch nicht, wie es sich in dieser Beziehung mit den Endfaktoren verhält, bei denen h von m abhängt, z. B. $=n$, $n-1$, $n-2$ etc. ist. Ebendeswegen hat auch Cauchy (*Cours d'Analyse, Note VIII et IX*) den gewöhnlichen Weg an jener Stelle verlassen und dafür einen eigenthümlichen Gang genommen, dessen Weitläufigkeit wohl schon Manchem unbequem geworden sein mag. Wir wollen dagegen zeigen, dass die erforderliche Genauigkeit weit kürzer und einfacher erreicht werden kann.

Wir bezeichnen mit k eine beliebige constante ganze Zahl $<n$ und zerlegen das obige Produkt auf folgende Weise:

$$1)\qquad \sin x = m \sin\frac{x}{m}\left[1-\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{k\pi}{m}}\right)^2\right]P,$$

$$2)\qquad P=\left[1-\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{(k+1)\pi}{m}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{n\pi}{m}}\right)^2\right];$$

dabei richten wir die Aufmerksamkeit zunächst auf das aus $n-k$ Faktoren bestehende Ergänzungsprodukt P, welches unter der kurzen Form

$$P=(1-Q_1)(1-Q_2)\dots(1-Q_{n-k})$$

dargestellt werden möge.

In den Nennern der mit Q_1, Q_2 etc. bezeichneten Brüche kommen der Reihe nach die Bögen

$$\frac{k+1}{m}\pi,\quad \frac{k+2}{m}\pi,\quad \dots\ \frac{n}{m}\pi = \frac{n}{2n+1}\pi$$

vor, die sämmtlich $<\frac{\pi}{2}$ sind; in den Zählern findet sich immer der Bogen $\frac{x}{m}$, welcher $<\frac{\pi}{2}$ und zugleich kleiner als alle jene Bögen ist, sobald $x<(k+1)\pi$ vorausgesetzt wird. Bei dieser Annahme sind Q_1, Q_2, ... Q_{n-k} positive ächte Brüche, woraus folgt

$$(1-Q_1)(1-Q_2)\dots(1-Q_{n-k})<1$$

oder

$$3)\qquad P<1.$$

Um eine untere Grenze für P zu erhalten, benutzen wir den leicht erweis-

baren Satz, dass jedes Produkt von der Form $(1-Q_1)(1-Q_2)\ldots$ mehr als die Differenz $1-(Q_1+Q_2+\ldots)$ beträgt, sobald $Q_1, Q_2\ldots$ positive ächte Brüche sind*); es gilt daher die Ungleichung

$$4)\qquad P>1-(Q_1+Q_2+\ldots+Q_{n-k}),$$

welche sich durch die folgende Betrachtung noch bedeutend vereinfachen lässt.

Mittelst einer gewöhnlichen trigonometrischen Umformung gelangt man ohne Mühe zu der Gleichung

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\alpha+\delta}$$
$$=\frac{\alpha\sin\alpha(1-\cos\delta)+\sin\alpha(\delta-\sin\delta)+\cos\alpha\sin\delta(\tang\alpha-\alpha)}{\alpha(\alpha+\delta)},$$

und hier sind bei positiven δ die Differenzen $1-\cos\delta$ und $\delta-\sin\delta$ positiv. Nehmen wir ferner an, dass α nicht ausserhalb des ersten Quadranten liegt, so ist $\tang\alpha-\alpha$ gleichfalls positiv; Zähler und Nenner des rechter Hand stehenden Bruches sind jetzt positive Grössen, mithin ist auch der Werth des Bruches, d. h. die links verzeichnete Differenz positiv oder

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\alpha+\delta}.$$

Für $\alpha+\delta=\beta$ giebt dies den Satz, dass

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$$

ist, wenn α einen Bogen des ersten Quadranten und β irgend einen grössern Bogen bedeutet. In dem speciellen Falle $\beta=\frac{1}{2}\pi$ wird hieraus die Ungleichung

$$5)\qquad \frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{2}{\pi}\quad\text{oder}\quad\frac{1}{\sin\alpha}<\frac{\pi}{2\alpha},$$

von der wir sogleich Gebrauch machen werden.

Nach dem Vorigen ist, wenn der Bogen $\frac{h}{m}\pi$ den ersten Quadranten nicht überschreitet,

$$\frac{1}{\left(\sin\frac{h\pi}{m}\right)^2}<\frac{m^2}{4h^2};$$

durch Multiptication mit

---

*) Es ist nämlich bei positiven Q_1, Q_2, Q_3 etc.

$$(1-Q_1)(1-Q_2)=1-(Q_1+Q_2)+Q_1Q_2>1-(Q_1+Q_2);$$

daraus folgt durch Multiplication mit $1-Q_3$

$$(1-Q_1)(1-Q_2)(1-Q_3)$$
$$>1-(Q_1+Q_2+Q_3)+(Q_1+Q_2)Q_3>1-(Q_1+Q_2+Q_3)$$

u. s. w.

Bei diesen Multiplicationen ist aber vorauszusetzen, dass $Q_1, Q_2\ldots$ ächte Brüche sind, weil sonst der eine oder andere Faktor negativ werden und folglich das Zeichen $>$ in das Zeichen $<$ übergehen würde.

$$\left(\sin\frac{x}{m}\right)^2 < \frac{x^2}{m^2}$$

wird hieraus

$$\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{h\pi}{m}}\right)^2 < \frac{x^2}{4}\cdot\frac{1}{h^2},$$

und wenn man k der Reihe nach $= k+1,\ k+2, \ldots n$ setzt, so erhält man Ungleichungen, in denen linker Hand die Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-k}$ stehen. Die Summe derselben ist:

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots + \varrho_{n-k}$$
$$< \frac{x^2}{4}\left[\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \frac{1}{(k+3)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right].$$

Durch die Bemerkung, dass

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},\quad \frac{1}{(k+2)^2} < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}, \ldots$$

wird die obige Ungleichung stärker und zugleich einfacher, nämlich

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{n-k} < \frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right),$$

zieht man beide Seiten von der Einheit ab, so ergiebt sich

$$6)\qquad P > 1 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right).$$

Aus den Ungleichungen 3) und 6) zusammen folgt, dass

$$7)\qquad P = 1 - \varrho\,\frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)$$

gesetzt werden kann, wo ϱ einen nicht näher bestimmbaren positiven ächten Bruch bezeichnet.

Nach dieser Ermittelung des grössten und kleinsten Werthes, zwischen welchen das Ergänzungsprodukt P enthalten ist, bietet der Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende m keine Schwierigkeit mehr. Lassen wir nämlich k constant bleiben und m ins Unendliche wachsen, mithin auch $n = \frac{1}{2}(m-1)$ unendlich werden, so geht die Gleichung 1) in die folgende über:

$$8)\qquad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)P,$$

und hier ist P zwischen 1 und $1 - \frac{x^2}{4k}$ enthalten oder

$$P = 1 - \varrho\,\frac{x^2}{4k},\quad 1 > \varrho > 0,$$

wobei aber ϱ nicht denselben Werth wie vorhin zu besitzen braucht. Die Gleichung 8) liefert schliesslich auch das unendliche Produkt für $\sin x$, wenn erst P auf die linke Seite transponirt und nachher $k = \infty$ genommen wird, wodurch P in die Einheit übergeht.

Ein ganz analoges Verfahren würde zur Ableitung des unendlichen Produktes für $\cos x$ dienen können, kürzer aber ist folgender Weg. Man setze in der Gleichung 8) das eine Mal $2k$ für k, das andere Mal $\frac{1}{2}x$ für x und multiplicire die letzte Gleichung mit 2; die Ergebnisse bestehen in folgenden Gleichungen:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(2k)^2\pi^2}\right)P',$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}x = x\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(2k)^2\pi^2}\right)P'',$$

Durch Division wird hieraus

$$10)\quad\left\{\begin{array}{l}\cos\tfrac{1}{2}x = \left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)Q,\\[2ex] Q=\dfrac{P'}{P''}=\dfrac{1-\varrho'\,\dfrac{x^2}{8k}}{1-\varrho''\,\dfrac{x^2}{16k}},\end{array}\right.$$

wobei ϱ' und ϱ'' wieder gewisse positive ächte Brüche bedeuten, auf deren Werthe es nicht weiter ankommt. Durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende k findet man $Lim\ Q = 1$ und $\cos\frac{1}{2}x$ gleich dem bekannten unendlichen Produkte. SCHLÖMILCH.

XLIV. Bemerkungen über die Integration der linearen Differentialgleichung:

$$1)\qquad (a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0.$$

Nach der Laplace'schen Methode ergiebt sich folgendes Integrale für die Gleichung 1):

$$2)\qquad y=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du,$$

woselbst A, B, α, β, m Zahlen sind, die sich aus der identischen Gleichung:

$$\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+b_1u+b_0}=m+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta}$$

ergeben und wo ferner A und B positive Zahlen bedeuten, oder solche imaginäre, deren reeller Bestandtheil positiv ist. Ich habe in den Fällen, wo die Summe von A und B gleich einer ganzen positiven Zahl ist, A und B selbst aber gebrochen sind, auch das zweite partielle Integral der Gleichung 1) bestimmt und verweise hierüber auf die Mittheilung, die ich Seite 47 dieses Bandes der Zeitschrift machte.

Ich will nun suchen, das Integral der Gleichung 1) ebenfalls in Form eines bestimmten Integrales anzugeben, wenn A und B negative Zahlen sind, und glaube durch dies die Laplace'sche Methode und auch meine Seite 47 gegebene Mittheilung wesentlich zu vervollständigen.

Zu diesem Behufe betrachte ich die zwei Differentialgleichungen:

$$3)\quad (m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0,$$

$$4)\quad (m+x)z''-[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]z'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]z=0,$$

welche sich von einander nur in den Zeichen von A, B, α, β unterscheiden, und suche auf den Zusammenhang zwischen y und z. Setzt man in 3)

$$y=e^{\lambda x}Y$$

und in 4)

$$z=e^{-\lambda x}Z$$

so erhält man folgende zwei Differentialgleichungen:

$$(m+x)Y''+[A+B+(2\lambda-\alpha-\beta)(m+x)]Y'$$
$$+[\lambda(A+B)-A\beta-B\alpha+(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(m+x)]Y=0,$$
$$(m+x)Z''-[A+B+(2\lambda-\alpha-\beta)(m+x)]Z'$$
$$+[\lambda(A+B)-A\beta-B\alpha+(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(m+x)]Z=0,$$

welche sich beide für

$$\lambda=\frac{A\beta+B\alpha}{A+B}$$

vereinfachen und sich dann folgendermaassen schreiben lassen:

$$5)\quad Y''+\frac{A+B+(2\lambda-\alpha-\beta)(m+x)}{m+x}Y'+(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)Y=0$$

$$6)\quad Z''-\frac{A+B+(2\lambda-\alpha-\beta)(m+x)}{m+x}Z'+(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)Z=0.$$

Nun ist nach einem bekannten, von Lebesgue herrührenden Satze*) (*Liouville's Journal, tom IX*) das Integral der Gleichung 6) bekannt, wenn das Integral der Gleichung 5) bekannt ist, und zwar hat man

$$Z=(m+x)^{A+B}e^{(2\lambda-\alpha-\beta)x}Y',$$

somit, wenn man statt Y und Z ihre Werthe setzt, nämlich

$$Y=e^{-\lambda x}y,\quad Z=e^{\lambda x}z,$$

so erhält man

$$z=(m+x)^{A+B}e^{-(\alpha+\beta)x}\left(y'-\frac{A\beta+B\alpha}{A+B}y\right),$$

und dies ist die Gleichung, wodurch die Integrale der Gleichungen 3) und 4) zusammenhängen.

Ist also das Integral der Gleichung 3)

$$y=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du,$$

so ist das Integral der Gleichung 4)

---

*) Dieser Satz ergiebt sich aus der identischen Gleichung

$$y''-Py'+ny=e^{\int Pdx}(v''+Pv'+nv)',$$

woselbst P eine beliebige Function von x, n eine Constante und

$$y=v'.e^{\int Pdx}$$

bedeutet.

$$z = (m+x)^{A+B} e^{-(\alpha+\beta)x} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \left(u - \frac{A\beta + B\alpha}{A+B}\right) du,$$

und wäre das Integral der Gleichung 3)

$$y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du,$$

so fände man für das Integral der Gleichung 4)

$$z = (m+x)\, e^{-(\alpha+\beta)x} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u - A\beta - B\alpha) .$$

$$. \log [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du + e^{-(\alpha+\beta)x} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du.$$

Suchen wir nun weiter auf, in welchem Zusammenhange die Integrale der beiden Gleichungen

7) $(m+x)\, y'' + [B - 2\alpha (m+x)]\, y' + [A - B\alpha + \alpha^2 (m+x)]\, y = 0,$

8) $(m+x)\, z'' - [A - 2\alpha (m+x)]\, z' + [A - B\alpha + \alpha^2 (m+x)]\, z = 0$

stehen, welche sich von einander, wie man sieht, blos in den Zeichen von B und α unterscheiden.

Die beiden Substitutionen

$$y = e^{\lambda x} Y, \quad z = e^{-\lambda x} Z$$

in die beiden Gleichungen 7) und 8) gemacht, führen auf

$$(m+x)\, Y'' + [B + 2(\lambda - \alpha)(m+x)]\, Y' + [A - B\alpha + B\lambda + (\lambda-\alpha)^2 (m+x)]\, Y = 0,$$
$$(m+x)\, Z'' - [B + 2(\lambda - \alpha)(m+x)]\, Z' + [A - B\alpha + B\lambda + (\lambda-\alpha)^2 (m+x)]\, Z = 0,$$

und wenn man

$$\lambda = \alpha - \frac{A}{B}$$

setzt und alsdann durch $m+x$ dividirt, so erhält man

$$Y'' + \frac{B + 2(\lambda-\alpha)(m+x)}{m+x}\, Y' + (\lambda-\alpha)^2\, Y = 0,$$

$$Z'' - \frac{B + 2(\lambda-\alpha)(m+x)}{m+x}\, Z' + (\lambda-\alpha)^2\, Z = 0,$$

woraus

$$Z = (m+x)^B e^{2(\lambda-\alpha)x}\, Y'$$

folgt, und da

$$Z = e^{\lambda x} z, \quad Y = e^{-\lambda x} y$$

ist, so erhält man:

$$z = (m+x)^B e^{-2\alpha x} \left(y' - \frac{B\alpha - A}{B}\, y\right),$$

und diese Gleichung zeigt, auf welche Weise die Integrale der beiden Gleichungen 7) und 8) zusammenhängen.

Betrachten wir endlich noch die beiden Gleichungen

$$9)\qquad m y'' + (-m\alpha + n + x)\, y' + [A - \alpha(n + x)]\, y = 0,$$

$$10)\qquad m z'' - (-m\alpha + n + x)\, z' + [A - \alpha(n + x)]\, z = 0,$$

welche sich von einander in den Zeichen von m, A und α unterscheiden. Setzt man

$$y = e^{\alpha x} Y, \quad z = e^{-\alpha x} Z,$$

so erhält man:

$$Y'' + \frac{m\alpha + n + x}{n} Y' + \frac{A}{m} Y = 0,$$

$$Z'' - \frac{m\alpha + n + x}{n} Z' + \frac{A}{m} Z = 0,$$

folglich ist:

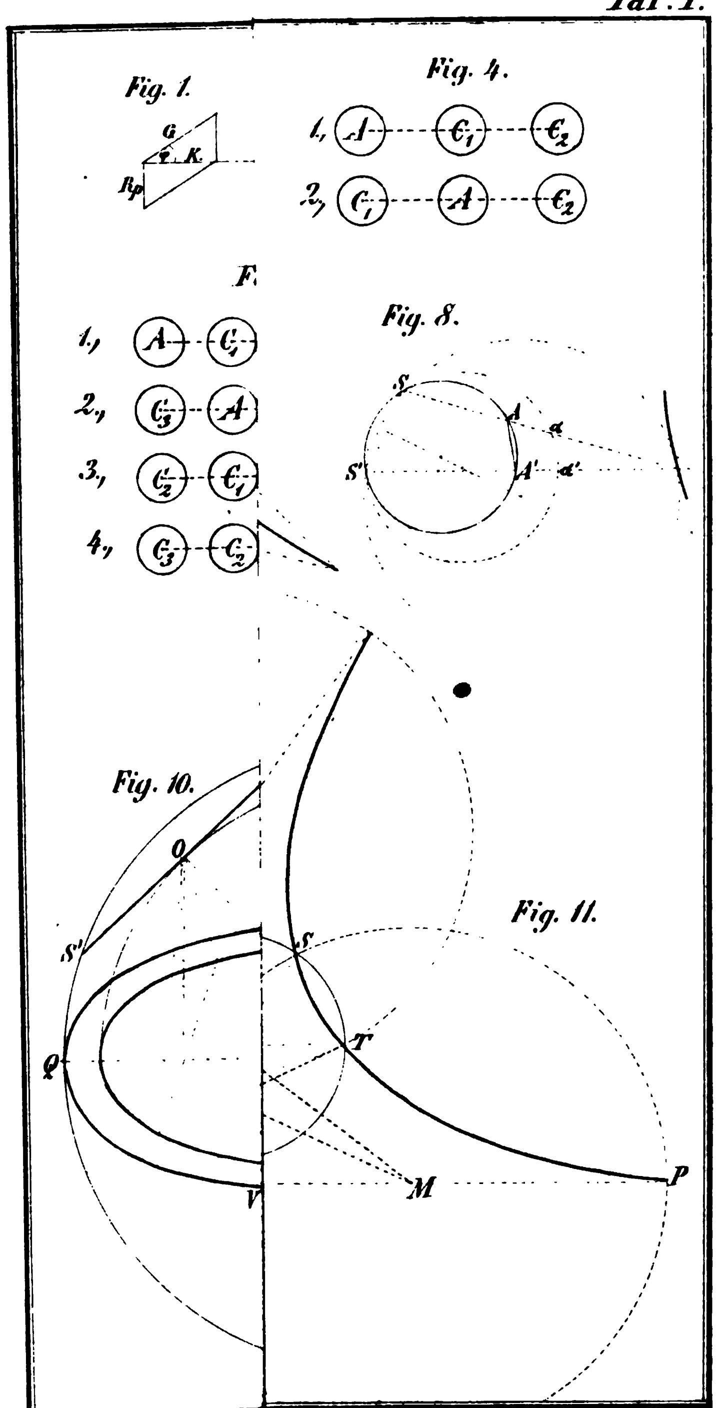
$$Z = e^{\frac{m\alpha + n}{n} x + \frac{x^2}{2n}} Y',$$

und somit:

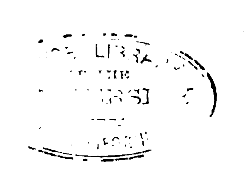
$$z = e^{\left(\frac{m\alpha}{n} + 1 - 2\alpha\right) x + \frac{x^2}{2n}} (y' - \alpha y),$$

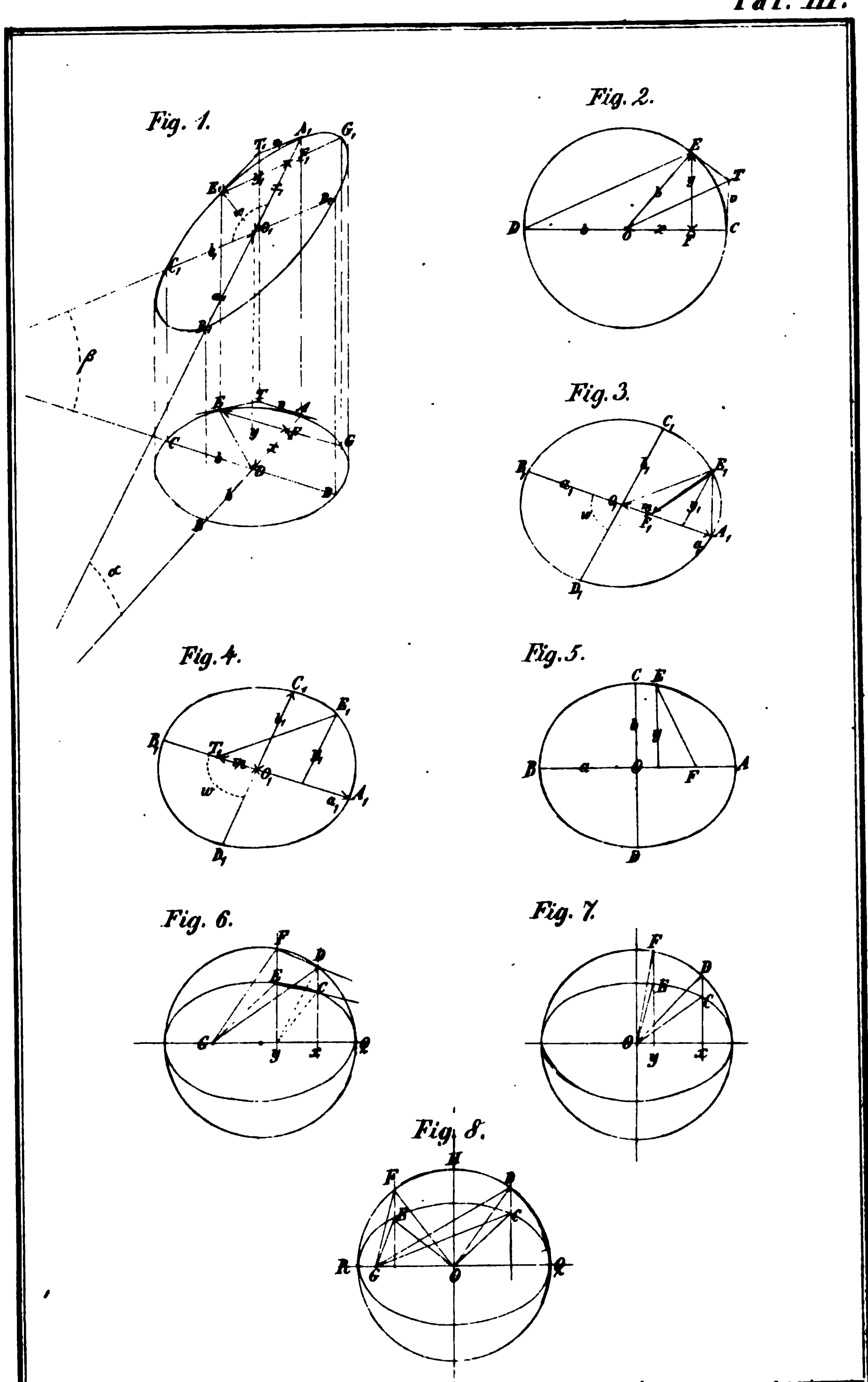
welche Gleichung den Zusammenhang angiebt, der zwischen den Integralen der zwei Gleichungen 9) und 10 herrscht.

Prof. Simon Spitzer.

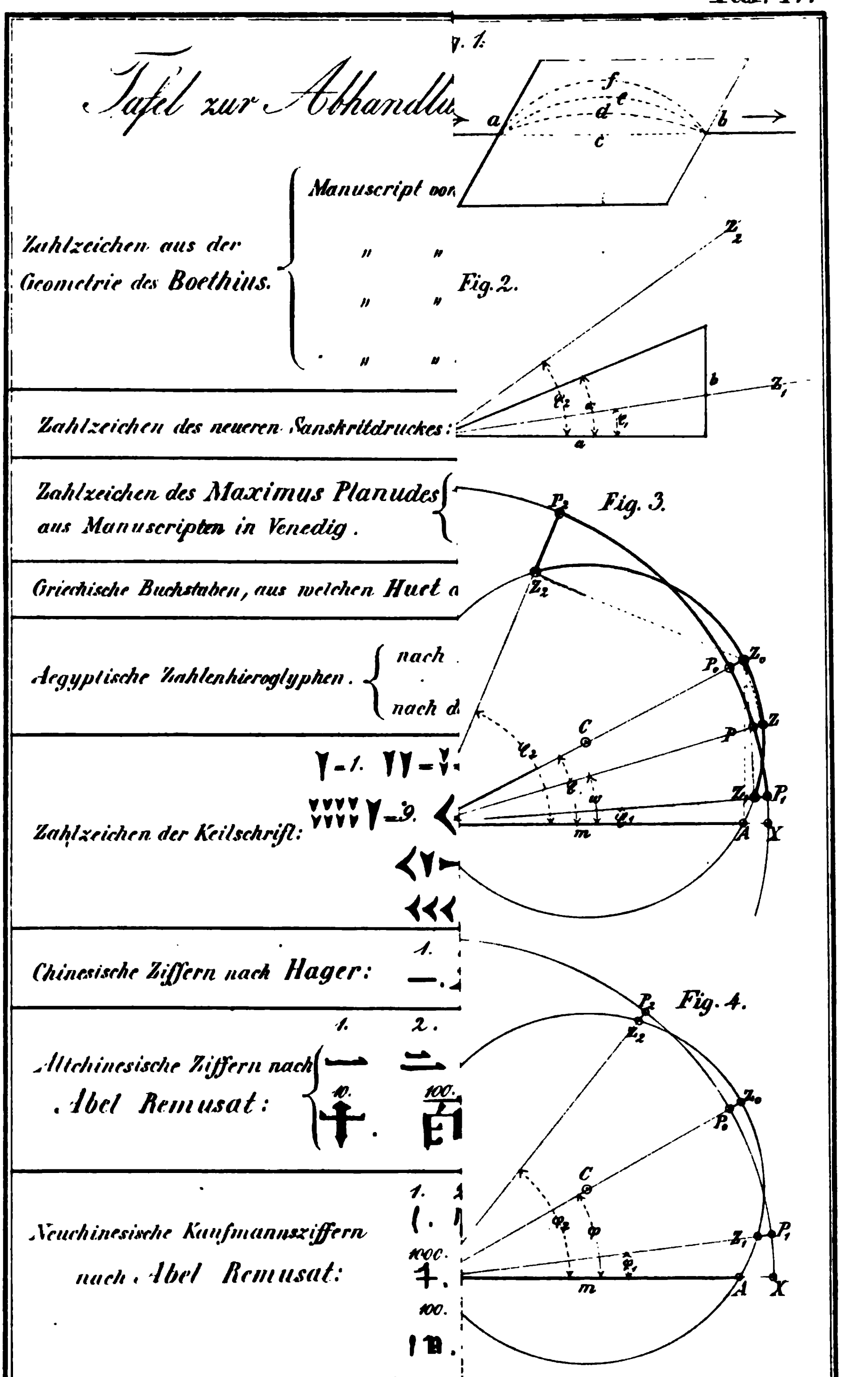


 Lith. u. Druck v. Adler & Dietze, Dresden.

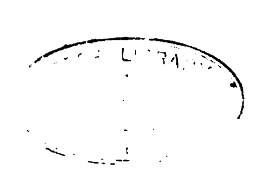




Lith. u. Druck v. Adler & Dietze Dresden.



 Lith. u. Druck v. Adler & Dietze, Dresden.



Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und Dr. B. Witzschel.



Dritter Jahrgang.



LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1858.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Geometrie.

Mechanik.

Physik.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten. Von Prof. Dr. J. PETZVAL. Auf Kosten der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien, in Comm. bei W. Braumüller.

Das Werk, welches wir hier besprechen, hat zum Zwecke, allgemeine Integrationsmethoden zu liefern, für solche lineare Differentialgleichungen, deren Coefficienten algebraische und rationale Functionen der unabhängig Veränderlichen sind.

Wenn man bedenkt, welche Anstrengungen bisher von den grössten Analysten gemacht worden sind, um meistentheils nur eine einzige specielle Gleichung, oder höchstens eine Gattung von Gleichungen von genau bestimmter Form zu integriren, so muss man staunen über die Kühnheit des Unternehmens eines Mannes, alle linearen Differentialgleichungen der oben besagten Form zu integriren, und zwar durch geschlossene Formen, so oft solche vorhanden sind (Seite XII. der Vorrede zur 1. Lieferung des 1. Bandes.)

Aber wenn man näher in die Petzval'schen Arbeiten eingeht, vermindert sich nach und nach das Erstaunen, und man sieht eine Leistung vor sich, die wohl sehr Beachtenswerthes enthält, im Ganzen aber von dem vorgesetzten Ziele noch äusserst weit entfernt bleibt.

Vier Lieferungen des Werkes liegen uns gegenwärtig vor, ein Zeitabschnitt von 6 Jahren trennt die erste von der vierten; die Ansichten des Verfassers über mehrere wesentliche Punkte haben sich selber während diesen Jahren geändert, und leider kömmt er hierdurch öfters in die Lage früher Gesagtes berichtigen zu müssen.

So sagt P. Seite VII der Vorrede zur ersten Lieferung: Da jeder Differentialquotient einer unendlichen und convergirenden Reihe auch wieder eine convergirende Reihe ist, sohin auch etc. etc., und Seite III der Vorrede zur zweiten Lieferung: Jeder Differentialquotient einer convergirenden Reihe ist auch selbst im Allgemeinen eine convergirende Reihe, eine Ausnahme hiervon findet nur für specielle Werthe bei Veränderlichen statt, und in Fällen, wo die Reihe selbst an den Grenzen der Convergenz steht, folglich ist auch etc. etc.

Seite XI der Vorrede zur ersten Lieferung sagt P.: Wir benutzen die Form einer convergirenden, nach aufsteigenden Potenzen der unabhängig Veränderlichen geordneten Reihe im gegenwärtigen Werke zwar allerdings, z. B. zum Beweise der Existenz des allgemeinen Integrales, sind sogar zur genauen Discussion derjenigen Fälle genöthigt, in denen eine solche Reihenentwickelung unzulässig ist, benutzen sie aber zur wirklichen Integration der Gleichungen nicht, denn, eben weil sie die allgemeine Form ist, die jede Functiou annehmen kann, so ist sie auch die undurchsichtigste, d. h. die, zur Bestimmung der speciellen Eigenschaften den Functionen am wenigsten dienliche. Welch ein einfaches Bild macht sich das mathematische Anschauungsvermögen von einem *Sinus*, *Cosinus* oder einen Exponentiellen — man bringe diese Functionen in die alles gleichmachende Reihenform, und alle analytischen Eigenschaften, Periodicität, Maximum-, Null- und Minimum-Werthe, unendliches Wachsen oder Abnehmen gegen eine bestimmte Grenze hin, oder über alle Grenzen hinaus, sind dem Auge entschwunden. Seite 140 der zweiten Lieferung ist P. noch immer derselben Meinung, er spricht daselbst von den grossen Unvollkommenheiten der Integrations-Methode durch unendliche, nach steigenden Potenzen der Veränderlichen geordneten Reihen, und in der vierten Lieferung handelt der ganze 5. Abschnitt von 140 engen Quartseiten blos von der Integration in Form von aufsteigenden Reihen und von der Wichtigkeit dieser Methode.

Wir wollen jetzt nicht weitere Beispiele solcher Art anführen, sondern wenden uns zur Besprechung der einzelnen Abschnitte. Der erste Abschnitt, die Einleitung, enthält die allgemeinen Vorbegriffe der Integration der linearen Differential- und Differenzen-Gleichungen der ersten Ordnung, dann den Beweis der Existenz des allgemeinen Integrales einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten, welcher von P. zuerst und in gehöriger Strenge geführt wird. Dieser Beweis verdient Beachtung, und bildet eine Zierde des P.'schen Werkes.

Nach diesem kommt P. zur Bildung der Differentialgleichungen aus den particulären Integralen, folgert aus dem Bildungsgesetze, dass gleiche particuläre Integrale in einer Differentialgleichung nicht zulässig seien. Ferner gründet er (aber erst im II. Abschnitte) hierauf eine Methode, die Allgemeinheit des auf irgend eine Weise erhaltenen Integrales zu erweisen; hernach spricht P. von der Methode der Variation der Constanten und beschliesst endlich diesen Abschnitt mit dem Plan seines Werkes.

Wir kommen jetzt zum 2. Abschnitte, der den Titel führt: Differential-Gleichungen mit particulären Integralen von einerlei geschlossener Form. Hier werden vorerst die Gleichungen mit con-

stanten Coefficienten, dann die von Legendre behandelte Gleichung auf die bekannte Weise integrirt, alsdann zu Gleichungen von der Form:

$$1)\quad (a_n + b_n x)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

übergangen, welche Laplace zuerst mittelst bestimmter Integrale integrirte, wie im III. Bande von *Lacroix Traité du calcul différentiel et du calcul integral pag.* 572 gesehen werden kann. Laplace setzt nämlich das Integral obiger Gleichung in der Form

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, V du$$

voraus, bestimmt V als Function von u und die Integrationsgrenzen als constante derart, dass der vorgelegten Differentialgleichung Genüge geschieht. P. erwähnt nie den Namen Laplace, sondern schreibt die eben gegebene Methode einfach sich selber zu.

Er wendet dann beispielsweise die Laplace'sche Methode in dem speciellen Falle an, wo die Gleichung der 2. Ordnung angehört, und somit folgende ist:

$$(a_2 + b_2 x)\, y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

geht dann zur Integration der Gleichungen

$$4)\quad y^{(n)} \pm a x y = 0$$

über, welche zuerst von Scherk in Crelle's Journal 10. Band, dann von Lobatto im 17. Band desselben Journals integrirt wurden. Letzterer schlägt auch genau den Weg ein, den Laplace für die Gleichungen der Form (1) angiebt.

P. wendet sich dann zur Integration der Gleichungen

$$5)\quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + (a_0 \pm b_0 x) y = 0,$$

$$6)\quad x y^{(n)} \pm a^2 y = 0$$

und behandelt von letzterer besonders die speciellen Fälle:

$$x y''' \pm y = 0$$

$$x y^{(5)} + y = 0.$$

Namentlich findet P. für die Gleichung

$$7)\quad x y''' - y = 0$$

das particuläre Integral:

$$8)\quad y = \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} \sin \frac{x}{v} . v dv$$

an dessen Richtigkeit wir zweifeln. — Denn differenzirt man dieses y dreimal, so erhält man:

$$y''' = -\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} \cos \frac{x}{v} . \frac{dv}{v^2},$$

folglich ist

$$xy''' = -\int_0^\infty x e^{-\frac{v^2}{2}} \cos\frac{x}{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} \frac{d \sin\frac{x}{v}}{dv} dv,$$

und dies giebt, nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$xy''' = \sin\frac{x}{0} + \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} \sin\frac{x}{v} . v dv,$$

somit ist:

$$10)\qquad xy''' - y = \sin\frac{x}{0}.$$

Der zweite Theil der Gleichung soll aber für den Fall, dass das von P. gewonnene y richtig ist, gleich Null sein; es ist aber in der That gleich $\sin\frac{x}{0}$ und dieses hat den Charakter einer unbestimmten Grösse.

Der Grund dieser Erscheinung ist einfach. P. setzt:

$$11)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} \sin\frac{v}{2} . v dv = 2\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} \sin\frac{x}{v} . v dv,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} \cos\frac{x}{v} . v dv = 0.$$

Die Grösse unter den Integralen wird aber für den Werth $v=0$, der zwischen den Integrationsgrenzen liegt, unbestimmt, offenbar ist dadurch die Richtigkeit der beiden zuletzt aufgestellten Gleichungen in Frage gestellt. Ueberhaupt verliert das Laplace'sche Verfahren seine Anwendbarkeit, wenn die unter dem Integralzeichen stehende Funktion innerhalb der Integrationsgrenzen unbestimmt oder unendlich wird, wie es hier der Fall ist.

Noch eine andere Einwendung haben wir gegen das hier befolgte Integrationsverfahren. Ein Integral einer linearen Differentialgleichung erscheint uns nur dann tadelfrei, wenn es die gehörige Anzahl willkührlicher Constanten hat, und wenn es zugleich giltig ist für jeden Werth von x, ob dieser nun positiv oder negativ ist.

So fände man z. B. nach P. (pag. 48) für das Integral der Gleichung

$$12)\qquad xy'' + y' - 4xy = 0$$

für positive x folgendes Integrale:

$$13)\qquad y = C_1\int_{-2}^{+2} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} e^{ux} du + C_2\int_{-\infty}^{-2} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} e^{ux} du,$$

hingegen für negative x folgendes andere

$$14)\qquad y = C_1\int_{-2}^{+2} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} e^{ux} du + C_2\int_{+2}^{\infty} (u^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} e^{ux} du.$$

Wir fragen nun, wenn aber zur Bestimmung der Constanten der Werth von y und y' gegeben wäre für $x=0$, welches von den beiden P.schen Integralen sollte man da anwenden? oder aber: wenn für $x=\pm a$, $y=b$ sein soll, wie lässt sich diese Bedingung in dem Integral ausdrücken?

Die Schwierigkeit verschwindet augenblicklich, wenn man das Integral der Gleichung (12) in folgender Gestalt giebt:

$$15)\qquad y=C_1\int_{-2}^{+2}(u^2-4)^{-\frac{1}{2}}e^{ux}\,du+C_2\int_{-2}^{+2}(u^2-4)^{-\frac{1}{2}}e^{ux}\log[x(u^2-4)]\,du,$$

welche für jeden, sowohl positiven als negativen Werth von x statt hat.

Es ist in der That auffallend, dass die Laplace'sche Methode für die Integration linearer Differentialgleichungen so sehr in Vergessenheit geräth, dass sie nicht nur Männer, wie Scherk[1]) und Lobatto[2]), sondern sogar Geometern des ersten Ranges, wie Liouville[3]) und Jacobi[4]) unberücksichtigt liessen, trotzdem ihre Gedanken bei solchen Gleichungen weilten, die mittelst derselben am leichtesten hätten aufgelöst werden können. — P. hat das Verdienst, wenn auch diese Methode nicht entdeckt, so doch auf ihre ungemeine Brauchbarkeit aufmerksam gemacht zu haben.

Wir kommen nun zu einem neuen Paragraph: Betrachtung derjenigen Fälle, in welchem die vorgetragene Integrationsmethode nur unvollständige Integrale liefert und Vervollständigung derselben," der an Wichtigkeit alles frühere übertrifft. Dieser Paragraph ist unsers Wissens ganz P.'s eigene Schaffung, und verdient daher unsere sorgfältige Beachtung im hohen Grade. Laplace stellte das Integral der Gleichung (1), deren Coefficienten bezüglich x vom ersten Grade sind, wie schon gesagt in der Form

$$2)\qquad y=\int_{u_1}^{u_2}e^{ux}\,V\,du$$

auf, und findet alsdann

$$16)\qquad V=\frac{1}{U_1}e^{\int\frac{U_0}{U_1}du}$$

wo der Kürze halber:

$$17)\qquad \begin{aligned}U_0&=a_nu^n+a_{n-1}\,u^{n-1}+\ldots+a_0\\ U_1&=b_nu^n+b_{n-1}\,u^{n-1}+\ldots+b_0\end{aligned}$$

ist, ferner als Gleichung die zur Bestimmung der Integrationsgrenzen dient

$$18)\qquad e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}=0,$$

---

[1]) Crelle's Journal, 10. Band.
[2]) " " 17. "
[3]) Gergonne, *Annales de mathem. tom* 21.
[4]) Crelle's Journal, 10. Band.



haben nun U_0 und U_1 einen gemeinschaftlichen Factor, etwa $(u-\alpha)^r$, so findet P. r particuläre Integrale in folgender merkwürdigen Form:

$$19)\qquad y=e^{\alpha x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_r x^r).$$

Tritt ferner der Fall ein, dass die Gleichung (16) für gewisse endliche Werthe von u unendlich wird, etwa für $u=\beta$ und ist $u=\beta$ ein einfacher Factor des Polynoms U_1, so erscheint y in der merkwürdigen Form eines Differentialquotienten, nämlich man hat dann

$$20)\qquad y=\frac{d^m}{du^m}[e^{ux}\varphi(u)],$$

ein Ausdruck, in welchem nach vorgenommener Differentiation statt u die Grösse β substituirt werden muss. — Ein solches particuläres Integral erscheint auch dann noch, wenn U_0 und U_1 beliebig viele gemeinschaftliche Factoren $u-\beta$ besitzen, aber U_1 stets nur einen solchen Factor mehr hat, als U_0.

Wir können nicht unterlassen, P.'s Ideengang ganz genau zu zeigen, denn hier sind wir genöthigt, einige Bemerkungen machen zu müssen. Nehmen wir, um möglichst einfach durchzukommen, folgende, von vielen Mathematikern auf die verschiedenste Weise behandelte Gleichung:

$$21)\qquad xy''-ay'-b^2xy=0,$$

woselbst a und b positive Zahlen bedeuten. U_0 und U_1 sind hier:

$$U_0=-au,\quad U_1=u^2-b^2;$$

man hat somit:

$$\frac{U_0}{U_1}=-\frac{\frac{1}{2}a}{u+b}-\frac{\frac{1}{2}a}{u-b};$$

folglich:

$$22)\qquad V=\frac{1}{(u+b)^{\frac{a}{2}+1}(u-b)^{\frac{a}{2}+1}}$$

und als Gleichung, die zur Bestimmung der Grenzen dient:

$$23)\qquad \frac{e^{ux}}{(u+b)^{\frac{a}{2}}(u-b)^{\frac{a}{2}}}=0.$$

Diese Gleichung wird für keinen endlichen Werth von u befriedigt, wohl aber folgende andere Gleichung:

$$24)\qquad \frac{e^{ux}}{(u+b)^{\frac{a}{2}}(u-b)^{\frac{a}{2}}}=\infty$$

und zwar genügt dieser:

$$25)\qquad u=\pm b.$$

P. fand nun, dass der Gleichung (21) genügt werden könne, durch eine Summe von $\frac{1}{2}a$ zwischen unendlich nahen Grenzen genommenen Integrale. Setzen wir beispielsweise

$$a=4$$

voraus, und schreiben wir uns $\frac{1}{2}a + 1$, d. i. in dem jetzt eben vorliegenden Falle, 3 willkürliche nach ihrer Grösse geordnete Zahlen

$$h_1,\ h_2,\ h_3$$

auf, denken wir uns ferner unter ε eine, gegen Null convergirende Grösse, so genügt, wie P. behauptet, der Gleichung

$$26)\qquad x y'' - 4 y' - b^2 x y = 0$$

folgender Ausdruck:

$$27)\qquad y = C_1 \int_{b+\varepsilon h_1}^{b+\varepsilon h_2} e^{ux}\, V\, du + C_2 \int_{b+\varepsilon h_2}^{b+\varepsilon h_3} e^{ux}\, V\, du,$$

woselbst

$$28\qquad \frac{1}{(u-b)^3\,(u+b)^3}$$

ist. Führen wir, um uns von der Richtigkeit der P.'schen Behauptung zu überzeugen, den in (21) gegebenen Werth in die Gleichung (26) ein, so haben wir

$$x y'' - 4y' - b^2 x y = C_1 \int_{b+\varepsilon h_1}^{b+\varepsilon h_2} e^{ux}\, V\,(x u^2 - 4u - b^2 x)\, du$$

$$+ C_2 \int_{b+\varepsilon h_2}^{b+\varepsilon h_3} e^{ux}\, V\,(x u^2 - 4u - b^2 x)\, du,$$

und nach einigen Transformationen:

$$29)\qquad xy'' - 4y' - b^2 xy = C_1 \left[\frac{e^{ux}}{(u+b)^2 (u-b)^2}\right]_{b+\varepsilon h_1}^{b+\varepsilon h_2} + C_2 \left[\frac{e^{ux}}{(u+b)^2 (u-b)^2}\right]_{b+\varepsilon h_2}^{b+\varepsilon h_3},$$

woselbst die an den Ecken der Doppelklammern stehenden Zahlen bedeuten, dass man statt u in dem unter der Klammer befindlichen Ausdruck:

$$\frac{e^{ux}}{(u+b)^2\ (u-b)^2}$$

dieselben substituiren, und vom Resultate der Substitution der oben stehenden Zahl das Resultat der Substitution der unten stehenden zu subtrahiren habe.

Nun lässt sich zeigen, dass man im Stande ist, die Constanten

$$C_1,\ C_2,\ h_1,\ h_2,\ h_3$$

dermassen zu wählen, dass der rechte Theil der jetzt eben aufgeschriebenen letzten Gleichung gleich Null wird, während y eine bestimmte Function von x ist.

Setzt man der Kürze halber:

$$30)\qquad \frac{e^{ux}}{(u+b)^3} = \varphi(u),\ \frac{e^{ux}}{(u+b)^2} = \psi(u),$$

so soll nach dem eben Gesagten:

$$31)\qquad y = C_1\int\limits_{b+\varepsilon h_1}^{b+\varepsilon h_2}\frac{\varphi(u)\,du}{(u-b)^3} + C_2\int\limits_{b+\varepsilon h_2}^{b+\varepsilon h_3}\frac{\varphi(u)\,du}{(u-b)^3}.$$

von Null verschieden, und

$$32)\qquad \left[\frac{\psi(u)}{(u-b)^2}\right]_{b+\varepsilon h_1}^{b+\varepsilon h_2} + C_2\left[\frac{\psi(u)}{(u-b)^2}\right]_{b+\varepsilon h_2}^{b+\varepsilon h_3} = 0$$

sein. Führen wir, um den Nachweis zu liefern, für u eine neue Variabele v ein, mittelst der Substitution

$$u = b + \varepsilon v,$$

so erhalten wir:

$$33)\qquad y = C_1\int\limits_{h_1}^{h_2}\frac{\varphi(b+\varepsilon v)}{\varepsilon^2 v^3}\,dv + C_2\int\limits_{h_2}^{h_3}\frac{\varphi(b+\varepsilon v)}{\varepsilon^2 v^3}\,dv,$$

ferner:

$$34)\qquad \left[\frac{\psi(b+\varepsilon v)}{\varepsilon^2 v^2}\right]_{h_1}^{h_2} + C_2\left[\frac{\psi(b+\varepsilon v)}{\varepsilon^2 v^2}\right]_{h_2}^{h_3} = 0.$$

Nun ist:

$$\varphi(b+\varepsilon v) = \varphi(b) + \varepsilon v\,\varphi'(b) + \frac{\varepsilon^2 v^2}{2!}\varphi''(b) + \frac{\varepsilon^3 v^3}{3!}\varphi'''(b+\vartheta\varepsilon v)$$

$$\psi(b+\varepsilon v) = \psi(b) + \varepsilon v\,\psi'(b) + \frac{\varepsilon^2 v^2}{2!}\psi''(b+\vartheta_1\varepsilon v);$$

(wo ϑ und ϑ_1 Zahlen, die kleiner als 1 sind), somit, wenn man diese Werthe in die obigen Ausdrücke (33) und (34) substituirt:

$$35)\qquad \left\{\begin{aligned} y = &-\frac{C_1\varphi(b)}{2\varepsilon^2}\left(\frac{1}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right) - \frac{C_1\varphi'(b)}{\varepsilon}\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right) + \frac{C_1}{2}\varphi''(b)\log\frac{h_2}{h_1} \\ &\qquad + \frac{C_1\varepsilon}{3!}\int\limits_{h_1}^{h_2}\varphi'''(b+\vartheta\varepsilon v)\,dv, \\ &-\frac{C_2\varphi(b)}{2\varepsilon^2}\left(\frac{1}{h_3^2}-\frac{1}{h_2^2}\right) - \frac{C_2\varphi'(b)}{\varepsilon}\left(\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right) + \frac{C_2}{2}\varphi''(b)\log\frac{h_3}{h_2} \\ &\qquad + \frac{C_2\varepsilon}{2!}\int\limits_{h_2}^{h_3}\varphi'''(b+\vartheta\varepsilon v)\,dv, \end{aligned}\right.$$

und

$$36)\qquad \frac{C_1\psi(b)}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right) + \frac{C_1\psi'(b)}{\varepsilon}\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right) + \frac{C_1}{2!}\left[\varphi''(b+\vartheta_1\varepsilon h_2) - \psi''(b+\vartheta_1\varepsilon h_1)\right]$$

$$+\frac{C_2\psi(b)}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{h_3^2}-\frac{1}{h_2^2}\right) + \frac{C_2\psi'(b)}{\varepsilon}\left(\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right) + \frac{C_2}{2!}\left[\psi''(b+\vartheta_1\varepsilon h_3) - \psi''(b+\vartheta_1\varepsilon h_2)\right] = 0.$$

Die Ergänzungsglieder convergiren offenbar mit s gegen Null, setzt man ferner zwischen den Constanten

$$C_1, C_2, h_1, h_2, h_3,$$

die Relationen fest:

$$37)\quad \begin{cases} C_1\left(\frac{1}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)+C_2\left(\frac{1}{h_3^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)=0 \\ C_1\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right)+C_2\left(\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)=0, \end{cases}$$

so wird der Gleichung (36) und mithin auch der Gleichung (34) genügt, und man hat:

$$38)\quad y=\left[\frac{C_1}{2}\log\frac{h_2}{h_1}+\frac{C_2}{2}\log\frac{h_3}{h_2}\right]\varphi''(b),$$

oder:

$$y=B\,\varphi''(b),$$

woselbst B eine willkürliche Constante ist. Da

$$\varphi(u)=\frac{e^{ux}}{(u+b)^3}$$

ist, so hat man:

$$39)\quad \varphi''(u)=\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{e^{ux}}{(u+b)^3}\right]$$

und folglich ist:

$$40)\quad y=B\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{e^{ux}}{(u+b)^3}\right],$$

wenn man nach beendeter Differentiation $u=b$ setzt. — Ganz eben so hätte man leicht für y folgendes Integral finden können:

$$41)\quad y=C\frac{d^2}{du^2}\left[\frac{e^{ux}}{(u-b)^3}\right]$$

woselbst nach der Differentiation $u=-b$ zu setzen ist. Und allgemein bekäme man für die Gleichung

$$21)\quad xy''-ay'-b^2xy=0$$

den eben gezeigten Weg betretend:

$$42)\quad y=C_1\left\{\frac{d^{\frac{a}{2}}}{dx^{\frac{a}{2}}}\left[\frac{e^{ux}}{(u+b)^{\frac{a}{2}+1}}\right]\right\}_b+C_2\left\{\frac{d^{\frac{a}{2}}}{du^{\frac{a}{2}}}\left[\frac{e^{ux}}{(u-b)^{\frac{a}{2}+1}}\right]\right\}_{-b}$$

wo am untern, rechten Eck der Doppelklammer jene Zahl steht, die nach gemachter Differentiation statt u gesetzt werden muss.

Diese Arbeit P.'s, das Integrale einer linearen Differential-Gleichung in Form von Differential-Quotienten darzustellen, gehört zu seinen genialsten Leistungen, und ist unstreitig von vielem Verdienste. Der Beweis, den wir hier in einem sehr einfachen speciellen Fall reproducirt haben, und nach welchem sich das Integrale einer Differential-Gleichung in der Form

$$43)\qquad y = C\left[\frac{d^m}{du^m}\left(e^{ux}\,M\right)\right]_\alpha$$

woselbst $M=\varphi(u)$ ist, ergab, setzt m als ganze positive Zahl voraus. P. entwickelt dann diesen Ausdruck mittelst der bekannten Formel, die zur Differenzirung eines Produkts dient, nämlich mittelst:

$$44)\qquad \frac{d^m\,(P\,Q)}{du^m} = P^{(m)}\,Q + \binom{m}{1}P^{(m-1)}\,Q' + \binom{m}{2}P^{(m-2)}\,Q'' + \ldots$$

und erhält:

$$45)\qquad y = C\,e^{\alpha x}\left[x^m\,M_\alpha + \binom{m}{1}x^{m-1}\,M_\alpha' + \binom{m}{2}\,x^{m-2}\,M_\alpha'' + \ldots\right],$$

woselbst

$$M_\alpha^{(r)} = \varphi^{(r)}\,(\alpha)$$

bedeutet. P. sagt nun Seite 71 des 1. Bandes seines Werkes: Glücklicher Weise ist die Gültigkeit des für y gefundenen Ausdruckes (45) durchaus nicht an die Erfüllung der Bedingung gebunden, dass m eine ganze positive Zahl sei, und es fährt derselbe fort, der Differentialgleichung Genüge zu leisten, ob jetzt m eine ganze positive Zahl ist, oder nicht. Hiervon überzeugt man sich leicht durch folgende Ueberlegung (Seite 73). Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass der Ausdruck (45) ein particuläres Integrale sei, wenn m eine beliebig grosse, noch ganz unbestimmt gelassene ganze Zahl ist; ferner behält dieser Ausdruck genau dieselbe Form, ob man sich m als unbestimmte ganze oder unbestimmt gebrochene, ja negative oder auch imaginäre Zahl vorstellt, weil in demselben nichts enthalten ist, wodurch die Bedeutung von m mit Nothwendigkeit auf ganze Zahlen beschränkt wurde. Denkt man sich daher diesen Ausdruck anstatt y in die Gleichung substituirt, diese Substitution aber zweimal ausgeführt: einmal in der einen Voraussetzung, nämlich, dass m eine unbestimmte ganze Zahl sei, das andre Mal, in der andern entgegengesetzten, so werden sich auch diese beiden Substitutionen und damit verknüpften Reductionen offenbar in gar nichts von einander unterscheiden, und man wird nirgends Gelegenheit finden, die Bedingung, dass m eine ganze Zahl sei, in Rechnung zu setzen; somit können auch die Resultate der beiden Substitutionen nur dieselben sein, d. h. der Ausdruck (45), der für ganze m Genüge leistet, wird für beliebige m fortfahren, die Differentialgleichung zu erfüllen, und daraus, dass unsere eben vorgetragene Analysis nur gültig ist, für ganze und positive m, folgt nur, dass die derselben zu Grunde gelegte Uebergangsform eines besondern Integrales für andere als ganze Werthe von m das, jedesmal unter der Gestalt (45) vorhandene particuläre Integrale wiederzugeben nicht vermöge.

Die Beweisart, wie sie hier gegeben wird, ist mit der identisch, welche Euler bei der Entwickelung des Binomischen Lehrsatzes anwendet, siehe Klügel's math. Wörterbuch, 1. Band Seite 324; aber wir kamen, durch die von P. gegebene Analyse nicht zur Form (45), sondern zur Form (43); ein

Ausdruck aber, wie dieser, lässt sich auf zweierlei Art entwickeln, gerade so, wie sich $\frac{d^m (PQ)}{du^m}$ auf zweierlei Art entwickeln lässt; nämlich in:

$$46)\qquad \frac{d^m (PQ)}{du^m} = P^{(m)} Q + \binom{m}{1} P^{(m-1)} Q' + \binom{m}{2} P^{(m-2)} Q'' + \dots$$

und

$$47)\qquad \frac{d^m (PQ)}{du^m} = P Q^{(m)} + \binom{m}{1} P' Q^{(m-1)} + \binom{m}{2} P'' Q^{(m-2)} + \dots$$

führt die eine Entwickelung zu divergenten Reihen, so ist sie zu verwerfen, und die andere, die dann in der Regel zu convergenten Reihen führt, zu setzen. So ist z. B.

$$48)\qquad \frac{d^\mu e^{mx^2}}{dx^\mu} = 2^\mu m^{\frac{\mu}{2}} x \left\{ \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dz^{\frac{\mu}{2}}} \left[z^{\frac{\mu-1}{2}} e^{mz} \right] \right\}_{x^2}$$

und giebt nach der Formel (46), woselbst

$$P = e^{mz}, \quad Q = z^{\frac{\mu-1}{2}}, \quad m = \frac{\mu}{3}$$

ist entwickelt die Reihe:

$$49)\qquad \frac{d^\mu e^{mx^2}}{dx} = (2mx)^\mu e^{mx^2} \left(1 + \frac{\mu(\mu-1)}{4mx^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2!\,(4mx^2)^2} + \dots \right)$$

welche bloss für ganze positive μ giltig ist. Hier stellt sich die Bedingung, dass der Differentiationsindex eine ganze positive Zahl ist, in Rechnung, und dies hat P. ausser Acht gelassen. Man muss also nicht um die Form

$$43)\qquad y = C \left(\frac{d^m}{du^m} [e^{ux} M] \right)_\alpha$$

zur unmittelbaren Berechnung brauchbar zu machen, dieselbe in eine, nach absteigenden Potenzen von x geordnete unendliche Reihe von der Form (45) entwickeln, sondern man hat dieselbe in eine in eine solche Reihe zu entwickeln, welche convergirt.

So findet P. Seite 79 für den Ausdruck (42) folgende unendliche Reihen:

$$y = G_1 e^{bx} \left\{ x^{\frac{a}{2}} - \frac{a(a+2)}{2^3 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2.2^6 b^2} x^{\frac{a}{2}-2} - \dots \right\}$$

$$+ G_2 e^{-bx} \left\{ x^{\frac{a}{2}} + \frac{a(a+2)}{2^3 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)(a+2)(a+4)}{2.2^6 b^2} x^{\frac{a}{2}-2} + \dots \right\}$$

welche ebenfalls die Eigenschaft haben, für ganze positive oder negative Werthe von $\frac{1}{2}a$ abzubrechen, für andere $\frac{1}{2}a$ aber divergent zu werden. Diese Reihen, deren Glieder fort und fort ins unendliche wachsen, nennt P. halbconvergente Reihen, und glaubt (Seite 82), dass solche Reihen, ungeachtet des ungünstigen Auges, welches der Analyst in der Regel darauf in werfen pflegt, zur numerischen Berechnung des Werthes von y und zum

Herauslesen der daraus folgenden Erscheinungen wenigstens für grössere Werthe der Veränderlichen x nicht ganz nutzlos seien.

Wir fragen hier nochmals, warum denn P. den Ausdruck

$$51)\quad \frac{d^{\frac{a}{2}}}{du^{\frac{a}{2}}}\left\{\frac{e^{ux}}{(u+b)^{\frac{a}{2}+1}}\right\}$$

nur auf folgende Weise entwickelt:

$$52)\quad \frac{d^{\frac{a}{2}}}{du^{\frac{a}{2}}}\left\{\frac{e^{ux}}{(u+b)^{\frac{a}{2}+1}}\right\}=e^{ux}\left\{x^{\frac{a}{2}}Q+\binom{\frac{a}{2}}{1}x^{\frac{a}{2}-1}Q'+\binom{\frac{a}{2}}{2}x^{\frac{a}{2}-2}Q''+\ldots\right\}$$

und nicht auch so:

$$53)\quad \frac{d^{\frac{a}{2}}}{du^{\frac{a}{2}}}\left\{\frac{e^{ux}}{(u+b)^{\frac{a}{2}+1}}\right\}=e^{ux}\left\{Q^{\left(\frac{a}{2}\right)}+\left\{\frac{a}{2} \atop 1\right\}x\,Q^{\left(\frac{a}{2}-1\right)}\left\{\frac{a}{2} \atop 2\right\}x^2Q^{\left(\frac{a}{2}-2\right)}+\ldots\right\}$$

woselbst $Q=(u+b)^{-\frac{a}{2}-1}$ ist. Die eine dieser beiden Entwickelungen ist gerade die brauchbare, wo die andere es nicht ist. Seite 95 bei der Entwickelung der Formel

$$y=C\left\{\frac{d^A}{du^A}\left[e^{u\left(x-\frac{b_0}{b_1^2}\right)+\frac{u^2}{2b_1}}\right]\right\}_{-\frac{b_0}{b_1}}$$

wäre dieselbe Bemerkung am Platze etc. etc.

Hätte P. diess alles berücksichtigt, so hätte er erspart, die divergenten Reihen mit günstigem Auge zu betrachten, und Gesetze aus ihnen herauszulesen; umsomehr, da die aus divergenten Reihen herausgelesenen, ja ohnedies von keinem Mathematiker der Gegenwart geglaubt werden.

P. zählt nun verschiedene Mittel auf, um Differentialquotienten von von allgemeiner Ordnungszahl in bestimmte Integrale umzuwandeln. Das erste ist die Euler'sche Gamma-Function

$$\Gamma(m)=\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{m-1}\,d\lambda,$$

welche für $m>0$ einen constanten endlichen Werth hat, und findet P. durch Anwendung desselben statt (42) folgenden Ausdruck:

$$54)\quad y=C_1e^{bx}\int_6^\infty e^{-2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\lambda^{\frac{a}{2}}\,d\lambda+C_2e^{-bx}\int_0^{-\infty}e^{2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\lambda^{\frac{a}{2}}d\lambda$$

bemerkt aber zu gleicher Zeit hierbei, dass man durch Entwickelung von $(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}$ mittelst der Binomialformel und darauf folgenden Integration zu denselben divergenten Reihen zurückgelangt, welche man durch die frühere Entwickelungsweise erhält.

Wir fragen auch hier, wie so es erlaubt ist, $(x-\lambda)^{\frac{\alpha}{2}}$ nach fallenden Potenzen von x zu entwickeln, da ja λ eine variable Zahl ist, und aller Werthe fähig von Null bis unendlich!

P. entwickelt dann die Fourier'sche Formel auf ziemlich langwierigem und beschwerlichem Wege. Soll vielleicht hier P. wirklich gesucht haben, wie er pag. IV der Vorrede sagt, ältere Mathematiker bei der Entwickelung von bekannten Formeln durch die Auswahl, der zu den Ableitungen derselben verwendeten Methoden, zu entschädigen? Wäre nicht die von Deflers herrührende, in Çournot's Elementarbuch der Funktionen vorgetragene Ableitung der von ihm gegebenen vorzuziehen? Ein drittes Mittel zur Umwandlung von Differentialquotienten in bestimmte Integrale giebt die Liouville'sche Formel:

$$\int^{\mu} \varphi(x)\, dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu}\, \Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \varphi(u+\alpha)\, \alpha^{\mu-1}\, d\alpha$$

und ein 4tes das Laplace'sche Integral, dass P. nach Krone*) entwickelt deren Wesen nach P. darin besteht, dass man in das bestimmte Integral, dessen Werth zu ermitteln ist, durch bekannte Umformungen und Substitutionen Einen oder mehrere constante Parameter einführt, sodann aber mit eben so vielen bestimmten Integralen, von bekanntem numerischen Werthe des Produktes derselben, in welchen diese Parameter als Variable enthalten sind, multiplicirt und integrirt, was möglich ist, wenn man diese letzten bestimmten Integrale schicklich gewählt hat.

Mehrere sehr nützliche Anwendungen von Cauchy'schen Kunstgriffen bei der Umformung von Integralen beschliessen diese Untersuchungen. Und so wären wir denn, sagt P., Seite 104, in allen Fällen zu den allgemeinen, mit der gehörigen Anzahl von Constanten versehenen Integralen den Gleichungen

$$1)\quad (a_n + b_n x)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

gelangt. Wir können also allgemein annehmen, dass eine jede Differential-Gleichung von beliebig hoher Ordnung und mit Coefficienten, die nach der unabhängig Variablen vom 1. Grade sind, durch unsere Methode vollständig integrirt werden können, und dass etc. etc.

Uns sind diese Worte in der That unbegreiflich, sagt denn P. nicht selber Seite 326 desselben Bandes: „denn abgesehen davon, dass wir uns von der Gleichung

$$x y^{(n)} \pm a^2 y = 0$$

(die doch nur als specieller Fall in (1) enthalten ist) gar kein allgemeines, sondern nur ein particuläres Integral verschaffen konnten, so war noch über-

*) Krone, ein Dilletant in der Mathematik, reiste von Universität zu Universität, Collegien über bestimmte Integrale anzuhören, kam dann nach Wien und verlebte seine letzten Tage im Irrenhause daselbst.

dies die Form desselben weder der Anschaulichkeit noch dem Fortrechnen besonders zusagend.“ P. setzt hinzu, dass hier eine Veränderung der unabhängig Variablen am Platze sei, und zeigt namentlich bei der Gleichung

$$55) \qquad xy'' - y = 0,$$

dass durch Einführung einer neuen, unabhängig Variablen ξ mittelst der Gleichung

$$\xi = \sqrt{x}$$

folgende Gleichung hervorgeht:

$$56) \qquad \xi \frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{dy}{d\xi} - 4\xi y = 0,$$

für welche er das Integral mittelst divergenter Reihen giebt. — Dann bemerkt er weiter, dass man der Gleichung (6) eine ähnliche Behandlung angedeihen lassen könne, und zwar durch Einführung einer neuen, unabhängig Variablen ξ durch die Substitution

$$x = \xi^{\frac{n}{n-1}}$$

und um allen diesen Untersuchungen die Krone aufzusetzen, werden später (4. Lief. Seite 353) die früher bezeichneten Wege „blosse Integrationsversuche“ genannt, und die Form der unendlichen, nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihen empfohlen, eine Form, deren Nutzlosigkeit zur wirklichen Integration linearer Differentialgleichungen von ihm so oftmals ausgesprochen wurde.

Wir erlauben uns, bei dieser Gelegenheit Herrn P. zu erinnern, dass wir die Gleichung

$$xy^{(n)} - y = 0$$

schon lange auf diese Weise wirklich integrirten, und verweisen ihn auf unsere, in Grunerts Archiv für Mathem. Tom. XXVI. im Jahre 1856 veröffentlichte Abhandlung.

Seite 31 der 3. Lieferung spricht P. wieder von einer Gleichung folgender Form:

$$57) \qquad (a_2 + b_2 x)\, y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

die sich dem von ihm gezeigten Integrationsverfahren mittelst bestimmter Integrale oder Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl entzieht; in der 4. Lieferung empfiehlt er hierfür unendliche, nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihen.

Uns ist nicht bange, ihm eine Unzahl solcher Beispiele anzuführen, auf die er wohl auch von selbst gekommen wäre, wenn er eben so sorgfältig die Gleichungen 3. und höherer Ordnung von der Laplace'schen Form, discutirt hätte, wie er dies mit den Gleichungen 2. Ordnung gethan. So sind von ihm namentlich alle die Gleichungen von der Laplace'schen Form, für welche $U_1 = 0$ wiederholte, und nicht zugleich in $U_0 = 0$ verkommende Wurzeln hat, oberflächlich und ungenügend behandelt.

P. wendet sich nun zu Gleichungen von folgender Form:

58) $$a_n x^n y^{(n)} + x^{n-1}(a_{n-1} + b_{n-1} x^m) y^{(n-1)} + \dots + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m} + \dots + h_0 x^{mn}) y = 0$$

und integrirt vollständig folgende hierher gehörige Gleichung der 2. Ordnung:

59) $$a_2 x^2 y'' + x(a_1 + b_1 x^m) y' + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m}) y = 0$$

dadurch, dass er für x und y neue Variable t und z einführt, mittelst der Gleichungen

$$x^m = t, \quad z = t^k z$$

unter k eine constante Zahl verstanden, über die er so verfügt, dass die neu erhaltene Gleichung die Form der früher integrirten Gleichungen annimmt. Die Riccati'sche Gleichung dient als passendes Beispiel hierfür, man sieht also, bemerkt P., dass dieselbe am allerbequemsten auf dem von uns eingeschlagenen Wege integrirt werden kann.

Nachher betrachtet P. die Gleichung

60) $$x^3 y''' + x^2(A_2 + B_2 x^m) y'' + x(A_1 + B_1 x^m + C_1 x^{2m}) y' + (A_0 + B_0 x^m + C_0 x^{2m} + D_0 x^{3m}) y = 0,$$

die sich durch dieselben Substitutionen eben so vereinfacht, wenn nur

$$A_0 = B_0 = 0$$

und

$$(m-1)(m-2) + (m-1)A_2 + A_1 = 0$$

wird. Da dies aber nur äusserst selten wirklich eintrifft, und solcher Bedingungen für Gleichungen der 4. und höheren Ordnung der Form (58) natürlich noch viel mehr sein werden, so glauben wir, dass P. zu weit geht, wenn er Seite 30 die Form der Gleichung (58) zu denen aufzählt, die eine Auflösung durch geschlossene Formeln zu lassen.

Die Integration der Gleichung

61) $$y''' \pm a^3 x^3 y = 0$$

bildet ein passendes Beispiel für die Gleichung (60), übrigens gelang die Integration der Gleichung (61) auch Kummer durch einen äusserst genialen Kunstgriff, der für alle Gleichungen der Form

62) $$y^{(n)} = x^m y$$

anwendbar ist, sobald m und n ganze positive Zahlen bedeuten. (Man sehe hierüber Crelle's Journal 19. Band.)

Ganz dieselbe Methode wendet nun P. wieder, nach dem Vorgange von Laplace (siehe *Lacroix traité du calcul différentiel etc. tom III. pag.* 567) auf Differenzengleichungen der Form

63) $$(a_n + b_n x) \Delta^n y + (a_{n-1} + b_{n-1} x) \Delta^{n-1} y + \dots + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

an, und discutirt auch hier auf ganz gelungene Weise mehrere sich darbietende Ausnahmefälle.

P. beweist allda folgende Formel für $\Delta_r\,(PQ)$

64) $$\Delta^r (PQ) = P\Delta^r Q + \binom{r}{1} \Delta P[\Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q] + \binom{r}{2} \Delta^2 P[\Delta^{r-2} Q + 2\Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q] + \dots$$

und zwar für beliebige r, wenn man nur übereinkommt, die Gleichung

$$65)\qquad \Delta^r e^{ux} = e^{ux}(e^{uh}-1)^r,$$

die sich für ganze und positive Werthe von r durch die directe Operation des Differenzennehmens ableiten lässt, für jedes r allgemein gültig vorauszusetzen, und somit als Definition der Differenzen mit allgemeiner Ordnungszahl zu betrachten.

Endlich geht P. zur Integration der completen Differenzen und Differentialgleichungen, die er auf verschiedene, recht lehrreiche und auch mitunter sehr beachtenswerthen Weisen integrirt.

Nach dieser Darlegung des Inhalts der ersten Lieferung der P.'schen Arbeit ist man zu dem Schlusse berechtigt, das P. wohl hiermit ganz Vortreffliches geleistet, dass aber gar Vieles noch zu wünschen übrig bleibt, bevor man die Gleichungen der Form:

$$1)\quad (a_n + b_n x)\, y^{(n)} + a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + b_0 x)\, y = 0,$$

deren Integration den Hauptinhalt der ersten Lieferung bildet, als vollständig integrirt betrachten könne; namentlich heben wir nochmals folgenden Punkte hervor.

Erstens. Ein Integral einer linearen Differentialgleichung erscheint uns nur dann tadelfrei, wenn es die gehörige Anzahl willkürlicher Constanten hat, und wenn es zugleich giltig ist, für jeden Werth von x ob dieser nun positiv oder negativ ist.

Zweitens. Erscheint das Integral in der Form eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, und will man dieses Integral behufs der wirklichen Berechnung in Reihen entwickeln, so hat man nur jene Entwickelungsweise zu wählen, die zu einer convergenten Reihe führt.

Endlich drittens. Wenn der Bruch $\frac{U_0}{U_1}$ nach Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren noch wiederholte Functionen der Form $u - \alpha$ im Nenner hat, so ist das von P. bisher gezeigte Integrationsverfahren in der Regel ganz unzulässig, und so lange kein anderer Integrationsweg hierfür bekannt ist, als der durch unendliche Reihen, kann man unmöglich sagen, dass man eine vollkommen ausreichende Integrations-Methode besitze zur Auflösung der Gleichungen von der Form (1).

SIMON SPITZER.

(Fortsetzung folgt.)

---

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass sich die Differentialgleichung

$$(m x^2 + n x + p)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + (q x + r)\frac{\Delta y}{\Delta x} + s y = 0$$

genau so behandeln lässt, wie Liouville die ähnlich gebaute Differentialgleichung integrirte. *Journal de l'école polytechnique tom. XIII.*

Die neue K. Preuss. Instruction für Geodäten.

Das Königlich Preussische Finanzministerium hat unterm 25. August d. J. eine Instruction über das Verfahren bei den Neumessungen Behufs Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuer-Katasters der westlichen Provinzen Rheinland und Westphalen erlassen, deren Einsicht auch ausser dem Lande, wofür sie bestimmt ist, interessant sein wird, besonders für diejenigen Sachverständigen, welche Gelegenheit haben, diese Instruction mit der ursprünglichen Kataster-Instruction vom 11. Februar und 12. März 1822 zu vergleichen. Solche Leser werden finden, dass die früheren Vorschriften eine merkliche Sichtung erfahren, dass viel Unpraktisches und Unbeholfenes fortgelassen, Bewährtgefundenes dagegen hervorgehoben, beziehungsweise besser geordnet und schärfer gezeichnet ist. So war, um nur ein Beispiel anzuführen, in der Instruction vom Jahre 1822 der Gebrauch des Messtisches und der Boussole unter gewissen erschwerenden Versicherungs-Bedingungen zugelassen, durch die jetzige Instruction sind diese veralteten und zu Eigenthums-Vermessungen, wie die Jetztzeit sie verlangt, unbrauchbaren Instrumente gänzlich ausgeschlossen. Dagegen ist die Polygonal-Constructionsmethode, wie sie sich für jedes Terrain im Grossen bewährt hat, klar auseinander gesetzt, und für die Folge zur alleinigen Vorschrift erhoben.

Auch in dem Stadium der Flächenberechnung finden wir einen wichtigen Fortschritt. Die ältere Instruction stellte nämlich die Berechnung aus Originalmaassen (aus den Zahlengrössen, welche der Feldmesser unmittelbar von seinen Instrumenten abgelesen hat) auf gleiche Höhe mit den Flächenermittelungen durch Hilfe mechanischer Werkzeuge (der Planimeter, Glastafeln etc.), wogegen die neue Instruction die Vorzüge der Berechnung aus den Originalzahlen hervorhebt, auch ausdrücklich festsetzt, dass die Flächen der Grundstücke unter 10 Quadratruthen in der Regel nicht lediglich auf graphischem Wege gefunden werden dürfen. Obgleich diese Grenze den Sachverständigen bei dem in unserer Zeit so hoch gestiegenen Werthe des Grundeigenthums leicht als eine allzumässige erscheinen mag, so werden sie sich doch überzeugen, dass einer zu weit getriebenen Nachgiebigkeit dadurch die Spitze abgebrochen ist, dass den Feldmessern ausdrücklich zur Pflicht gemacht ist, ihre Operationen so einzurichten, damit die von ihnen in die Vermessungs-Manuale niedergelegten Maasse unmittelbar zur Flächenberechnung benutzt werden können und dass dann auch der Rechner sie benutzen muss. Die Aufsichtsbehörde hat es also immer in der Hand, in dieser Hinsicht jede zweckdienliche Leistung zu verlangen.

Die neue Instruction kann bei dem Buchdrucker Brunn in Münster gegen 17½ Silbergroschen bezogen werden.

Pr. Minden. VORLÄNDER.

Die Axonometrie, elementar begründet von LARGIADÈR, Professor an der Thurgauischen Kantonsschule. Verlagscomptoir Frauenfeld.

Angeregt durch die ausgezeichneten Arbeiten von Weissbach und Schlömilch hat sich mein College, Herr Professor Largiadèr anhaltend mit dem Problem der Axonometrie beschäftigt und es ist ihm gelungen, dasselbe in eigenthümlicher, elementar-geometrischer Weise zu lösen. Diese Lösung war in einem mathematischen Kränzchen hiesiger Lehrer bereits vorgetragen und durchgesprochen, als Weissbach's neueste (im 5. Heft II. Jahrg. dies. Ztschr. angezeigte) Broschüre erschien. Da indess die Begründungsmittel Largiadèr's von dem in Anhang I. der Weissbach'schen Schrift aufgeführten wesentlich abweichen, so lag keine Veranlassung zur Einstellung des Druckes vor. Vielmehr gab man sich der Hoffnung hin, dass die Auffassungsweise Largiadèr's auch neben dem Werke des rühmlichst bekannten Urhebers der Axonometrie für das mathematische Publikum von Interesse sein werde.

Die Entwickelungen L.'s bestehen in höchst einfachen, durchweg der Anschauung erfassbaren geometrischen Betrachtungen, welche in ihren Endresultaten mit den analytischen Arbeiten der oben genannten Mathematiker aufs schönste harmoniren. So z. B. erscheinen nach L. die Reductionscoefficienten m, n und p als die Zahlenwerthe der drei Seitendiagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds, mithin als die Seitenwerthe eines schiefwinkeligen Dreiecks. Diese letztere Bedingung lässt sich aber umformen in: $m^2 + n^2 > p^2$, $m^2 + p^2 > n^2$ und $p^2 + n^2 > m^2$, was sofort zu dem Satze führt, dass m^2, n^2 und p^2 stets mögliche Seitenwerthe eines und desselben Dreiecks sein müssen.

Durch seine Klarheit und Gedrungenheit empfiehlt sich das Werkchen namentlich für höhere Unterrichts-Anstalten.

Frauenfeld, im November 1857.

FRIEDRICH MANN.

Lehrbücher.

1) Die erste Stufe des mathematischen Unterrichts in einer Reihenfolge methodisch geordneter arithmetischer und geometrischer Aufgaben, dargestellt von CHRISTIAN HARMS, Lehrer der Mathematik an der höhern Bürgerschule in Oldenburg. I. Abtheilung: arithmetische Aufgaben, II. Abtheilung: geometrische Aufgaben. Oldenburg. G. Stalling. Preis jeder Abtheilung 12½ Sgr.

Die erste Abtheilung dieser Aufgabensammlung behandelt ein Material, welches in der wohlbekannten Aufgabensammlung von Heis auf die ersten 30 Paragraphen vertheilt ist, und das für einen ersten Unterricht dem Ver-

fasser in dem letztgenannten Schulbuche noch nicht hinreichend ausführlich behandelt zu sein scheint. Er ist dabei der Ansicht, dass der Anfang der Heis'schen Sammlung zwar ein schätzbares Material zur Repetition in einer obern Classe darbiete, zur eigentlichen Einübung der betreffenden Sätze aber einerseits langsamer und mehr schrittweise zu Werke gegangen und andererseits nach einer genetischen Methode so vorgeschritten werden müsse, dass dem Schüler wenigstens das anfängliche Material als bekannte Sache erscheine und nur die besondere Form es sei, in welcher er dasselbe sich von neuem anzueignen habe. Wie der Verfasser sich den bezeichneten Inhalt zu rechte gelegt hat, kann aus einer kurzen Uebersicht desselben entnommen werden. I. Abschnitt: Die absolute ganze Zahl, (11 §§. u. 31 Seiten) A) die drei directen Grundoperationen und deren Resultate, Summe, Product und Potenz; B) die vier indirecten Operationen und deren Resultate: Differenz, Quotient, Wurzel und Logarithmus. II. Abschnitt: Die Operationen mit positiven und negativen ganzen Zahlen (algebraischen Zahlen 8 §§. und 32 SS.). III. Abschnitt: Die Operationen mit gebrochenen Zahlen (13 §§. u. 40 SS.). A) ohne B) mit Veränderung des Nenners.

Diese Aufgabensammlung, entstanden zunächst durch örtliche Verhältnisse und Bedürfnisse der Schule, an welcher der Herr Verfasser wirksam ist, wird manchem Schulmann willkommen sein, an dessen Schule sich ähnliche Bedingungen vorfinden. Wir können zunächst nur eine nähere Einsicht in dasselbe empfehlen, weil in Hinsicht von Methode und Lehrgang die Ansichten so verschieden sind und nicht selten bis zu einem beklagenswerthen, der Sache selbst keineswegs förderlichen Eigensinne sich steigern. Das Büchlein ist übrigens frei von gewissen Eigenthümlichkeiten und Sonderbarkeiten, in welchen manche Methodiker das wahre Heil gefunden zu haben vermeinen und in deren Ausführung bisweilen eine ins Lächerliche gehende Selbstgefälligkeit verrathen.

Die zweite Abtheilung enthält Uebungsmaterial für den ersten geometrischen Unterricht Schülern gegenüber, welche für das volle Verständniss, die gehörige Durchdringung und Aneignung noch nicht die erforderliche Reife besitzen. Der Herr Verfasser zeigt darin, wie er in einer den Geist der Schüler anregenden und wachsam haltenden Weise das Material der Elementargeometrie vorführt und die Schüler durch entsprechende Fragen und Constructionsaufgaben zur Selbsthätigkeit anleitet und nöthigt. Man kann diese Sammlung als eine solche von Vorschlägen ansehen, wie man sich mit Schülern beim ersten Unterrichte in der Geometrie beschäftigen könne, dem Grundsatze getreu, dass ein Lehrer in jeder Stunde genug gearbeitet hat, wenn seine Schüler in derselben genug gearbeitet haben. In dieser Beziehung dürfte eine nähere Einsicht von dieser kleinen Sammlung nicht ganz ohne Nutzen für Lehrer sein und Referentem scheint es gar nicht unwahrscheinlich, dass auch der Eine oder der Andere so viel Interesse an dem Büchlein nähme, dass er ein genaueres Befolgen des darin angedeute-

ten Weges für rathsam erachtete. Hierbei soll jedoch dem Herrn Verfasser keineswegs eine Anmassung stillschweigend untergelegt werden, als hielte er den von ihm betretenen Weg für den einzig richtigen. Wie weit derselbe von einer solchen Vorstellung entfernt ist, geht daraus hervor, dass er sich bei dem darauf folgenden Unterricht selbst fremder Lehrbücher bedient und nicht, wie die Vorrede von so vielen neu erscheinenden Lehrbüchern verräth, meint, in allen bis dato vorhandenen Schulbüchern sei immer noch nicht der allein richtige und wahre Weg betreten worden und es hätte demnach der Verfasser des neu erscheinenden Lehrbuchs keineswegs für unnöthig gefunden, die Unmasse von Lehrbüchern durch das seinige noch zu vermehren. Solchen Autoren gegenüber giebt der Herr Verfasser der vorliegenden Sammlung eine wohl zu beherzigende Bemerkung: „In den drei oberen Classen fühle er nicht das Bedürfniss nach eigenen Lehrbüchern, da ihm fremde (z. B. von Koppe und Tellkampf) beim Unterrichte Spielraum genug lassen (die vorliegende erste Lieferung ist für die 4. Classe bestimmt). Ueberhaupt tritt, je höher man in den Classen heraufsteigt, die Methode desto mehr in den Hintergrund.

WITZSCHEL.

Cardanus Formel, deren Verwandlung zur Berechnung der Wurzeln von Zahlengleichungen von der Gestalt: $x^3 - Px - Q = 0$ und eine allgemeine aus jener abgeleitete Form der Wurzeln der letztern. Lösung des dreihundertjährigen Problemes von Dr. E. BÜCHNER, Professor am Herzogl. Gymnasium zu Hildburghausen. — Hildburghausen, Kesselring'sche Hofbuchhandl. 1857. VI. u. 26 S. gr. 8.

Der Verfasser nimmt grossen Anstoss daran, dass bei Auflösung von Gleichungen dritten Grades die sogenannte Cardanische Formel in dem Falle, wo sämmtliche Wurzeln reell sind, ihren Dienst versagt, und man genöthigt war, zur Vergleichung einer cubischen Gleichung dieser Art mit der goniometrischen Formel für den Sinus des dreifachen Winkels zu verschreiten. „Denn“, so heisst es in der Vorrede des vorliegenden Schriftchens, „nicht jedem sind dergleichen Mittel zugänglich, nicht jedem stehen trigonometrische Tafeln zu Gebote, auch wurde dadurch die Lücke in den algebraischen Lehren in keiner Weise ausgefüllt, die einfache algebraische Form der Wurzeln der genannten Gleichung nicht erkennbar, es musste deshalb der Wunsch stets rege bleiben, hinter den Schleier schauen zu dürfen.“ Diese Einführung des Büchleins, sowie der nicht ganz anspruchslose Titel, liess erwarten, dass man hier die Mittel vorfinde, auch im sogenannten irreducibeln Falle die Wurzeln in algebraischer, des Imaginären entkleideter Form als Funktionen der Coefficienten einer vorgelegten Gleichung darzustellen, und dabei, weil (nach des Verfassers Ausdrucke)

jeder festgestellte Satz im hypothetischen (?) Systeme der Mathematik Perspectiven eröffnet, neue Aussichtspunkte in das Gebiet der imaginären Grössen erhalte. Von allem dem findet sich jedoch nichts, wie gemäss der Natur des Problemes auch nicht anders möglich war; vielmehr enthält die Schrift in drei Abschnitten eine Reihe auf cubische Gleichungen bezüglicher Untersuchungen, welche mancherlei bekannte Dinge in zwar theilweis neuer, aber nicht immer der zweckmässigsten Form behandeln. Der erste Abschnitt beschäftigt sich hauptsächlich mit Darlegung der Ursachen, welche im irreducibeln Falle das Imaginäre in den beiden Summanden der Cardanischen Formel herbeiführen, giebt also Variationen zu dem Thema, dass über Summe und Product zweier Unbekannten nicht vollkommen beliebig verfügt werden darf. Im zweiten Abschnitte wird gezeigt, wie in *Zahlengleichungen* der erwähnten Art, *deren drei Wurzeln bekannt sind*, die beiden Theile der Cardanischen Formel in Ausdrücke der complexen Form $a+b\sqrt{-1}$ umgestaltet werden können. Da hierbei a als gegeben vorausgesetzt ist, so kommt das Ganze auf eine Aufgabe für Schüler hinaus, deren Lösung einer besondern Untersuchung nicht bedurft hätte. Im dritten Abschnitte wird ermittelt, auf welche Weise im besprochenen Falle die Wurzeln, sobald sie unbekannt sind, in Grenzen eingeschlossen werden können. Der Verfasser setzt hierzu einen gewaltigen Apparat in Bewegung, scheint aber dabei ganz zu übersehen, dass die Resultate seiner Untersuchung in der Hauptsache sich ohne Weiteres aus den elementaren Betrachtungen der ersten Seite seines Werkchens ergeben. Ueberhaupt gehört es zu seinen Eigenthümlichkeiten, kleinliche Zwecke mit grossen Mitteln zu erstreben, wie z. B. auf S. 5 durch Differentialrechnung bewiesen wird, dass eine Differenz, deren Subtrahend stetig abnimmt, während der Minuend continuirlich wächst, ebenfalls stetig wachsen müsse. — Auf welche Art übrigens von den Grenzen einer Wurzel zu ihrem wahren Werthe gelangt wird, dafür möge folgendes Beispiel als Beleg dienen. Auf S. 22 werden für die positive Wurzel der Gleichung $x^3-7x-7=0$ die Grenzen $\frac{1}{3}\sqrt{84}=3{,}05505\ldots$ und $\sqrt[3]{28}=3{,}036588\ldots$ gefunden; ohne weitere Angabe eines Grundes wird hierauf $x=3{,}045\ldots$ gesetzt, und zuletzt ergiebt sich, dass dies wirklich der Wurzelwerth sein solle. Unglücklicherweise ist aber dieses Resultat falsch und in $3{,}048917\ldots$ abzuändern. An einer andern Stelle wird bezüglich der Gleichung $x^3-6x-4=0$ behauptet, ihre Wurzel sei nicht schwer zu errathen, nämlich $x=-2$, $x'=1+\sqrt{3}$, $x''=1-\sqrt{3}$. Dass der Autor wirklich die beiden letzten Wurzeln *errathen* haben solle, kann mit Rücksicht auf den Gesammtinhalt des Büchleins bezweifelt werden.

Referent hat vorstehende Inhaltsangabe für nöthig erachtet, um darauf den Ausspruch zu stützen, dass es ihm ungeachtet sorgfältiger Nachforschung nicht gelungen ist, in der *Büchner*'schen Schrift irgend etwas *von der Lösung eines dreihundertjährigen Problemes* zu entdecken.

O. Fort.

Bibliographie

vom 2. November bis 10. December 1857.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. VII. Aus den Jahren 1856 u. 1857. Göttingen, Dieterich'sche Buchh. 9 Thlr.

Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der Königl. Bayrischen Akademie der Wissensch. Bd. VIII., Abth. 1. München, Franz in Comm. 2⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissensch. in Wien. Mathemat.-naturwissensch. Classe. 25. Bd. (Jahrg. 1857.) Heft. 1. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Thlr. 14 Ngr.

Astronomisches Jahrbuch für 1860. Herausgeg. von F. Encke und Wolfers. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirées du bulletin de l'académie de St. Pétersbourg. Tome III., Livr. 5. Leipzig, Voss in Comm. 17 Ngr.

Mémoire de l'académie de St. Pétersbourg. Sciences mathématiques et physiques. Tome VI. Leipzig, Voss in Comm. 6 Thlr. 28 Ngr.

Reine Mathematik.

Barfuss, F. W. Lehrbuch der Arithmetik. Weimar, Böhlau. 1 Thlr.

Herr, J. P. Lehrbuch der höheren Mathematik. 1. Bd. Wien, Seidel. pro compl. 4 Thlr.

Logarithmen und Antilogarithmen auf 1 Blatt. Berlin, Veit & Comp. ⅙ Thlr.

Spitzer, S. Integration der Differentialgleichung. $(a_2+b_2x)y'' + (a_1+b_1x)y' + (a_0+b_0x)y = 0$. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 7 Ngr.

Riemann, B. Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen. Göttingen, Dietrich'sche Buchh. 6 Ngr.

Hofmann, F. Sammlung der wichtigsten Sätze aus der Arithmetik u. Agebra. Bayreuth, Grau'sche Buchh. 4 Ngr.

Stampfer, S. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln etc. 5. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. ⅚ Thlr.

PAULSEN, A. Lehrbuch der reinen Arithmetik. Dorpat, Gläser in Comm. ⅛ Thlr.

THIEME, F. E. Geometrische Uebungen. 2. Heft. Plauen, Schröter. ⅙ Thlr.

LA FRÉMOIRE. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben der Elementargeometrie. (Planimetrie u. Stereometrie.) Aus dem Französ. übers. v. Kauffmann. Stuttgart, Becher's Verlag. 1⅛ Thlr.

ZORER. Grundriss der ebenen Geometrie. Abth. 1. Ellwangen u. Tübingen, Fues. 6 Ngr.

LÜCKENHOF. Anfangsgründe der Geometrie. Theil 2. Stereometrie, sphär. Trigonometrie und Kegelschnitte. 2. Aufl. Münster, Theissing. 12½ Ngr.

BLUMBERGER, W. Grundzüge einiger Theorien aus der neueren Geometrie. Halle, Schmidt. 1 Thlr. 26 Ngr.

WEISBACH, F. Anleitung zum axonometrischen Zeichnen. Freiberg, Engelhardt. ⅚ Thlr.

Haan, Bierens de, Réduction des intégrales définies $\int_0^\infty F(x)\,\frac{\cos px\,dx}{q^2+x^2}$ *et* $\int_0^\infty F(x)\,\frac{\sin px}{q^2+x^2}\,dx$. *Publiée par l'Académie Royale à Amsterdam.* Amsterdam, van der Post. 3 Frcs.

Angewandte Mathematik.

MARIN, Elemente der Maschinenlehre. Brünn, Buschak & Irrgang. 2 Thlr.

LÖWY. Ueber die Bahn der Leda. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Ngr.

BODE's Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels. Herausgeg. von Bremiker. 11. Ausg. Lief. 1. Berlin, Nicolai'sche Buchh. ⅓ Thlr.

Arago, F. Oeuvres complètes, publiées sous la direction de A. Barral. Tome XIV. (Astronomie, Tome IV.) Leipzig, Weigel. 2 Thlr.

Babinet et Housel, Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation. Paris, Mallet-Bachelier. 6 Frcs.

Rémusat, P. de, Les sciences naturelles. Etudes sur leur histoire et sur leurs plus récents progrès. Paris, Michel Levy frères. 3 Frcs.

Physik.

Boutigny, M. G. H. Studien über die Körper im sphäroidalen Zustande. Nach der 3. Aufl. des franz. Originales übers. v. R. Arendt. Leipzig, Brockhaus. 1⅚ Thlr.

Müller, J. Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 5. Aufl. Bd. 1, Lief. 7 u. 8. Bd. 2, Lief. 1—4. Braunschweig, Vieweg u. Sohn. à Heft. ⅓ Thlr.

Knochenhauer, K. W. Beobachtungen über zwei sich gleichzeitig entladende Batterieen. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 4 Ngr.

Sartorius v. Waltershausen. Ueber die Krystallformen des Bors. Göttingen, Dieterich'sche Buchh. 16 Ngr.

Kahl, E. Mathematische Aufgaben aus der Physik, nebst Auflösungen. 2. Theile. (Th. 1. Aufgaben, Th. 2, Auflösungen.) Leipzig, B. G. Teubner. 1 Thlr. 14 Ngr.

Cohn, F. Ein interessanter Blitzschlag. Bonn, Weber. 1⅚ Thlr.

Prestel. Die mittlere Windesrichtung an der Nordwestküste Deutschlands für jeden Tag im Jahre. Bonn, Weber. 2⅚ Thlr.

Ettingshausen, A. v. Die Principien der heutigen Physik. Wien, Gerold's Sohn in Comm. ⅙ Thlr.

Robida, P. K. Vibrationstheorie der Elektricität. Klagenfurt, Leon. ⅓ Thlr.

Lamont, J. Resultate aus den an der Münchener Sternwarte veranstalteten meteorologischen Beobachtungen. München, Franz in Comm. ⅓ Thlr.

Zantedeschi, F., de mutationibus quae contingunt in spectro solari fixo. München, Franz in Comm. ⅙ Thlr.

Ders. *Delle dottrine del terzo suono etc. Memoria I.* Wien, Gerold's Sohn in Comm. ⅙ Thlr.

Ders. *Della corrispondenza che monstrano fra loro in corpi sonori nella risonanza di più suoni in uno. Mem. II.* Ebendas. 4 Ngr.

Ders. *Della unità di misura dei suoni musicalici etc. Mem. III.* Ebendas. 14 Ngr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

System der Arithmetik und Analysis für den Gebrauch in Gymnasien und Realschulen, sowie auch zum Selbststudium entworfen von C. A. Bretschneider, Professor am Realgymnasium zu Gotha. Jena, Druck und Verlag von Friedrich Mauke. 1856—57.

Unter dem vorstehenden Titel liegen dem Referenten die vier Lieferungen eines Bandes von 576 Seiten vor, welche, als einzelne Lehrgänge bezeichnet, verschiedenen Schülerklassen zur Benutzung dienen sollen. Der allgemeinste Inhalt derselben ist so vertheilt, dass der erste Lehrgang alle diejenigen Gesetze über absolute Zahlen umfasst, welche unverändert oder doch nur mit geringen Modificationen auch von allen übrigen Zahlformen gelten. Der zweite Lehrgang giebt die Theorie der unbestimmten rationalen Zahlen, die niedere Algebra. Der dritte Lehrgang beschäftigt sich mit den Zahlensystemen, den irrationalen und imaginären Zahlen. Der vierte Lehrgang endlich ist einer Darstellung der Grundlehren der Analysis bestimmt. Ueber den Gebrauch des Lehrbuches meint der Herr Verfasser, wie die Verhältnisse jetzt liegen, dürften die beiden ersten Bändchen für das Bedürfniss der mittleren, die drei ersten Bändchen für das der grossen Gymnasien und gewöhnlichen Realschulen ausreichen, während die Realgymnasien alle vier Bändchen in Gebrauch nehmen würden.

Referent kann nur seine Freude darüber aussprechen, wenn wirklich in der Heimath des Herrn Verfassers die Verhältnisse so liegen; für die Schulen eines grossen Theiles von Deutschland würden jene Erwartungen, fürchten wir, nur fromme Wünsche sein und schon die ersten Lieferungen an dem Vorurtheile scheitern, nach welchem alles streng Wissenschaftliche in der Mathematik, also insbesondere die philosophische Entwickelung der Anfangsbegriffe, dem speciellen Universitätsstandpunkte vorbehalten bleibt, während der Schulunterricht nur zu oft statt einer Vorbildung eine Verbildung gewährt und das Vergessen mancher Gegenstände nöthiger macht, als das Erlernen anderer. Um so angenehmer hat es uns überrascht, aus der Feder eines gereiften Schulmannes zum Schulgebrauch ein Werk fliessen

zu sehen, dessen Benutzung zum Universitätsunterricht wenigstens in den drei ersten Lieferungen Nichts im Wege steht, dessen Lectüre jedem Docenten gewiss von Interesse sein wird und manch' neuen Gedanken hervorzurufen im Stande ist.

Referent ist allerdings mit dem aprioristischen Standpunkte, welchen Herr B. einnimmt, Nichts weniger als einverstanden, allein metaphysische Streitpunkte gehören sicher nicht in die Mathematik, und somit erscheint jedes System gerechtfertigt, von welchen Grundprincipien es auch ausgehe, wenn es nur dieselben festhält und consequent auf ihnen weiter baut; dann tritt aber auch das leicht erklärliche Ereigniss ein, dass die Form des Aufbaues von dem Fundamente unabhängig wird, und dass Werke, die auf den heterogensten Grundlagen beruhen, die Auseinandersetzung der einzelnen Lehren in derselben Reihenfolge, in derselben Entwickelung zeigen. Diese Form allein ist das mathematisch Wesentliche, und mit deren Betrachtung haben wir es auch im gegenwärtigen Falle zu thun. Demnach können wir uns dem Gange der Untersuchungen gegenüber nur lobend verhalten, wenn wir sehen, wie die einzelnen Operationen allmälig aus einander hergeleitet eine allmälige Erweiterung des Begriffes der Zahl erfordern und bedingen, wenn wir sehen, wie nach und nach die absoluten ganzen Zahlen, dann die Brüche und algebraischen Zahlen, weiter die irrationalen Zahlen und endlich die imaginären Zahlen in einer Weise behandelt werden, wie sie sonst in Schulbüchern niemals angewandt wurden, wo besonders die imaginären Zahlen immer den schwächsten Punkt bildeten, und deren wahre Theorie höchstens als Anhang mitgetheilt wurde, so dass der tüchtige Schüler in das Dilemma verfallen musste: Entweder das im Anhange Stehende ist richtig, und weshalb lernen wir dann das im Texte Stehende; oder aber der Text ist richtig, wozu dann im Anhange Zweifel rege machen?

Nachdem wir so im Allgemeinen unsere Anerkennung des B.'schen Lehrbuches ausgesprochen, mag uns der Herr Verfasser einen eben so allgemeinen leisen Tadel der vielen neuen Benennungen und Bezeichnungen zu Gute halten. Es kann gewiss der Verbreitung eines Werkes selbst nicht förderlich sein, wenn dasselbe längst bekannte Zeichen durch andere ersetzt oder sogar die früheren Zeichen in neuer Bedeutung benutzt*).

Einzelheiten, deren Berührung wünschenswerth, enthält das Buch in grosser Anzahl; wir wollen aus dem Zusammenhange nur Einiges hervorheben, wobei wir theils beipflichten, theils berichtigen zu müssen glauben. So ist es gewiss zu loben, dass gleich von Anfang an die Eindeutigkeit der Zahlenresultate bei den jedesmaligen Operationen der Arithmetik untersucht wird, wodurch die später auftretende Vieldeutigkeit kein *novum mon-*

*) So bezeichnet z. B. Herr B. die Combinationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur Klasse k durch ${}^nC_k$, welches der sonst gebräuchlichen Schreibart nach die Combinationen ohne Wiederholung aus k Elementen zur Summe n bedeutet.

strum horrendum, sondern ein längst Erwartetes ist; und so kann auch schon I. S. 50 die wichtige Definition aufgestellt werden: Gleichungen zwischen vieldeutigen Ausdrücken sagen aus, dass alle diejenigen Werthe, welche auf der einen Seite derselben enthalten sind, sämmtlich aber auch ausschliesslich auf der anderen Seite des Zeichens gefunden werden müssen.

Interessant ist ferner die Discussion I. S. 47, aus welcher hervorgeht, dass ein weiteres Aufsteigen von der Potenzirung zur Operation vierter Stufe keinen bestimmten Sinn für diese letztere gewähren würde, dass also nur sieben Grundoperationen (drei directe, vier inverse) angenommen werden können.

II. S. 10 freute sich Referent, die Zeichen $+$ $-$ endlich einmal in einer bestimmten Bedeutung benutzt zu finden, statt dass sie sonst bald Operationszeichen, bald Richtungscoefficienten vorstellen sollen. Freilich, Referent findet in ihnen das Letztere, Herr B. das Erstere; allein dieser Unterschied ist ein principieller und deshalb nicht zu besprechen.

Wohl zu untersuchen hingegen dürfte die II. S. 30 ausgesprochene und in der Vorrede besonders hervorgehobene Behauptung sein, als müsse immer $0^0 = 1$ statuirt werden und als gelten die Ausnahmsfälle nur dann, wenn die Grenzwerthe der Basis oder des Exponenten nur unendlich klein, nicht Null würden. Schon bei anderer Gelegenheit (Bd. I, S. 244 dieser Zeitschrift) hatte Referent einen ähnlichen Ausspruch zu bekämpfen, und kann auch heute keiner anderen Meinung sein, als dass 0^0 unter allen Umständen ein unbestimmter Ausdruck ist, dessen Werth nach den Regeln der Differentialrechnung zu ermitteln ist. Wir müssen nur hinzusetzen, dass der Fehlschluss des Herrn B. allerdings sehr tief zu liegen scheint, wenigstens uns nicht vollständig ersichtlich wurde. Vielleicht besteht er darin, dass die Null immer als die Differenz zweier gleich grosser Zahlen angenommen wird, während sie doch auch in anderer Weise vollständig erreicht werden kann, z. B. $\operatorname{cotg} x$ oder $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ für $x = \frac{\pi}{2}$. Wir geben ferner zu, dass bei Weitem die meisten Beispiele den Grenzwerth 1 liefern, wenn Basis und Exponent genau $= 0$ sind. Indessen giebt es doch auch dem widersprechende Fälle. So ist sicherlich $x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ sowie x und x^2 genau 0, wenn $x = 0$ gesetzt wird, und doch hat weder $\left(x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^x$ noch $\left(x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2}$ den Grenzwerth 1 bei $x = 0$.

Neu war uns die Einführung der imaginären Zahlen II. S. 33 mittelst der Aufgaben einer positiven (oder negativen) Zahl in das Product zweier ungleich (oder gleich) gezeichneter Factoren zu zerlegen, eine Aufgabe, welche allgemeiner ist, als die gewöhnliche Quadratwurzelausziehung aus einer negativen Zahl.

Das Kapitel von der Umformung der Aggregaten II. S. 42 flgg. ist mit einiger Vorliebe bearbeitet und lehrt so den Schüler Reductionen systematisch vornehmen, welche sonst meist nur ein Erwerb längerer Uebung sind.

II. S. 61 sind ausser den Gleichungen auch die Ungleichungen etwas weitläufiger behandelt und damit eine wesentliche Lücke besonders der deutschen Lehrbücher ausgefüllt.

Zu den geometrischen Reihen höherer Ordnung, welche II. S. 98 freilich nur sehr im Vorbeigehen als solche definirt werden, bei welchen die Quotienten der auf einander folgenden Glieder selbst wieder eine geometrische Reihe der um die Einheit niedrigeren Ordnung bilden, dürfte bemerkt werden, dass bei dieser Benennung vielleicht darauf Rücksicht zu nehmen gewesen wäre, dass schon Cauchy den Namen geometrischer Reihen höherer Ordnung in anderer Bedeutung benutzt hat. Nach dessen Definition (*Compt. rend.* XX, 2) ist nämlich Σu_n eine arithmetische, ΣU_n eine geometrische Reihe $m$ter Ordnung, wenn $u_n = a_0 + a_1 n + \ldots + a_m n^m$ und $U_n = A^{a_0 + a_1 n + \ldots + a_m n^m}$

Auch die Betrachtung der geometrischen Facultäten ist nicht ganz neu, wie der Herr Verfasser zu glauben scheint, wenn auch Schulbücher wenig oder Nichts darüber enthalten. Schon Euler, dann Rothe und besonders Schweins beschäftigten sich mit diesen Functionen, über welche einige historische Notizen in Schweins Analysis (Vorrede S. XVII) sich vorfinden.

Um auch aus dem dritten Lehrgange Einiges zu erwähnen, müssen wir gleich das erste Kapitel, welches von Zahlensystemen überhaupt handelt, als besonders gelungen hervorheben, aus welchem dann die Theorie der abgekürzten Rechnungsverfahren in allgemeinerer Form als sonst wohl gefolgert wird. Nur vermissen wir ungern die Fourier'sche Divisionsmethode, welche nach unserer Ansicht das entschiedenste Anrecht darauf besitzt, in allen, auch den niedrigsten Schulen, als der gewöhnlichen Division weit vorzuziehen, eingeübt zu werden. Man mache uns ja nicht den Einwurf, Anfänger würden den Sinn derselben nicht verstehen. Genau dasselbe gilt von allen Rechenmethoden, welche sämmtlich in dem Elementarunterrichte doch nur maschinal nachgemacht werden.

Mit lobenswerther Ausführlichkeit ist hingegen III. S. 72—84 von irrationalen Formeln und Gleichungen die Rede, deren Umwandlung selten so vollständig gelehrt wird. Es ist dieses eben wieder eine Parthie, in welcher man den geübten Schulmann auf den ersten Blick erkennt.

Wenn wir nun soweit mit wahrem Vergnügen den drei ersten Lehrgängen gefolgt sind, so möchten wir den vierten am liebsten gar nicht berühren, um uns den angenehmen Eindruck des Werkes nicht zu stören. Denn so leid es uns thut, so müssen wir doch diesen letzten Theil als den schwächsten bezeichnen, der einer nochmaligen strengen Ueberarbeitung gar sehr bedarf, bevor er dem Anfange ebenbürtig zur Seite stehen kann.

Nur die Würdigung der Methode der unbestimmten Coefficienten IV, S. 100 dürfte auch hier eine rühmliche Ausnahme machen. Die Grenzübergänge hingegen sind grossentheils so kühn, dass deren Richtigkeit von der Evidenz weit entfernt ist, und auch das so wesentliche Kapitel über Convergenz der Reihen kann nochmalige Revision keineswegs entbehren.

CANTOR.

Lehrbücher. (Fortsetzung.)

2) Begründung der wichtigsten Gesetze der allgemeinen Arithmetik, ein Versuch von Dr. PAUL ESCHER. 8. 58 S. Stuttgart, Metzler'sche Buchhandlung. 1857.

Die wichtigsten Gesetze, deren Begründung in diesem Schriftchen versucht worden ist, beziehen sich auf die sieben Elementaroperationen mit allgemeinen Zahlen und werden in zwei Abschnitten [I. Abschn. §. 1—63, Addition, Subtraction, Multiplication und Division ganzer und gebrochener (unbenannter) Zahlen; von der Lehre der benannten Zahlen; II. Abschn. §. 64—148, von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; die Lehre der algebraischen Summen] abgehandelt. Der Standpunkt des Herrn Verfassers beim Entwurf dieses Versuchs im Allgemeinen dürfte durch die Schlussworte der Vorrede hinlänglich bezeichnet sein. Daselbst heisst es: „Sollte diese Arbeit als eine selbstständige erscheinen können, insofern sie verschieden sein dürfte von jeder andern, welche den nämlichen Stoff enthält, so glaubt der Unterzeichnete (Verfasser) doch nicht unerwähnt lassen zu dürfen, dass er dem Studium der Schriften von Prof. Dr. Martin Ohm diejenige Uebersicht in einzelne mathematische Disciplinen verdankt, welche z. B. beim Entwurf der vorliegenden Blätter erforderlich war." Wenn Referent, offen gestanden, mit manchen in den Ohm'schen Schriften eigenthümlich aufgestellten und durchgeführten Distinctionen, hauptsächlich hinsichtlich ihrer Nothwendigkeit und Förderlichkeit für eine gründliche Unterweisung in der Mathematik, sich nicht immer einverstanden erklären kann, so ist es ihm noch weniger möglich mit mehreren in diesem Schriftchen vorkommenden Abweichungen von dem üblichen Lehrgange. So ist in derselben die Zahleneinheit „1" nicht als ganze Zahl, sondern als Repräsentant für die Form eines Bruchs, dessen Zähler und Nenner gleich sind, hingestellt (gleichwie die 0 in der Regel als Differenz zweier gleicher Zahlen definirt wird); die Reihe der ganzen Zahlen beginnt also mit 2. Der Verfasser sucht dieses dadurch zu rechtfertigen, dass schon im Begriffe der Zahl, nur durch das mehrfache Auftreten von Gegenständen oder Erscheinungen hervorgerufen, die Veranlassung liege, die Zahlreihe mit der „2" anzufangen. Bei tieferem Eindringen in die Lehren der allgemeinen Arithmetik sehe man sich aber sogar gezwungen, um nicht auf Widersinnig-

keiten zu stossen, der Zahlform „1“ die Anerkennung als ganze Zahl zu versagen. Denn z. B. die (nach Ohm sogenannte) ganze Potenz a^m, in der m eine ganze Zahl bildet, stelle ein Product von m Factoren vor, deren jeder a ist. Darnach müsste, wenn „1“ als ganze Zahl angesehen werden sollte, a^1 ein Product von einem Factor repräsentiren, welcher a wäre; ein Product setze aber wenigstens zwei Factoren voraus, folglich u. s. w. Wir können solchen Folgerungen nicht beistimmen. Denn angenommen a^1 wäre gemäss der oben gegebenen Definition einer Potenz ein mit unauflöslichen Widersprüchen behafteter Begriff, so braucht man doch deshalb noch nicht die „1“ um ihre lang behauptete Stellung zu bringen, sondern man könnte höchstens die Verwendung der „1“ zum Potenzexponent als eine ungerechtfertigte oder verbotene Vornahme hinstellen. Wie steht es nun aber, wenn man sagt, a^m und so auch a^1 ist anzusehen als das Resultat einer m mal und so auch nur einmal wiederholten Multiplication des Factors a mit der (absoluten) Einheit, wonach, wenn man der Einheit Vorzeichen giebt, auch für $+ a^m$ und $- a^m$, sowie, wenn man Multiplication in Division, Factor in Divisor umsetzt, für $\pm a^{-m}$ die Definitionen sich gut anschliessen; — liegt dann nach diesen oder ähnlichen Definitionen auch noch die Nothwendigkeit vor, die „1“ als ganze Zahl zu streichen?

Eine weitere Abweichung vorliegender Schrift von anderen Lehrbüchern besteht in der Behandlung und Einführung entgegengesetzter Zahlen. Die positiven und negativen Zahlen treten erst nach und in der Lehre von Potenzen auf, weil nach der Ansicht des Herrn Verfassers einerseits ein früheres Auftreten derselben durchaus überflüssig also auch ungerechtfertigt sei, andererseits und hauptsächlich, weil die Existenz der negativen Zahl ebensowenig eine selbstständige ist, als die der gebrochenen Zahl, indem — wie der Begriff der gebrochenen Zahl dem der Grösse — so der Begriff der negativen Zahl dem der Potenz sein Dasein verdanke. Letztere Behauptung erweise sich auch geschichtlich, da Ausdrücke von den Formen $+ a$ und $- a$ zuerst in der allgemeinen Arithmetik von Michael Stifel (Nürnberg 1544) und zwar dort unter dem Namen „Exponenten von Potenzen“ sich vorfinden. Auch diese Begründung scheint Referent nicht zureichend zu sein. Denn abgesehen davon, dass in einer systematischen Entwickelung einer Wissenschaft der durch die Geschichte derselben bezeichnete Weg nicht immer der kürzeste und angemessenste ist, so kann man wohl einfacher und natürlicher sagen, dass von der negativen Zahl der Begriff aus der Subtraction, sowie der von der gebrochenen Zahl aus der Division hervorgehe. Referent findet auch nach Einsicht vorliegender Schrift keinen andern zureichenden Grund, von dem allbekannten Satze abzugehen, dass die indirecten Rechnungsoperationen zur Aufstellung neuer Zahlformen die Veranlassung geben. Zu welchen methodischen Resultaten übrigens diese abweichenden Ansichten des Herrn Verfassers führen, davon kann man sich an einigen auf's Geradewohl herausgenommenen

Beispielen überzeugen. In dem 2. Abschnitt (Lehre von Potenzen etc.), nachdem die Gesetze für Potenzen und Wurzeln mit positiven Exponenten entwickelt worden sind, heisst es S. 45 §. 107: Lehrsatz. Stellen $a-b$, $c-d$, $e-f$ etc. allgemeine Differenzen vor, so ist

$$(a-b)+(c-d)+(e-f)+\text{etc.}=(a+c+e+\ldots)-(b+d+f\ldots)$$

Beweis. Welche ganze oder gebrochene Zahl auch m vertreten mag, immer ist

$$m^{a-b}=\frac{m^a}{m^b},\quad m^{c-d}=\frac{m^c}{m^d},\quad m^{e-f}=\frac{m^e}{m^f}\ldots.$$

folglich

$$m^{(a-b)+(c-d)+(e-f)+\cdots}=m^{a-b}\,.\,m^{c-d}\,.\,m^{e-f}\ldots$$
$$=\frac{m^a\,.\,m^c\,.\,m^e\ldots..}{m^b\,.\,m^d\,.\,m^f\ldots..}\ (\text{§§. 53 I. und 61 I.})$$
$$=\frac{m^{a+c+e\ldots.}}{m^{b+d+f\ldots.}}=m^{(a+c+e\ldots)-(b+d+f\ldots)}$$

also

$$(a-b)+(c-d)+(e-f)\ldots=(a+c+e\ldots)-(b+d+f\ldots)$$

Ebenso wird z. B. der Satz $(a-b)+c=(a+c)-b$ u. a. m. bewiesen, indem diese Ausdrücke zu Exponenten einer Potenz gemacht werden, dann damit nach den für Potenzen giltigen Gesetzen operirt wird. Man kommt hierbei wirklich in Versuchung zu fragen, ob es denn einen noch grössern Umweg giebt, diese und ähnliche einfachen Sätze der Addition mit entgegengesetzten Grössen zu begründen. Mit solcher Methodik und Systematik dürfte ebensowenig dem Unterrichte wie der Wissenschaft gedient sein. Bei allem Streben nach Gründlichkeit ist aber in der Schrift kein Wort über Irrationalität zu finden. Dass dieser Begriff in methodischer oder systematischer Hinsicht ausserhalb des Bereiches liege, auf welches sich der Inhalt der Schrift bezieht, kann nach der übrigen Fassung derselben nicht wohl angenommen werden. Ueber eigenthümliche Benennungen und Bezeichnungen, z. B. Bruchsbruch statt Doppelbruch, die übrigens auch in Ohm's Schriften schon vorkommen, können wir uns erforderliche Bemerkungen ersparen. Das wohl anzuerkennende Streben nach Strenge und Gründlichkeit des Herrn Verfassers würde vielleicht in einer etwas andern Richtung dankbarere Resultate erzielen. WITZSCHEL.

Lehrbuch der Arithmetik von Dr. FRIEDR. WILH. BARFUSS. Mit einem Vorwort von Dr. KUNZE. 8. 292 S. Weimar, 1857, Verlag von Hermann Böhlau.

Die Herausgabe dieses Werks des verstorbenen Verfassers aus dessen nachgelassenen Papieren hat Herr Dr. Kunze besorgt, um, wie er in einem beigefügten Vorwort bemerkt, einmal und zunächst den vielen Privatschü-

lern des Verewigten das Heft gedruckt in die Hände zu liefern, das er als Manuscript bogenweise ihnen zur Abschrift und fleissigen Durchsicht zu übergeben pflegte, und sodann, um auch in weiteren Kreisen einen Lehrgang bekannt zu machen, der sich beim Unterricht, namentlich beim Privatunterricht, so trefflich bewährt habe. Zugleich mag hier die Andeutung, dass der Verleger, Herr Böhlau, den Verlag in edler uneigennütziger Absicht übernommen hat, nicht unterdrückt werden.

Der Herausgeber, Herr Dr. Kunze, hat, wie es scheint, das hinterlassene Heft keinerlei Aenderung unterworfen, wenn er auch nach seiner eignen Aeusserung die Anordnung des Materials in manchen Punkten anders gegeben hätte. In der That liesse sich auch Mancherlei dagegen einwenden. Da es indessen bei einem bis zu einer gewissen Grenze ausgedehnten Unterrichte weniger darauf ankommt, in welcher Reihenfolge das dahin gehörige Material dem Schüler vorgeführt wird, wenn nur nicht gerade Absurditäten und unzulässige Anticipationen dabei mit unterlaufen, als vielmehr darauf, dass ihm dasselbe in gehöriger Klarheit, Schärfe und Eindringlichkeit beigebracht werde, da insbesondere letztere Rücksichten bei einem Privatunterrichte allein in dem Vordergrunde bleiben, während für den öffentlichen Unterricht in Gymnasien und andern höhern Schulen noch verschiedentliche andere Momente hinzutreten; so wird man sich auch bei der von Barfuss getroffenen Anordnung beruhigen können und zwar um so mehr, wenn, wie Herr Kunze versichern kann, der hiernach gegebene Unterricht an den Schülern des Verewigten keineswegs unfruchtbar geblieben ist. Uebrigens ist der Zusammenhang der einzelnen Kapitel in manchen Fällen so lose oder von den übrigen unabhängig, dass sehr leicht das eine oder andere je nach Bedürfniss und Umständen übersprungen oder vorausgenommen werden kann.

Das Lehrbuch beginnt in den fünf ersten Kapiteln (51 S.) mit der Darstellung und Auseinandersetzung der gewöhnlichen Rechnungsoperationen mit ganzen und gebrochenen Zahlen, einschliesslich der Decimalbrüche. Hierauf folgen im sechsten Kapitel die wichtigsten Sätze der allgemeinen Proportionslehre und deren Anwendung auf die gewöhnlichen Rechnungen des bürgerlichen Lebens. Die beiden folgenden Kapitel — das Rechnen mit 0 und ∞ sowie die Hauptsätze über die Kettenbrüche — können nach Umständen auch einstweilen überschlagen werden. Es schliesst sich dann an die Proportionslehre recht gut die im neunten Kapitel gegebene Lehre von den bestimmten Gleichungen ersten Grades an, auf welche im zehnten Kapitel die unbestimmten Aufgaben ersten Grades und die Theorie der Congruenzen folgen. Das elfte Kapitel enthält die Lehre von Potenzen und Wurzeln für ganze absolute Exponenten, woran sich im zwölften und dreizehnten Kapitel das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel knüpft. Erst im vierzehnten Kapitel kommt die Auseinandersetzung der vier ersten Operationen mit allgemeinen Summen und Producten unter

dem Titel „von der sogenannten Buchstabenrechnung". Das fünfzehnte und sechszehnte Kapitel enthält dann die Auflösung der quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen, wobei gelegentlich der Begriff und die Hauptsätze über imaginäre Zahlen mit eingeschaltet werden. Dass hiervon Mancherlei, unter Umständen das ganze sechszehnte Kapitel (Gleichungen dritten und vierten Grades) überschlagen werden kann, ist wohl selbstverständlich. Das siebenzehnte Kapitel giebt die allgemeine Potenzlehre und die der Logarithmen, das achtzehnte behandelt einige Sätze über das irrationale und imaginäre Binom als Einleitung für eine ganz analytische Behandlung der goniometrischen und hyperbolischen Functionen, welche letztere von einem Gesichtspunkte aus entwickelt werden.

Wird nämlich nach demselben $e^{x\sqrt{k}} = a + b\sqrt{k}$ gesetzt, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen, a und b von k unabhängig sind, so wird allgemein a der Cosinus, b der Sinus des Exponenten x für den Modulus k, desgleichen $\frac{b}{a}$ und $\frac{a}{b}$ resp. die Tangente und Cotangente genannt. Diese Functionen sind hyperbolische, wenn k irgend eine positive Zahl, cyclische oder die gewöhnlichen goniometrischen, wenn $k = -1$ angenommen wird u. s. w. Zu Ende dieses Kapitels werden noch die Auflösungen der Gleichungen zweiten und dritten Grades mit Hilfe goniometrischer Functionen, sowie der Moivre'sche Satz und seine Anwendung zur Auflösung der einfachen höhern Gleichungen $x^n \pm 1 = 0$ gegeben. Das neunzehnte und letzte Kapitel enthält die Hauptsätze über die arithmetischen und geometrischen Reihen, sowie Einiges bezüglich der Summation gewisser höherer Reihen.

Schon aus diesem Inhaltsverzeichniss lässt sich ein besonderer Zuschnitt des arithmetischen Materials für besondere Zwecke, auf welche ein allgemeiner Unterricht in Schulen nicht direct eingeht oder wenigstens nicht vorzugsweise Rücksicht nimmt, nicht verkennen. Der Zweck, den der Verfasser vor Augen gehabt haben mag, ist nun, um es kurz zu wiederholen, kein anderer gewesen, als seinen Schülern so bald wie möglich das gewöhnliche Material der Elementararithmetik mit dem geringsten Aufwand von Zeit beizubringen und ihn dahin zu fördern, dass er so bald wie möglich in diesem Felde auf eignen Füssen stehen könne. Leicht hat er es dabei seinen Schülern keineswegs gemacht und machen wollen, insofern er dieses Ziel nicht auf Kosten mathematischer Strenge und Gründlichkeit, ebensowenig durch leichte Bettung des Schülers in einen gedankenlosen Schlendrian und zu unfruchtbarer Leistenarbeit zu erreichen strebte. Auch hiernach lässt sich der Wunsch, dem Lehrbuch eine grössere Verbreitung als innerhalb des Kreises der Schüler und Freunde des Verfassers, recht wohl rechtfertigen. Den Lehrern der Mathematik, welche mit ähnlicher Strenge der Grundsätze bei ihrem Unterrichte verfahren und welche dem Ansinnen, Privatunterricht zu geben, sich aus verschiedenen Gründen nicht

entziehen können und dürfen, wird die Durchsicht dieses Lehrbuchs nicht ohne Interesse bleiben und sie würden es ihren Privatschülern zum Studium nicht ohne Nutzen für dieselben in die Hände geben, auch wenn sie nicht mit allen Ansichten und Darstellungsweisen des verewigten Verfassers übereinstimmen. — Dem Vorworte hat der Herausgeber Herr Dr. Kunze eine kurze aber ansprechende und lebendig gehaltene Biographie seines verewigten Freundes beigefügt. WITZSCHEL.

Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen. Von J. J. VORLÄNDER, Königl. Preuss. Kataster-Inspector und Steuerrath. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1858. gr. 8. 55 S.

Der bereits durch mehrere vortreffliche Aufsätze in gegenwärtiger Zeitschrift, sowie durch die bei Gelegenheit der Katastervermessung — zum grossen Theil nicht ohne eigene pecuniäre Opfer — ausgeführten und im Jahre 1853 veröffentlichen geographischen Ortsbestimmungen im Preussischen Regierungsbezirke Minden*) bekannte Verfasser zeigt in der vorliegenden Schrift in klarer, gefälliger Sprache die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Ausgleichung der durch Seiten- und Winkelmessungen bestimmten Polygone, die bisher von den praktischen Geometern besonders deshalb vermieden wurde, weil das schwülstige Rechnungswerk einen so bedeutenden Zeitaufwand erforderte, dass der dadurch erzielte Genauigkeitsgrad, den man in vielen Fällen als über die Zwecke der Messung hinausgehend erachtete, als zu theuer erkauft erscheinen musste. Die Vertheilung der bei derartigen Messungen sich ergebenden unvermeidlichen Fehler wurde daher mehr nach dem praktischen Gefühl, als auf eine wissenschaftliche Grundlage basirt vorgenommen, wodurch auf der andern Seite wiederum nicht der Genauigkeitsgrad zu erlangen war, den der Zweck der Arbeit eigentlich erfordert.

Deshalb ist der Herr Verfasser bemüht, nicht allein die strenge Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in eine mehr zugängige Form einzukleiden, sondern auch auf solche Abkürzungen derselben hinzuweisen, die das Zahlenwerk erheblich vermindern, ohne den Genauigkeitsgrad der Resultate merklich zu ändern.

Zu diesem Zwecke stellt er drei Ausgleichungssysteme unter folgenden Benennungen auf:

---

*) Der vollständige Titel dieses zugleich als Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf trigonometrische Netzarbeiten insbesondere für Praktiker empfehlenswerthen Werkes ist: „Geographische Bestimmungen im Königl. Preuss. Regierungsbezirke Minden vermittelst des trigonometrischen Netzes zur Aufnahme des Grundsteuer-Katasters. Mitgetheilt von J. J. Vorländer, K. Pr. Steuerrath. Minden, 1853. Im Selbstverlage des Verfassers und in Commission bei Körber & Freitag.

I. Gesammtausgleichung, d. h. streng wissenschaftlich unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Widersprüche in den gemessenen Seiten und Winkeln;

II. Ausgleichung durch Theilung mit Neigungsveränderung, d. h. durch vorläufige Vertheilung der Widersprüche in den Winkeln, jedoch mit späterer Veränderung der daraus abgeleiteten Neigungswinkel der Seiten gegen die Abscissenachse;

III. Ausgleichung durch Theilung ohne Neigungsveränderung, d. h. durch vorausgehende und definitiv beizubehaltende Winkelausgleichung.

Um einen sichern Schluss auf die Vorzüglichkeit der einen Methode vor der andern erlangen zu können, folgt der allgemeinen Begründung derselben für geschlossene Polygone die vollständige Durchführung eines der Praxis entnommenen Beispiels, nicht allein nach einem jeden dieser drei Systeme, sondern auch noch nach den beiden bisher in Anwendung gekommenen, von dem Verfasser als „hausbacken“ bezeichneten Manieren.

Hierbei stellt sich heraus, dass die Quadratsumme der durch das Ausgleichungssystem III. erlangten Verbesserungen die des Systems II. nur um den zwanzigsten Theil und die des strengsten Verfahrens I. nur um den sechsten Theil übersteigt, wohingegen die bessere der beiden empirischen Manieren eine mehr als doppelt, und die andere eine sechsmal so grosse Summe der Fehlerquadrate ergiebt, als die nach der mindeststrengen wissenschaftlichen Methode III. erhaltene.

Daraus folgt, dass die empirischen Ausgleichungsverfahren durchaus unzulässig sind, und dass, wenn der Zweck der Arbeit die grösste Strenge erfordert, die Methode Nr. I. angewendet werden muss, wo dies aber nicht der Fall ist, das Verfahren III. vollkommen ausreicht.

Da nun voraussichtlich der grösste Theil der polygonometrischen Rechnungen dieser letztern Manier zufallen wird, so hat der Herr Verfasser die Rechnung nach derselben durch ein sehr zweckmässig angeordnetes Formular erheblich abzukürzen gesucht, von dem er selbst mit vollem Rechte sagt:

„Wer einen Logarithmus und einen Sinus aufschlagen kann und mit Multiplicationstafeln umzugehen weiss, der kann in Formular III. ein Polygon oder einen Linienzug ausgleichen, wenn er auch von der wissenschaftlichen Begründung der darin schematisirten Methode keine Kenntniss hat.“

In der hierauf folgenden und in ähnlicher Weise behandelten Ausgleichung einfacher Linienzüge (nicht geschlossener Polygone) findet sich zunächst ein Schema für das strengste Verfahren I., bei welchem sich im Vergleich mit jenem für Verfahren III. herausstellt, dass die erstere Methode ungefähr doppelt so viel Arbeit erfordert, als die letztere; wäh-

rend die Arbeitsvermehrung des Verfahrens III. in Bezug auf die hausbackene Methode im Verhältniss wie 3 : 5 stattfindet. In letzter Hinsicht darf aber nicht ausser Betracht bleiben, dass, abgesehen von dem Werthe einer wissenschaftlich begründeten Fehlerausgleichung, die in dem Verfahren Nr. III. enthaltenen Rechnungscontrolen von grosser Wichtigkeit sind.

Die Ausgleichung einfacher Linienzüge nach der III. Methode zeigt sodann der Herr Verfasser unter gleichzeitiger Anwendung der demnächst näher zu besprechenden Coordinatentafeln von Ulffers, und führt das mit Hilfe der letztern in hohem Grade erleichterte Rechnungswerk ebenfalls in einem besonderen Formulare aus.

Nachdem er noch die Ausgleichung verzweigter Linienzüge im Allgemeinen berührt hat, erläutert er schliesslich noch kurz das Gausssche Eliminationsverfahren, wobei er auf Gleichungen mit drei unbekannten Grössen sich zu beschränken für angemessen erachtet.

Kann dem hier kurz angedeuteten Inhalte zu Folge diese Monographie nur als eine höchst willkommene Erscheinung betrachtet werden, und zwar insbesondere für alle diejenigen praktischen Geometer und Markscheider, denen die Erzielung einer grösstmöglichen Genauigkeit ihrer polygonometrischen Arbeiten ohne allzugrossen Zeitaufwand am Herzen liegt, so dürfte dieselbe ihres wissenschaftlichen Werthes halber auch noch als ein angenehmes Supplement zu den mehrfach erschienenen Schriften über Ausgleichungsrechnung (Gerling, Dienger etc.) angelegentlich zu empfehlen sein.

Im Uebrigen ist die Ausstattung des Werkes als vortrefflich anzuerkennen.

A. Nagel.

Praktische Anleitung und Tafeln zur Berechnung von Dreiecken niederer Ordnung und Polygonen; als zweite erweiterte Ausgabe der Coordinaten-Tafeln von 1833, von D. W. Ulffers, Königl. Preuss. Steuerrath. Koblenz, 1854, beim Verfasser. 8.

Hierzu ein Nachtrag des Verfassers:

Die Tetragonometrie, ein neues Hilfsmittel der Feldmesskunst. Koblenz, 1855. Preis des gesammten Werkes: 1⅔ Thlr.

Wie schon der Titel besagt, haben diese Tabellen zunächst den Zweck, die Berechnung der Dreieckseiten und Coordinaten bei kleineren Triangulirungen und Polygonmessungen abzukürzen und insbesondere dabei die logarithmischen Rechnungen zu beseitigen. Sie können aber auch in allen anderen Fällen mit Vortheil Anwendung finden, in denen es sich darum handelt, numerische Rechnungen von den Formen

$$\frac{p}{\sin\alpha}, \qquad p \cdot \sin\alpha, \qquad p \cdot \cos\alpha$$

auszuführen.

Die ersten „Tafeln zur Berechnung der Dreieckseiten" geben die verschiedenen Werthe der Functionen $\frac{p}{\sin \alpha}$ oder, wie man auch sagt, die Vielfachen der Cosecanten in einem für nicht zu unförmliche Dreiecke ausreichenden Umfange von 20 bis 130° der Centesimaltheilung und bilden die auf dem Titel angezeigte Erweiterung der im Jahre 1833 erschienenen „Coordinaten-Tafeln", welche in der gegenwärtigen zweiten Auflage gleichsam als zweiter Theil unter demselben Titel auftreten. Diese letzteren enthalten die numerischen Werthe der zweiten und dritten der oben angeführten Functionen oder die vielfachen Sinus und Cosinus.

Ist demnach in einem Dreiecke ausser den Winkeln die eine Seite, vielleicht a, gegeben, so finden sich die beiden andern Seiten nach den bekannten Formeln

$$b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B \text{ und } c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C.$$

Dieselben besitzen den Factor $\frac{a}{\sin A} = m$ gemeinschaftlich, welcher somit aus den ersten Tabellen gefunden werden kann, während sodann die Endresultate $b = m \cdot \sin B$ und $c = m \cdot \sin C$ in ähnlicher Weise aus den mit *sinus* überschriebenen Coordinaten-Tafeln zu entnehmen sind.

Beiderlei Tabellen haben im Allgemeinen dieselbe Einrichtung und geben in zweckmässiger Weise die 10-, 20-, 30- u. s. f. bis 90fachen der erwähnten goniometrischen Functionen direct für Winkel von 2 zu 2 Minuten der neuen Theilung, so dass man für jede andere Zahl p den gesuchten Werth leicht aus Theilen zusammensetzen kann, die man durch Vervielfältigung oder Theilung der aus der Tabelle entnommenen Angaben durch Potenzen der Zahl 10 erhält.

Um diese Tabellen auch für die alte Kreistheilung anwendbar zu machen, hat der Herr Verfasser dem Gradmaass der neuen Theilung das entsprechende der alten Theilung, jedoch nur in auf Ganze abgerundeten Minuten, beigefügt, wodurch freilich der Uebelstand entsteht, dass das letztere bis nehezu um ½ Minute von denjenigen abweichen kann, auf welches die Angaben der Tabellen sich beziehen. Die dadurch nothwendig entstehenden Unsicherheiten dieser Angaben können daher mehrere Einheiten der letzten Decimalstelle betragen. So befindet sich z. B. auf Seite 248 für den 20fachen Sinus von 41° 34′ der Centesimaltheilung die Angabe 12,094 und in der Rubrik für die alte Theilung 37° 12′. Die 41° 34′ der neuen Theilung entsprechen aber genau 37° 12,36 der alten Theilung, wofür natürlich auch nur der angegebene 20fache Sinus passt, während für die dastehenden 30° 12′ derselbe sich zu 12,092 berechnet, also von der Angabe um 0,002

abweicht. Für den daraus abgeleiteten 200fachen Sinus würde daher eine Differenz von zwei Einheiten der zweiten Decimalstelle entspringen.

Da nun einmal die im westlichen und südlichen Deutschland im Gebrauch befindlichen Winkelmessinstrumente mit Centesimaleintheilung eine entsprechende Einrichtung dieser Tabellen erforderten, so dürfte es, um den oben erwähnten Unbequemlichkeiten einigermassen zu begegnen, nicht unzweckmässig gewesen sein, das Gradmaass der alten Theilung bis auf Zehntelminuten abgerundet beizufügen, wodurch wenigstens die Möglichkeit einer leichten Interpolation geboten wäre.

Zur Erleichterung des Auffindens der zu den Decimalen der gegebenen Zahl p gehörenden Proportionaltheile ist jeder Seite der Coordinaten-Tabelle eine kleine Hilfstafel beigefügt, die aber auch eben so gut hätte wegbleiben können, weil man diese Proportionaltheile nicht allein eben so leicht ganz nach demselben Verfahren und in derselben Horizontalen wie die übrigen Theile findet, sondern weil sich auch dieselben in vielen Fällen auf die zuletzt angedeutete Weise sogar noch genauer ergeben.

Die letzte (dritte) Decimale in den Proportionaltheilen der Hilfstafel ist nämlich unsicher, weil sie, streng genommen, nur für einen bestimmten Winkel und zwar für den in der Mitte derselben Tabellenseite befindlichen berechnet ist. Da sie aber für die sämmtlichen 26 auf dieser Seite behandelten Winkel in Anwendung kommen soll, so kann die dadurch entstehende Unsicherheit, insbesondere für die Cosinus in der Nähe von 90° und für die Sinus in der Nähe von 0° an 4 Einheiten der letzten Decimalstelle betragen. Deshalb dürfen diese Proportionaltheile auch nur so lange in Anwendung gebracht werden, als es sich um Resultate mit nur zwei Decimalstellen handelt.

Uebrigens sind aber auch in beiden Tabellen nur die 10- und 20fachen Functionen mit 3, die 30- bis 90fachen hingegen nur mit 2 Decimalen angegeben, was darin seine Erklärung findet, dass bei Polygonmessungen, durch deren Berechnung jedenfalls gegenwärtiges Werk hervorgerufen worden ist, Längen über 300 Ruthen nicht so leicht vorkommen, mithin die entsprechenden aus den Tabellen entnommenen Resultate immer mit 2 Decimalen erhalten werden, von denen aber, wie wir gesehen haben, bei Anwendung auf Rechnungen nach der alten Theilung die zweite etwas unsicher bleiben kann.

Wenn man sich nun auch in vielen Fällen mit der genauen ersten Decimale vollkommen begnügen darf, so erscheint doch der Wunsch, bei manchen Arbeiten wenigstens die Rechnung bis auf 2 Decimalen sicher führen zu können, um so mehr gerechtfertigt, als derselbe bei strengern Ausgleichungen, sowie bei Zusammenstellungen vieler nach den Tabellen ermittelter Coordinatenabschnitte sogar zur Forderung wird.

Der Herr Verfasser würde daher gewiss Manchen zu grossem Danke verpflichten, wenn er bei einer wiederholten Auflage den durch Weglassung

der Hilfstabellen gewonnenen Platz zur Vermehrung der einzelnen Vielfachen um eine Decimalstelle verwenden wollte*).

Was die den Tafeln vorausgeschickte Anleitung zur Berechnung der Dreiecke und Polygone anlangt, so beschränkt sie sich selbstverständlich nur auf Das, was zum Verständniss der Tabellen nothwendig ist, indem sie den Gebrauch an zwei numerischen Beispielen zeigt, von welchen das eine sich auf die Dreiecks-, das andere auf die Polygonmessung bezieht, wobei noch die später von Vorländer als „hausbacken“ bezeichnete Manier der Ausgleichung auf die Aggregate der Coordinatenabschnitte als unbedenklich empfohlen wird.

In dem 1855 erschienenen Nachtrage „die Tetragonometrie“ giebt der Herr Verfasser auf drei Seiten ein recht sinnreiches Verfahren der Festlegung von Punkten an, welches zwischen der nur eine Seitenmessung erfordernden Triangulirung und der Polygonmessung mitten inne liegt, insofern dasselbe in einer Aneinanderreihung von Vierecken besteht, deren jedes aus den Winkeln und 2 Seiten bestimmt wird. Durch einen zweckmässig angeordneten Linienzug, dessen einzelne Strecken zugleich Seiten der angrenzenden Vierecke sind und welche direct gemessen werden, ist es möglich, nach und nach die für die entfernteren Vierecke fehlenden Bestimmungsseiten herzuleiten, um dadurch wie in einem Dreiecksnetz die Lage der einzelnen Punkte zu bestimmen.

Wenn die einzelnen Bemerkungen, die sich dem Referenten über das vorliegende Werk darboten, durch den Wunsch in die Feder dictirt wurden, dasselbe noch etwas höher gestellten Ansprüchen zugängiger zu machen, so vermögen sie doch keineswegs die Anerkennung zu schwächen, die er dieser sehr verdienstlichen und ihren ursprünglichen Zweck hinreichend erfüllenden Arbeit im Allgemeinen zu zollen nicht unterlassen kann. Insbesondere erhalten in ihr praktische Geometer, Markscheider etc. ein vortreffliches Hilfsmittel, die geisttödtenden Rechnungsarbeiten wesentlich abzukürzen und zu erleichtern.

A. Nagel.

Lehrbuch der Experimentalphysik von Dr. Edmund Külp, Professor der Physik und Mathematik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt; in vier Bänden; zweiter Band, die Lehre vom Schall und vom Licht, Bogen 1—29. Darmstadt, Verlag von J. P. Diehl. 1857.

Dieses ausführlichere Lehrbuch der Experimentalphysik soll in vier Bänden, jeder zu etwa 30 Bogen und einem Preise von 1 Thlr. 22 Sgr. oder

*) Herr Bergrath Weisbach in Freiberg hat in seinen im Jahre 1842 in sehr compendiöser Form herausgegebenen Tafeln der vielfachen Sinus und Cosinus (Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung) — welche insbesondere für Bussolen- und Gradbogenmessungen nur von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ Grad berechnet sind, dabei aber durch die beigeschriebenen halben Differenzen noch halbe Zehntelgrade berücksichtigen — selbst die 9fachen mit 4 Decimalen angegeben, wodurch man also bis zu den 1000fachen die Angaben auf 2 Decimalen genau erhält.

3 Fl. erscheinen. Der Inhalt wird auf die einzelnen vier Bände wie folgt vertheilt sein:

I. die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung fester und flüssiger Körper;
II. die Lehre vom Schall und vom Licht;
III. die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität;
IV. die Lehre von der Wärme und die Grundzüge der physischen Astronomie.

Diese vier Bände zusammen sollen weiter die eine Hauptabtheilung eines grössern Werkes bilden, dessen andere als ein Lehrbuch der mathematischen Physik ebenfalls in vier Bänden erscheinen soll. Das Gesammtwerk ist demnach seiner Anlage nach als ein schon ziemlich umfängliches zu bezeichnen. Angesichts so mancherlei Beispielen von angefangenen aber nur langsam fortschreitenden grössern literarischen Unternehmungen ist daher im Interesse des Werkes selbst sehr zu wünschen, dass das Erscheinen wenigstens der vier Bände der Experimentalphysik in rascher Folge geschieht.

Gegenwärtig liegt uns von letzterer die grössere Abtheilung des zweiten Bandes, als des zuerst erschienenen, vor. Der Herr Verfasser rechtfertigt das Erscheinen des zweiten Bandes vor dem ersten zunächst dadurch, dass, weil jeder Band ein für sich abgeschlossenes und bestehendes Ganze enthalte, der Anfang mit jedem derselben beliebig gemacht werden konnte. Mit dem zweiten Bande sei der Anfang gemacht worden, weil der Verfasser mit den darin zu behandelnden Gegenständen nach der weiter unten bemerkten Methode in der Abfassung des Lehrbuchs zu einem gewünschten Abschluss gekommen wäre, während dieses zur Zeit noch nicht der Fall war bezüglich einiger Versuche über Gegenstände, deren Besprechung in den ersten Theil gehört, z. B. über gewisse Molecularbewegungen tropfbarer und ausdehnsamer Körper. Ausserdem wäre der Lehrstoff dieses zweiten Bandes besonders geeignet zu zeigen, wodurch sich das projectirte Werk von andern ähnlichen Schriften unterscheidet.

Bezüglich der Anlage des ganzen Werkes im Allgemeinen bemerkt der Herr Verfasser, dass die seit einer Reihe von Jahren von ihm ausgearbeiteten und seinen Vorträgen über Physik untergelegten Hefte zwar zum Grunde liegen, aber einer nochmaligen dem Zwecke der Herausgabe besonders entsprechenden Umarbeitung und Anordnung unterworfen worden seien. Ferner solle diese Experimentalphysik grösstentheils lauter Versuche enthalten, welche in dem eignen physikalischen Cabinet (der Gewerbschule) theils vom Verfasser selbst, theils von einigen seiner Herren Collegen angestellt oder wiederholt worden sind. Da der Herr Verfasser diese Versuche in systematischer wie didaktischer Ordnung gehörig aneinander gereiht zu haben meint, so glaubt er insbesondere sein Lehrbuch als eine nicht

unwillkommen erscheinende Grundlage für den Unterricht an polytechnischen Schulen bezeichnen zu dürfen.

Indem wir bezüglich der weiteren An- und Absichten des Herrn Verfassers beim Entwurfe seines Lehrbuchs auf den im vorliegenden Bande vorausgeschickten Vorbericht verweisen, sei es uns erlaubt, über die getroffene Ausführung des Planes, soweit derselbe aus dieser Vorlage zu ersehen ist, einige Worte hinzuzufügen.

Durch einen Vergleich mit einigen bekannteren Lehrbüchern der Physik liesse sich das vorliegende am kürzesten vielleicht dadurch charakterisiren, dass die rein experimentellen Partien, d. h. die Darstellungen und Beschreibungen der Erscheinungen, sowie der zur Hervorrufung derselben nöthigen Apparate und Beobachtungsweisen mit ähnlicher und gleicher Ausführlichkeit darin berücksichtigt und behandelt sind, wie in dem grösseren Pouillet-Müller'schen Werke; die theoretischen, d. h. die zur Erklärung und Begründung der Erscheinungen erforderlichen Erörterungen aber ungefähr in der Weise gehalten sind, wie man es in den Lehrbüchern von Baumgärtner und v. Ettingshausen vorfindet. Die Elementarmathematik ist dabei in derselben Ausdehnung und in derselben Weise zur Anwendung gekommen, wie in den letztgenannten Werken. Referent hält die gleichmässige Berücksichtigung einer deutlichen und ausführlichen Darlegung der Erscheinungen, wie eine präcise Entwickelung und Darstellung ihrer Gesetze mit Hilfe der Mathematik, soweit es mit elementaren Mitteln zulässig ist, für eine wesentliche Eigenschaft eines guten Lehrbuchs der Physik von diesem und ähnlichem Umfange. Die verhältnissmässig geringere Benutzung der Mathematik in dem angeführten Pouillet-Müller'schen Werke — augenscheinlich um selbiges dem weniger mathematisch unterrichteten Publicum geniessbarer oder zugänglicher zu machen — ist von wissenschaftlichem Standpunkte aus genommen eben keine empfehlenswerthe Seite desselben, so wenig auch sonst der ziemlich selbstständigen Bearbeitung des französischen Originalwerks die Anerkennung zu versagen ist. Andererseits ist in den Lehrbüchern von v. Ettingshausen und Baumgärtner der die Erscheinungen und Apparate beschreibende Theil, wenn auch keineswegs vernachlässigt, doch nicht so hervorgehoben, dass für die Mehrzahl der Schüler die Ansichten der Figuren und die Durchlesung des zugehörigen Textes der gründlichen Wiederholung eines gehörten Vortrages, sowie einer deutlichen Vorstellung der gesehenen Apparate und Erscheinungen überall einen ausreichenden Anhalt gewähren könnte. In dieser Hinsicht dürfte das Külp'sche Lehrbuch, nach der Ausführung des vorliegenden Bandes zu urtheilen, durch eine gleichmässigere Berücksichtigung der beiden genannten Richtungen sich besonders empfehlen. Eine speciellere Besprechung des Werkes hinsichtlich der Ausführung und Darstellung besonderer Theile der Physik müssen wir uns wenigstens bis zum Erscheinen des ersten Bandes und der letzteren Hälfte oder des Restes vom zweiten

(Polarisation und Doppelbrechung des Lichtes betreffend) vorbehalten. Bemerkt sei nur noch schliesslich, dass auch die neueren Erscheinungen und Entdeckungen in den betreffenden physikalischen Zweigen einer gehörigen Berücksichtigung sich zu erfreuen haben, wie beispielsweise die Erörterungen über Fluorescenz und Phosphorescenz darlegen und bezeugen.

WITZSCHEL.

Bibliographie

vom 11. December 1857 bis 1. März 1858.

Periodische Schriften.

Archiv der Mathematik und Pkysik. Herausgeg. von GRUNERT. Thl. 30, Heft 1. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Zeitschrift, kritische, für Chemie, Physik und Mathematik. Herausgeg. von KEKULÉ, LEWINSTEIN, EISENLOHR und CANTOR. Jahrgang I, Heft 1. Erlangen, Enke. pro compl. 3 Thlr. 18 Ngr.

Annali di Matematica pura ed applicata, pubblicati da B. Tortolini, F. Betti, F. Brioschi, A. Genocchi. Roma. (Bologna, H. Glück.) pro compl. $4\frac{2}{3}$ Thlr.

Reine Mathematik.

BRETSCHNEIDER, C. A., Prof., System der Arithmetik und Analysis. Lehrgang 2 und 3. Jena, Mauke. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

POLLAK, Sammlung algebraischer Aufgaben. 3. Aufl. Augsburg, Rieger'sche Buchh. $\frac{5}{6}$ Thlr.

KUMMER, E., Einige Sätze über die aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten complexen Zahlen. Berlin, Dümmler in Comm. 12 Ngr.

RIEMANN, B., Dr., Theorie der Abel'schen Functionen. Berlin, Reimer. $\frac{2}{3}$ Thlr.

NERLING, W., Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Dorpat, Hoppe. $\frac{5}{6}$ Thlr.

—— Auflösungen dazu. Ebendas. $\frac{2}{3}$ Thlr.

—— Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik nebst Beispielen und Aufgaben. Ebendas. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

REYER, A. P., Beiträge zum Studium der Arithmetik und Algebra für Untergymnasien. Triest, Schimpff. 1 Thlr.

FISCHER, W. F. C., Lehrbuch der Planimetrie mit Rücksicht auf Wöckel's Sammlung geometrischer Aufgaben. Nürnberg, Bauer & Raspe. 21 Ngr.

WITZSCHEL, B., Dr., Grundlinien der neueren Geometrie. Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

BERKHAN, W., Die Anwendung der Algebra auf Geometrie. Halle, Schmidt. 24 Ngr.

LARGIADER, A. P., Das axanometrische Zeichnen. Theil I. Theoretische Begründung. Frauenfeld, Verlagscomptoir. ½ Thlr.

WEILAND, G., Raumlehre. Lehrbuch der elementaren Geometrie. Berlin, Mohr & Comp. ½ Thlr.

Angewandte Mathematik.

LÜBSEN, H. B., Einleitung in die Mechanik. Zum Selbstunterrichte und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Th. I. Hamburg, Meissner. 24 Ngr.

DUHAMEL, Lehrbuch der analytischen Dynamik. Deutsch herausgegeben von O. SCHLÖMILCH. 2. Aufl. Lief. 4, 5 und 6. Leipzig, Teubner. à ⅓ Thlr.

WEISBACH, J., Prof., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Aufl. Bd. 2, Lief. 5 und 6. Braunschweig, Vieweg & Sohn. à ½ Thlr.

MATTHIESSEN, L., Ueber die Gleichgewichtsfiguren homogener frei rotirender Flüssigkeiten. Kiel, Schwers. ½ Thlr.

WIEBE, F. K. H., Handbuch der Maschinenkunde. Bd. 1. Die Maschinenbaumaterialien und deren Bearbeitung. Stuttgart, Mäcken. 10 Thlr.

MÜLLER, J., Geometrische Formeln in ihrer Anwendung auf die Baupraxis. Leipzig, Brockhaus. 12 Ngr.

Kepleri, J., opera omnia ed C. Frisch. Vol. I, pars II. Frankfurt a/M., Heyder & Zimmer. 2⅙ Thlr.

ALBRECHT und VIEROW, Lehrbuch der Navigation und ihrer mathematischen Hilfswissenschaften. Für die K. Preuss. Navigationsschulen bearb. 2. Aufl. Berlin, Decker'sche Hofbuchdr. 3½ Thlr.

ANGER, C. T., Untersuchung über eine Methode zur Berechnung der planetarischen Störungen. Danzig, Bertling in Comm. ½ Thlr.

DRECHSLER, Dr., Die Sonnen- und Mondfinsternisse; Anleitung, wie sie durch Rechnung und Zeichnung zu ermitteln sind. Dresden, Kuntze. 1⅓ Thlr.

VORLÄNDER, J., Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen. Leipzig, Teubner. ½ Thlr.

BAEYER, J. J., Die Verbindungen der preussischen und russischen Dreieckskettten bei Thorn und Tarnowitz. Berlin, Dümmler in Comm. 4½ Thlr.

Bourgeois, M., Mémoire sur la resistance de l'eau au mouvement des corps et particulièrement des bâtiments de mer. Paris, Arthus-Bertrand.

Meyer, A., Essai sur une exposition nouvelle de la théorie analytique des probabilités a posteriori. Anvers. 3 Thlr. 26 Ngr.

Didion, Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles. Paris, Dumaine. 3½ Fr.

Physik.

Die gesammten Naturwissenschaften; bearbeitet von Dippel, Gottlieb, Koppe, Lottner, Mädler etc. Lief. 10—13. Essen, Bädecker. à ⅓ Thlr.

Müller, J., Prof., Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 5. Aufl. Bd. 2. Lief. 5 und 6. Braunschweig, Vieweg & Sohn. à ½ Thlr.

Physikalisches Lexicon. 2. Aufl. bearb. von Cornelius. Lief. 61 und 62. Leipzig, O. Wigand. à ½ Thlr.

Mousson, A., Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. Abtheil. 1. Physik der Materie. Zürich, Schulthess. 1 Thlr. 14 Ngr.

Schering, E., Zur mathematischen Theorie der elektrischen Ströme. Göttingen, Vandenhoeck & Rupprecht in Comm. ½ Thlr.

Feddersen, B. W., Beiträge zur Kenntniss des elektrischen Funkens. Kiel, Schwers. ⅓ Thlr.

Ueger, W. H. Th., Beobachtungen über das geschichtete elektrische Licht und über den Einfluss des Magneten auf dasselbe. Berlin, Springer. 27½ Ngr.

Poggendorf, J. C., Prof., Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Lief. 1. Leipzig, Barth. 2⅔ Thlr.

Du Moncel, Notice historique et théorique sur le tonnerre et les eclairs. Paris, Hachette & Comp.

Du Moncel, Etude du magnétisme et de l'electromagnétisme. Paris, Hachette & Comp. 5 *Fr.*

Forbes, J. D., A Review of the Progress of Mathematical aud Physical science in more recent times. (Edinburgh.) London, Longman. 8 *sh.* 6 *d.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Theorie der Dampfmaschinen. Von Dr. Zernikow. Braunschweig, Vieweg 1857.

Mit dem vielversprechenden Präloquium: „In dem Nachstehenden habe ich eine Theorie der Dampfmaschinen aufgestellt, welche — wie es mir scheint — die jetzt bekannten Theorien über diesen Gegenstand an Tiefe in dem Ursprung, an Umfang in der Entwickelung und an Einfachheit und Genauigkeit in den Endresultaten übertrifft“ kündigt Herr Dr. Zernikow seine „Theorie der Dampfmaschinen“ mit der gleich darauf folgenden Andeutung an, dass er dabei „die Kraft des Dampfes nicht von dem Drucke desselben, sondern von seiner Temperatur, also von der Wärme, als von der ersten Ursache der Dampfbildung, abhängig zu machen gesucht habe.“

Gleichzeitig werden dadurch alle diejenigen zur Einsicht in die vorgelegte Theorie aufgefordert, welche im Besonderen für die Dampfmaschinenlehre Interesse haben, als auch die, welche die Fortschritte der mechanischen Wärmetheorie verfolgten.

Die mechanische Wärmetheorie ist ein Erzeugniss der Deduction, sie ist aufgebaut über einer, aus abstracten Ideen hervorgegangenen Hypothese. Wenn man auch bei dem Bestreben, die Haltbarkeit dieser Hypothese zu prüfen, manche Uebereinstimmungen der aus ihr gezogenen Consequenzen mit physikalischen Phänomenen gefunden hat, so darf man doch nicht verkennen, dass diese Uebereinstimmungen sehr häufig durch nicht ganz einwurfsfreie Nebenannahmen gewonnen wurden und dass man auf der andern Seite, im Falle die Folgerungen jener Hypothese sich trotz der elastischsten Prämissen nicht in die Forderungen der Intuition einzwängen liessen, zu schnell bei der Hand war, die sinnliche Erkenntniss für befangen und die vorhandenen experimentellen Daten als mit Fehlerquellen behaftet zu erklären. Es haben deshalb schon viele Physiker die Hypothese von der Wärme- und Arbeitäquivalenz durch directe Experimente zu prüfen ge-

sucht und vorzüglich ist Regnault, wie er in seinen renommirten Memoiren wiederholt anführt, die speculativen Untersuchungen in der mechanischen Wärmetheorie mit der Erfahrung in Einklang zu bringen beständig bemüht gewesen. Gleichwohl aber hat sich die Schwierigkeit des Problems noch immer dem Erfolge entgegengestellt. Die wenigen Experimente, welche angestellt wurden, sind zu wenig umfangreich und genau, als dass man auf ihnen fussen könnte und man ist daher über die Gültigkeit der, der mechanischen Wärmetheorie als Basis dienenden Hypothese um so weniger ein entscheidendes Urtheil auszusprechen berechtigt, als man über die besondere Form derselben durchaus noch nicht im Klaren, sondern so sehr verschiedener Ansicht ist, dass die Consequenzen daraus bemerkbar weit auseinanderstehen.

Wenn nun trotzdem Herr Dr. Zernikow diese, noch nicht verificirten Principien zu einer Theorie der Dampfmaschinen von beanspruchter, praktischer Brauchbarkeit verwendet, so muss dieses Vorhaben entweder als verfrüht erscheinen, oder man muss vermuthen, Herr Dr. Zernikow habe hinreichend evidente Beweise für die Wirklichkeit jener Hypothese aufzufinden das Glück gehabt.

Lässt man zunächst die Ergebnisse seiner mathematischen Entwickelungen vor den Augen vorüberfliegen, so bemerkt man, dass im letzten Kapitel seiner Schrift die aus der aufgestellten Theorie hervorgegangenen Rechnungsergebnisse vortrefflich mit den aus der Beobachtung resultirenden Werthen harmoniren, findet im 3. Abschnitt eine überaus grosse Einfachheit in den Formeln für die Effectsberechnung der verschiedenen Dampfmaschinensysteme und im 2., welcher das Fundament des Ganzen bildet, indem darin nach der mechanischen Wärmetheorie die Mechanik des Wasserdampfes entwickelt wird, einen mathematischen Nachweis für die Richtigkeit einiger der wichtigsten physikalischen Gesetze. Es ist in diesem Abschnitte bewiesen, dass alle permanenten und condensirbaren, expansibeln Flüssigkeiten denselben Ausdehnungscoefficienten haben, dass die specifische Wärme der Gase und Dämpfe in allen Zuständen derselben constant ist, dass das Product aus den specifischen Wärmen und den Dichten, für dieselben Spannungen genommen, für alle gasförmigen Körper constant ist, oder die specifischen Wärmen gleicher Volume gleich sind und dass das Produkt aus der specifischen Wärme und dem Atomgewicht eine constante Grösse ist.

Alle diese Gesetze, die das sonderbare Schicksal gehabt haben, so häufig verworfen, und wieder anerkannt und wieder verworfen zu werden, gewinnt Zernikow mit Zugrundelegung der Arbeit- und Wärmeäquivalenz durch höchst simpele Rechnungen, man möchte sagen, aus einem preussischen Pfunde Wasserdampf.

Ob die Herleitung dieser Gesetze aus den Grundprincipien der mechanischen Wärmetheorie dazu dienen soll, deren Gültigkeit zu constatiren,

oder ob umgekehrt Z. dieselben als Indicien für die Wirklichkeit der Wärme- und Arbeitäquivalenz-Hypothese auftreten lassen will, kann man nicht genau erkennen. Nach seinen Andeutungen auf Seite 5 zu urtheilen, muss man sich für das letztere entscheiden; Z. muss aber selbst zugestehn, dass die Gültigkeit einiger dieser Gesetze durch neuere, experimentelle Untersuchungen empfindlich angetastet wird und dass z. B. nach den Versuchen Regnault's die Gleichheit der Ausdehnungscoefficienten, welche sich aus seinen Rechnungen ergiebt, gar nicht existirt. Den nothwendigen Conflict, der dadurch für seine Prämissen und Behauptungen entstehen muss, parirt er ganz einfach, indem er Regnault's Experimente für höchst wahrscheinlich mit Fehlerquellen behaftet erklärt, eine Operation, der er sich häufiger im Laufe seiner Entwickelungen bedient, wenn experimentelle Daten nicht in seine Rechnungen passen wollen. Es genügt ihm in diesen Falle, dass der Unterschied in der Grösse der Ausdehnungscoefficienten nach seiner Meinung gering ist und dass (Seite 66) „die Untersuchungen nach dem jetzigen Stande dieses Theils der Wissenschaft nicht characteristisch genug hervortreten (ein inhaltschweres Argument), als dass man sie zu berücksichtigen brauche.“ Z. giebt es also im Grunde genommen auf, durch eine Uebereinstimmung seiner Rechnungsresultate mit experimentellen Daten, die Ausgangspunkte dieser Rechnungen stützen zu wollen; er scheint vielmehr der Meinung zu sein, nachdem er schon auf Seite 2 (wie man glauben muss, vermöge einer ganz besonders glücklichen Begabung für immediate Erkenntniss der Natur) die Ansicht ausgesprochen hat, der Grundsatz von der mechanischen Wärmetheorie wurzele in den einfachsten Erklärungen, die man von Dampf (Gas), Kraftquantität und Wärmequantität geben könne — dass man diesen Grundsatz als Naturgesetz anzunehmen berechtigt sei, da seine Realität durch die Versuche von Joule und Kupfer und die theoretischen Betrachtungen von Holtzmann, Clausius und Anderen, wenn auch nicht auf's Vollständigste bewiesen, so doch sehr gestützt erscheine. Was nun zunächst Prof. Kupfer's Inquisitionen betreffs der mechanischen Wärmetheorie anbelangt, so hat Decher schon (Dingler's polyt. Journ. B. 136, Seite 428, Zeitschrift d. österr. Ingenieurv. 1856. S. 485) genügend darauf hingewiesen, dass sie den Unsinn in der entwickeltsten Blüthe documentiren, wie sich Z. aber von seinem Standpunkte aus auf Holtzmann und Clausius berufen kann, muss um so wunderbarer erscheinen, da die Ansichten und Ergebnisse dieser Gelehrten bezüglich der mechanischen Wärmetheorie gänzlich von den seinigen verschieden sind.

Sieht man nun nach, was Z. eigentlich unter mechanischer Wärmetheorie versteht, so findet man, dass er dieselben Ansichten darüber hat, wie heutzutage so Viele, die Alles mit jenem Namen bezeichnen, was ohne irgend welchen begrifflichen Zusammenhang, dem blossen Wortklange nach, Wärme und mechanische Arbeit in Beziehung bringt.

Nach der ursprünglichen Carnot'schen Idee ist diejenige Wärme-

menge als das Aequivalent für eine mechanische Arbeit zu betrachten, die während der Erzeugung dieser Arbeit von einem warmen zu einem kalten Körper übergeführt wird, ebenso wie umgekehrt diejenige Arbeitsquantität, die für ein Ueberleiten von Wärme aus einem kalten in einen warmen Körper aufgewendet werden muss, als Aequivalent für diese Wärmemenge auftritt. Nach Clausius's Ansicht findet aber neben der Wärmeleitung auch ein Verbrauch von Wärme statt, wenn Arbeit erzeugt wird und die verbrauchte Wärmemenge ist der producirten Arbeitsquantität äquivalent. Beide Ansichten werden durch folgende, von Clapeyron ersonnene und auch von Clausius benutzte, graphische Darstellung sehr anschaulich.*)

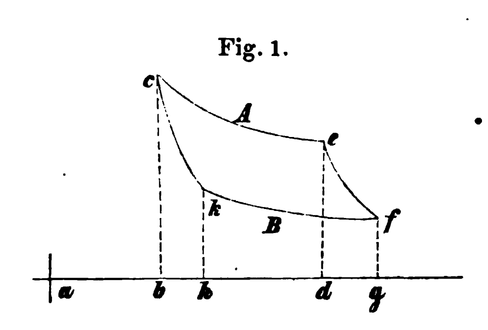


Fig. 1.

Man denke sich in einem ausdehnsamen Gefässe ein Gas, dessen Volumen und Druck durch die Coordinaten ab und bc dargestellt sei. Dieses Gas lasse man, ohne dass durch Abkühlung Wärme aus demselben verschwinde, sich ausdehnen, indem man ihm von einem Körper A so viel Wärme zuführt, dass seine Wärme constant, $= T$ bleibe. Lässt man in dieser Weise das Volumen bis zu ad anwachsen, so wird zufolge des Mariotte'schen Gesetzes die endliche Spannung dc durch die Ordinate eines gleichseitigen Hyperbelbogens ce und die, innerhalb des Volumenintervalles ab und ad verrichtete mechanische Arbeit durch den Inhalt der Fläche $cedb$ dargestellt sein. Entfernt man jetzt den Körper A und lässt das Gas sich noch weiter ausdehnen, so wird der Druck rapider mit der Volumänderung abnehmen und wenn man die Ausdehnung so lange fortsetzt, bis die gleichfalls sich verringernde Temperatur T den Werth t und das Volumen die Grösse ag angenommen hat, so versinnlichen die Ordinaten einer Curve ef die successiven Spannungen, während die durch die Volumänderung erzeugte Arbeit von dem Flächeninhalte der Figur $defg$ anschaulich gemacht wird. Nunmehr werde das Gas zusammengedrückt, indem man es fortwährend mit einem Körper B von constanter Temperatur A in Berührung bringt, so dass dadurch die bei der Compression frei werdende Wärme an den Körper B beständig abgeleitet wird und das Gas seine Temperatur t constant behält. Diese Zusammendrückung geschehe so lange, bis B so

*) *Journ. d. l'école polytechn.* 23 *cah.*, *pag.* 153, *Pogg. Ann.* 59 und 93. Es kann bemerkt werden, dass durch die in *Pogg. Ann.* sich vorfindende Uebersetzung von „*dégager*" in entwickeln, statt in: frei machen der Clapeyron'sche Sinn etwas verdunkelt wird.

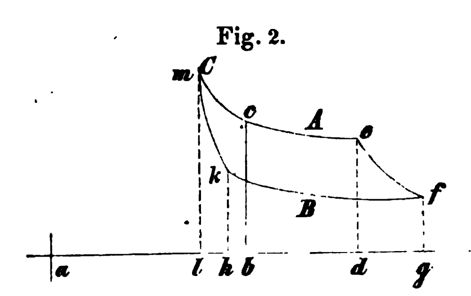
viel Wärme von dem Gase erhalten hat, als es während der ersten Operation von *A* empfing.

Das Volumen sei bis zu der Grösse *ah*, der Druck zu *hk* übergegangen und die, für die Zusammendrückung aufgewendete Arbeit sei durch die Fläche *hkfg* dargestellt. In diesem Zustande, sagt Clapeyron, besitzt das Gas dieselbe absolute Wärmemenge, als im Momente, wo man die Operation anfing und es das Volumen *ab* unter den Drucke *bc* einnahm.

Führt man jetzt fort, das Gas zusammenzudrücken, nachdem man den Körper *B* entfernt hat, so wächst mit der Volumenabnahme die Temperatur, und ist das Volumen wieder $= ab$, so wird auch die Spannung wieder $= bc$ und die Temperatur $= T$ geworden sein, d. h. das Gas in jeder Hinsicht den ursprünglichen Zustand, in welchem es bei Beginn der Operation war, wieder einnehmen. Das Gesetz, nach welchem sich der Druck während dieses letzten Vorganges ändert, wird dargestellt durch die Curve *kc* und die für die Compression aufgewendete Arbeit versinnlicht der Flächenraum *ckhb*. Bei dem ganzen Processe ist die, durch die Figur *bcefg* dargestellte mechanische Arbeit producirt und die durch *gfkcb* dargestellte consumirt; die Differenz beider, also der durch die Curven begrenzte Flächenraum, drückt demnach die Gesammtarbeit aus, welche durch die ganze Operation, also dadurch erzeugt wurde, dass man eine gewisse Wärmequantität von einem Körper *A* zu einem geringer temperirten Körper *B* überführte. Diese Arbeit entstand also durch den Uebergang jener Wärmemenge.

Clapeyron spricht dadurch aus, dass wenn man durch Expansion irgend eines Gases mechanische Arbeit hervorbringt, man dazu keine Wärme aufzuwenden nöthig hat, sondern dass der Wärmeträger nur in einen andern Wärmezustand gebracht werden muss, ohne von seiner Wärmemenge irgend etwas zu verlieren. Es würde also während der Expansion und ebenso während der Compression die Summe der latenten und sensibeln Wärme constant bleiben und im ersten Falle nur mehr latente, im zweiten mehr sensibele Wärme im Gase entstehen, wobei zu bemerken, dass diese Annahme nicht ganz mit dem Carnot-Clapeyron'schen Fundamentalaxiomen im Einklange steht, nach welchem es anzunehmen absurd ist, man könne aus nichts mechanische Arbeit oder Wärme schaffen.

Nach Clausius Ansicht findet ein Verbrauch von Wärme statt, wenn mechanische Arbeit erzeugt wird und demnach kann in dem Momente, wo das betrachtete Gas das Volumen *ah* und die Spannung *hk* angenommen hat, die in demselben enthaltene Wärmemenge nicht so gross sein, als beim Beginn der Operation, da während der Arbeitserzeugung *dgfe* eine gewisse Quantität aus demselben verschwand und die während der Ausdehnung *ce* aus dem Körper *A* aufgenommene Wärme während der Compression *fk* an den Körper *B* wieder abgegeben wurde. Man muss aus diesem Grunde, um die anfängliche Temperatur *T* und die ursprüngliche



Wärmemenge durch fernere Zusammendrückung wieder zu gewinnen, das Gas auf ein geringeres Volumen, als *ab* comprimiren, und um nun den Anfangszustand wieder herbei zu führen, nimmt Clausius noch einen dritten Körper *C* von der Temperatur *T* an, der das Gas während einer schliesslichen, durch die Curve *mc* dargestellten Ausdehnung fortwährend in der Temperatur *T* erhält. Hat sich alsdann das Gas bis zu dem ursprünglichen Volumen wieder ausgedehnt, so muss es, da seine Wärmemenge und seine Temperatur wieder die anfängliche geworden ist, auch die beim Beginn der Operation besessene Spannung *bc* wieder haben. Die durch den Flächenraum *cefkm* dargestellte mechanische Arbeit ist dann als Aequivalent für die vom Körper *C* in das Gas geleitete Wärmemenge zu betrachten; sie ist zur Erzeugung jener Arbeit verbraucht, oder, wie man auch sagen kann, ist in Arbeit verwandelt.

Diese beiden Ansichten von Clapeyron (Carnot) und Clausius bilden die Doppelform der Basis für die mechanische Wärmetheorie. Obgleich man aus beiden Schlüsse gezogen hat, die ihre Realität wahrscheinlich machen, so scheint doch die Clausius'sche Ansicht am meisten Zulässigkeit zu verdienen und fordert um so mehr zu weiterer Prüfung auf, als sie sehr wesentlichen Einfluss auf unsere Erkenntniss von der Physik der Wärme ausübt, als sie die jetzt bestehenden Lehren von derselben in den wichtigsten Theoremen angreift und das Veto über deren Richtigkeit oder Verkehrtheit auszusprechen im Stande sein kann, weshalb sie denn auch von der Mehrzahl der heutigen Gelehrten adoptirt wurde.

Zernikow schliesst sich, ohne es besonders hervorzuheben, keiner dieser beiden Ansichten an, was man, wenn auch nicht aus den nicht ganz eindeutigen Sätzen: „eine bestimmte Kraftquantität wird frei, wenn eine bestimmte Wärmequantität gebunden wird“ und: „dieselbe Wärmequantität repräsentirt bei derselben Art der Wirkung immer dieselbe Kraftquantität“ — so doch aus seinen Rechnungen erkennen kann. Einmal nimmt er nämlich an, dass die Wärmemenge, welche in einem gegebenen Gasquantum enthalten ist, der von dieser Gasmasse beim Ueberströmen in einem Cylinder verwirklichten Arbeitsquantität äquivalent sei, ein andermal, dass man die während der Expansion vom sensibeln in den latenten Zustand übergeführte Wärmemenge als Aequivalent der dabei geleisteten Arbeit anzusehen habe. Diese letzte Anschauungsweise stimmt mit der Carnot-Clapeyron'schen überein, die erste aber hat gar nichts Gemeinsames mit dem Grundprincip von der mechanischen Wärmetheorie, denn die im Gase ent-

haltene Wärmemenge wird während jener Arbeitsverrichtung weder gebunden noch verbraucht — sie scheint allein aus einer irrigen Auffassung der Hypothese von der Wärme- und Arbeitsäquivalenz hervorgegangen zu sein und tritt demnach nicht als eine neue Ansicht auf, deren Unzulässigkeit übrigens leicht darzuthun wäre.

Mit Zugrundelegung dieser Deutung des Aequivalenzsatzes findet Z. die oben angeführten, physikalischen Gesetze; aber nicht allein liefert die Verkehrtheit dieses Ausgangspunktes dieselben, sondern sie werden auch durch Irrthümer erlangt, welche sich im Verlaufe der analytischen Behandlungsweise vorfinden.

Um nun auf diese von der Verkehrtheit der Hauptannahme unabhängigen Irrthümer aufmerksam machen zu können, möge diese Hauptannahme, dass nämlich die im Gase enthaltene Wärmemenge der während des Einströmens verrichteten Arbeit äquivalent sei, vorläufig als einwurfsfrei betrachtet und dann darauf hingewiesen werden, wie mit Zugrundelegung dieser Annahme die Relation zwischen Wärme und Arbeit zu bestimmen sein würde.

Z. findet diese Beziehung (Seite 65), indem er zunächst nach dem Mariotte und Gay-Lussac'schen Gesetze die Arbeitsgrösse bestimmt, welche 1 Pfund Dampf von der Spannung p, der Dichte d und der Temperatur t verrichtet, indem es, fortwährend im Maximum der Dichte bei unveränderlichem Druck einen Kolben bewegt, von dieser Arbeitsgrösse diejenige subtrahirt, welche ein, um 1 Grad geringer temperirtes Pfund Dampf unter denselben Bedingungen hervorbringt, und die erhaltene Differenz der Wärmemenge gleich setzt, welche nach der Regnault'schen Formel das erste Pfund mehr als das zweite enthält. Er findet auf diese Weise, dass, für gleiche Temperaturintervalle die Arbeitsmengen gleich sind und schliesst daraus zufolge seiner besondern Ansicht über die Aequivalenzhypothese, dass demnach auch die Wärmemengen für diese Intervalle gleich gross sein müssen, für welches theoretische Ergebniss er in der Regnault'schen Formel eine empirische Stütze erkennt. Bei der Herleitung dieses Resultates begeht er aber den Irrthum, die anfänglich gestellte Bedingung, dass der Druck während des Einströmens in den Cylinder constant sei, nicht festzuhalten, gelangt deshalb zu einer, für die bezeichnete Wärmemenge zu grossen Arbeit und ausserdem zu einem Werth, dessen Form ihn auf seine verkehrten Folgerungen führt.

Lässt man von einem Kessel oder Reservoir Dampf in den Cylinder strömen, so muss sich nothwendig die Spannung in dem Gesammtraume verringern, oder man muss in den Kessel ein, dem ausgeströmten Dampfe entsprechendes Dampfquantum erzeugen. Strömt 1 Pfund über, so muss aber nicht allein ein anderes Pfund Dampf im Kessel entwickelt werden, sondern noch ein, um den Raum des verdampften Wassers grösseres Quantum, wozu also eine grössere Wärmemenge, als die von Z. in Rechnung gezogene auf-

gewendet werden muss, oder es muss ein neues Pfund Dampf im Kessel erzeugt und gleichzeitig eine, dem verdampften Wasservolumen gleiche Wassermenge in den Kessel geschafft werden, wozu eine Arbeitsgrösse erforderlich ist, die der von Z. bestimmten subtrahirt werden muss, wenn man den Aequivalenzwerth für die von Z. angegebene Wärmemenge auffinden will.

Denkt man sich Kessel und Cylinder zu einen Raum vereinigt, so könnte man diesen Aequivalenzwerth etwa in folgender Weise berechnen.

Man nehme an, es sei in einem Cylinder, in welchem sich ein mit p Atmosphären belasteter Kolben ohne Reibungswiderstand zu erleiden bewegt, 1 Pfund Wasser eingeschlossen, auf dessen Oberfläche der Kolben ruht. Diesem Wasser werde so lange Wärme zugeführt, bis es vollständig in Dampf von der Temperatur t verwandelt ist, was natürlich nur geschehen kann, wenn der ursprünglich vom Wasser eingenommene Raum, der mit v bezeichnet werden mag, in den Raum V, welcher das der Temperatur t und der Spannung p zugehörige Volumen darstellt, übergegangen ist. Die erzeugte mechanische Arbeit ist alsdann, wenn 66 b den Druck einer Atmosphäre auf den preuss. □Fuss bezeichnet:

$$= 66 . b . p (V - v) \text{ Pfundfuss.}$$

Denkt man sich den Cylinder wieder in seinem Anfangszustande, den Kolben aber mit dem grössern Drucke p' belastet und dem Wasser so viel Wärme zugeführt, dass es in Dampf bei der Temperatur t' und der Spannung p' am Ende des Vorganges den Raum V' einnimmt, so ist die hervorgebrachte Arbeit $= 66\, b\, (V' - v)\, p'$.

Die Differenz dieser beiden Arbeiten würde dann, wenn Zernikow's Ansicht richtig wäre, den Arbeitsäquivalenzwerth für diejenige Wärmemenge angeben, welche mehr aufgewendet werden muss, um 1 Pfund gesättigten Wasserdampf von t'^0 zu erzeugen, statt solchen von t^0 hervorzubringen. Setzt man zufolge des M-G-Gesetzes: $\frac{Vp}{1+\alpha t} = k$ und das Volumen $v = \frac{1}{66}$ Cubfuss, so wird:

$$b . 66 [(V_1 - v) p_1 - (V - v) p] = b k \alpha (t' - t) - b (p_{t'} - p_t)$$

wenn $p_{t'}$ und p_t die den Temperaturen t' und t zugehörigen Spannungen bezeichnen und man erhält für $t' = t + 1$

$$b k \alpha - b (p_{t'} - p_t)$$

als das Aequivalent der Wärmemenge, welche mehr aufgewendet werden muss, um ein Pfund gesättigten Dampf von $(t+1)$, statt solchen von t^0 zu erzeugen. Bei einer genaueren Berechnung müsste man noch die Ausdehnung des Wassers und die innere, d. h. diejenige Arbeit berücksichtigen, durch welche die Molecüle des Wassers in die Lage gebracht werden, in welcher sie den dampfförmigen Aggregatzustand constituiren; es

genügt indessen dieser Ausdruck und die Herleitung desselben, um den von Z. begangenen Irrthum erkennen zu lassen.

Durch denselben Irrthum gelangt er zu dem Aequivalenzwerth für die specifische Wärme (Seite 64). Auch in diesem Falle berücksichtigt er die Arbeit nicht, welche zu Erhaltung des constanten Druckes und bei gleichbleibender Temperatur aufgewendet werden muss und welche für 1 Pfund Gas $= \frac{b\,(p - p_0)}{d_0}$ zu setzen ist, wenn p_0 und d_0 Spannung und Dichte des Gases bedeutet. Man würde dann für die Arbeit eines Pfundes in den Cylinder strömenden Gases die Grösse $b\,k\,(1 + \alpha t) - \frac{b}{d_0}\,(p - p_0)$ und für die Wärmemenge, welche zu einer Temperaturerhöhung des Gases um 1° erforderlich ist, den Aequivalenzwerth $b\,k\,\alpha - \frac{b}{d_0}\,(p_{t+1} - p_t)$ erhalten, wobei übrigens noch zu bemerken, dass diese Wärmemenge weder für die specifische Wärme bei constantem Volumen, noch für die bei constantem Druck gelten kann, da das in den Kessel geschaffte Gasquantum nicht nur unter constantem Druck, sondern auch unter constanter Dichte erwärmt wurde, welches Letztere bei Bestimmung der gewöhnlich als solche definirten specifischen Wärme bei constantem Druck nicht geschieht.

Es ist nun auch leicht aus dem Bisherigen zu erkennen, dass der mathematische Nachweis der auf Seite 66 und 68 aufgeführten, physikalischen Gesetze ausser aus der bezeichneten, irrigen Annahme auch aus Rechnungsfehlern hervorgeht.

Abgesehen noch davon, dass der von Z. aufgefundene Arbeitsäquivalenzwerth für die specifische Wärme des Wasserdampfes fehlerhaft ist, kündet sich in der mit (11) bezeichneten Gleichung: $s = b\,k\,\alpha$, worin s die specifische Wärme und $b\,k\,\alpha$ den erwähnten Aequivalenzwerth bedeutet, eine Begriffsverworrenheit von solcher Grösse an, dass man sie dem Verfasser gar nicht zuschreiben, sondern die ganze Gleichung für das Ergebniss einer typographischen Nachlässigkeit halten würde, wenn der Verfasser mit derselben in den nachfolgenden Rechnungen nicht fortoperirte und z. B. auf Seite 72. $b\,k\,\alpha$ wiederum $= s$, auf Seite 75 $s = S$ setzte, indem er „für die Wärmemenge die Kraftquantität substituirt", also Wärmemenge und Arbeitsmenge für identisch ansieht. Offenbar müsste die Gleichung (11) mindestens: $s\,w = b\,k\,\alpha$ geschrieben werden, wenn w den Aequivalenzwerth für die Wärmeeinheit bezeichnet.

Auf den folgenden Seiten entwickelt Z. umständlich genug einen Ausdruck für die, während der Expansion erzeugte Arbeit und findet für eine Expansion von t bis 0° die Arbeit:

$$b\,k\,(1 + \alpha t)\;\mathrm{lnt.}\,\frac{p}{p_0} - b\,k\,\alpha\,t.$$

Seine nächste Absicht ist, aus diesem Ausdruck mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie eine Formel zur Berechnung der Spannkräfte des gesättigten Wasserdampfes aus den Temperaturen desselben abzuleiten. Zu dem Ende setzt er zunächst den oben erwähnten Ausdruck der Arbeit gleich, welche aus dem Dampfe beim Uebergange von t^0 bis 0^0 verschwindet. Diese Arbeit ist, da er früher gefunden hat, dass 1 Pfund Wasserdampf für jeden Grad Temperaturverminderung eine constante Arbeitsmenge weniger enthält, für die bei obiger Expansion stattfindende Temperaturabnahme um $t^0 = St$, wenn S die Arbeitsmenge pro Grad bezeichnet; da er ferner gefunden hat, dass die Arbeitsmenge, welche 1 Pfund Dampf mehr besitzt, als ein um 1^0 geringer temperirtes Pfund Dampf, $= bk\alpha$ ist, so setzt er auch $bk\alpha = S$ und erhält demnach:

$$St = bk(1 + \alpha t) \, lognt. \frac{p}{p_0} - St \text{ oder } S = \frac{bk(1+\alpha t)}{2t} \, lnt. \frac{p}{p_0},$$

für eine andere Temperatur t' und Spannung p' ist dann ebenso:

$$S = \frac{bk(1 + \alpha t')}{2t'} \, lnt. \frac{p}{p_0}$$

und durch Vereinigung dieser Ausdrücke:

$$p = p_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t} \cdot \frac{t}{t'}}$$

eine Formel, die zur Berechnung der Spannkräfte aus den Temperaturen benutzt werden kann. Diese Formel, die schon von Holtzmann auf anderem Wege gefunden wurde und unter der Annahme von $\alpha = \frac{1}{236{,}22}$ Werthe liefert, die gut mit der Erfahrung harmoniren (siehe Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe von C. Holtzmann, Seite 19), findet aber bei Z. keinen Beifall. Er hat, wie schon bemerkt, auf Seite 68 gefunden, dass der Wasserdampf mit allen Gasen gleichen Ausdehnungscoefficienten hat, nimmt diesen zu 0,003665 an und sucht nun nachzuweisen, dass es nicht an der Unrichtigkeit dieses Coefficienten liege, wenn obige Formel bei Anwendung desselben nicht mit der Erfahrung übereinstimmende Werthe liefere, sondern daran, dass Holtzmann das Watt'sche Gesetz, der Dampf besitze bei allen Temperaturen gleiche Wärmequantität und das de Pambour'sche, der Dampf bleibe bei der Expansion im Maximum der Dichte als gültig annimmt. Er glaubt aus dem Regnault'schen Ausdruck für die, im Dampfe enthaltene Wärmemenge, nämlich: $a = b + nt$ folgern zu müssen, dass bei der Temperaturverminderung des Dampfes um 1^0 während der Expansion 1 Wärmeeinheit gebunden, und dem Dampfe noch n Wärmeeinheiten entzogen werden müssten, wenn er bezüglich der verminderten Temperatur im Zustande der Sättigung bleiben solle. Diesen Ansichten gemäss gelangt er zu einer von ihm für genauer gehaltenen Formel

durch, wie man wenigstens aus seinen Rechnungen erkennt, folgende Reihe von Schlüssen.

Die erzeugte Arbeitsmenge $bk(1+\alpha t)\,lnt.\frac{p}{p_0}-bk\alpha t$ wurde der aus dem Dampfe verschwundenen : St gleichgesetzt; diese verbrauchte Arbeitsmenge ist aber nur dann $= bk(1+\alpha t)\,lnt\,\frac{p}{p_0}-bk\alpha t$, wenn der Dampf bei jeder Temperaturabnahme um 1° eine sensibele Wärmeeinheit bindet. Da demselben aber, ausser dass eine Wärmeeinheit gebunden wird, noch n Wärmeeinheiten durch Abkühlung entzogen werden müssen, sofern er im Maximum der Dichte bleiben soll, so wird, wenn diese n Wärmeeinheiten nicht verloren gehen, von denselben noch eine Arbeitsmenge erzeugt, die der früher gefundenen: $bk(1+\alpha t)\,lnt\,\frac{p}{p_0}-St$ addirt werden muss, wenn man den wahren Werth für St erhalten will. Oder auch mit andern Worten: Ginge der Dampf, wie es Holtzmann annimmt, bei der Expansion vom gesättigten in den ungesättigten Zustand über, so würde der obige Ausdruck: $bk(1+\alpha t)\,lnt\,\frac{p}{p_0}-bk\alpha t$ richtig sein; da er sich aber, indem er seine Temperatur um 1° vermindert, um n Wärmeeinheiten während der Expansion überhitzt, so entwickelt er auch eine, um das der Wärmemenge n entsprechende Arbeitsäquivalent grössere Arbeitsmenge und diese muss dem obigen Ausdrucke addirt werden, wenn man denselben derjenigen Arbeitsquantität gleichsetzen will, welche aus dem Dampfe durch Expansion verschwindet und dieser fortwährend im Zustande der Sättigung bleibt. Es wird dann (Seite 84)

$$St = -St + bk\left[1+\alpha\left(\frac{n}{p}+1\right)t\right] lnt.\frac{p}{p_0} \text{ und}$$

$$p = p_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\left[\frac{1+\alpha\left(\frac{n}{s}+1\right)t'}{1+\alpha\left(\frac{n}{s}+1\right)t}\right]\frac{t}{t'}}.$$

Es ist nun aber nicht allein diese Zernikow'sche Argumentation, sondern auch die Rechnung, welche er zufolge derselben anstellt, durchaus verkehrt. Zuerst ist das Durcheinanderwürfeln von verschiedenen Grössen, denen er gleiche Bezeichnung gegeben hat, der Träger einer gründlichen Confusion, die in weiterer Instanz in den unklaren Begriffen über die Arbeitäquivalenz-Hypothese ihre Quelle hat. Mit der Ansicht, die im Dampfe enthaltene Wärme repräsentire eine äquivalente Arbeitsmenge und das Entziehen einer gewissen Wärmequantität habe demnach eine äquivalente Verminderung des Arbeitsvermögens zur Folge, findet Z. einen Ausdruck für die specifische Wärme, d. h. für diejenige Wärmemenge, welche, wie er selbst definirt, 1 Pfund Dampf aufnehmen muss, damit seine Tempera-

tur um 1° steigt. Er bezeichnet das Arbeitsäquivalent dieser Wärmemenge mit S. In der angeführten Rechnung nimmt er nun auf einmal diejenige Wärmemenge, welche vom sensibeln in den latenten Zustand übergeht, indem der Dampf während der Expansion seine Temperatur um 1° vermindert die specifische des Dampfes und setzt demzufolge diese latentgewordene Wärme einer gleichgrossen, aus dem Dampfe verschwundenen gleich, indem er für das Arbeitsäquivalent der ersten dieselbe Bezeichnung einführt, die er früher dem Arbeitsäquivalent der verschwundenen gab. Ferner bezeichnet er einmal mit S diejenige Arbeitsmenge, welche der Dampf bindet, indem er während der Expansion seine Temperatur um 1° vermindert und ein anderes Mal, indem derselbe seine Temperatur um eben soviel verringert und ihm ausserdem noch n Wärmeeinheiten entzogen werden, verwendet diese Grössen, obgleich er ihnen verschiedene Namen giebt und die 3 verschiedenen Werthe:

$$S = bk\alpha = 150,2 \quad \text{(Seite 64, Gleichung 11)}$$

$$S = \frac{bk(1+\alpha t)}{2t}\, lnt.\, \frac{p}{p_0} = 1430 \quad \text{(Seite 76)}$$

$$S = \frac{bk}{2t}\left[1 + \alpha\left(\frac{n}{\beta} + 1\right)t\right] lnt.\, \frac{p}{p_0} = 1502 \quad \text{(Seite 84)}$$

herausbringt, wahrscheinlich bloss wegen ihrer äusseren Erscheinung als gleichbedeutend und bildet daraus, ohne die Confusion zu bemerken, auf Seite 104 das Raisonnement: „Eine verbrauchte Wärmeeinheit entwickelt bei der Expansion das Zehnfache von der Kraft, welche nutzbar gemacht wird, wenn der Dampf nicht durch Expansion wirkt.“

Er legt also einer gewissen Wärmemenge eine verschieden grosse Wirkung unter, je nachdem dieselbe bei diesem oder jenem Vorgange verbraucht wird; wie passt das zu dem Princip von der Wärme- und Arbeitsäquivalenz?

Ferner hätte er doch in der angeführten Rechnung wenigstens schliessen sollen, dass, wenn St die Arbeitsmenge bezeichnet, welche aus dem Dampfe verschwindet, indem derselbe von t^0 zu 0^0 übergeht und fortwährend gesättigt bleibt (Seite 84), demselben also $n.t$ Wärmeeinheiten entzogen werden, die diesen nt Wärmeeinheiten entsprechende Arbeitsgrösse dem Ausdruck $bk(1+\alpha t)\, lnt\, \frac{p}{p_0} - bk\alpha t$ subtrahirt, statt addirt werden müssen; denn lässt man den Dampf expandiren, ohne ihm Wärme zu entziehen, so verrichtet er während des bezeichneten Temperaturintervalles die Arbeit $bk(1+\alpha t)\, lnt.\, \frac{p}{p_0} - bk\alpha t$, soll er aber dabei im Zustande der Sättigung bleiben, so müssen ihm nt Wärmeeinheiten entzogen werden und es ist demnach die hervorgebrachte Arbeit um die Arbeitsmenge, welche den nt Wärmeeinheiten entspricht, kleiner als obiger Ausdruck.

Wenn nun Z. trotz dieser Irrthümer die von Holtzmann auf andere

Weise erhaltene Formel und auf Seite 85 eine zweite Formel erhält, die, wie die auf Seite 89 angeführte Tabelle zeigt, mit der Erfahrung gut zusammenstimmende Werthe liefert, so liegt das einerseits in dem für Z. günstigen, oder wenn man will auch ungünstigen Umstande, dass sich einige der begangenen Fehler in den spätern Rechnungen neutralisiren und andererseits in der sehr willkührlichen Wahl des numerischen Werthes für $\frac{n}{s}$ (Seite 84).

Er nimmt diesen Werth zu 0,184 an und motivirt diese Wahl, indem er sagt, es seien noch keine genauen Versuche zur Bestimmung von n und s angestellt, mit diesem Werthe stimmen aber die Ergebnisse der Formel gut mit den Versuchsresultaten überein. Hätte er aber nicht consequentermaassen $\frac{n}{s} = 1$ setzen müssen, da er doch aus seinen theoretischen Untersuchungen gleich im Anfange auf Seite 68 das Theorem findet, „dass die specifische Wärme des Dampfes bei constantem Volumen dem constanten Werthe gleich sein müsse, um welchen die Wärmemenge des gesättigten Wasserdampfes grösser wird“ (wenn nämlich die Temperatur dieses Dampfes um 1° wächst)? Ferner nimmt er bei andern Rechnungen $n = 0{,}305$ als richtig an, findet auf Seite 100 das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit zu 1151 Fusspfund und müsste demnach (zufolge Gleichung 11 auf Seite 64, wenn dieselbe berichtigt wird) $s = \frac{bk\alpha}{1151} = \frac{150{,}2}{1151} = 0{,}130$ und $\frac{n}{s} = \frac{305}{130} = 2.35$ setzen.

Unter den Annahmen: dass während der Expansion keine Wärme aus den Dampfe verschwindet, sondern nur vom sensibeln in den latenten Zustand übergeführt wird; dass die Wärmemenge des Dampfes mit der Temperatur variirt, und: dass sich der Dampf nach dem *M*-*G*-Gesetze ausdehnt, ist der Schluss von einer, während der Expansion stattfindenden Ueberhitzung allerdings logisch — es wird dieser Schluss unter denselben Annahmen auch schon von Regnault, wenn ich nicht irre in der Einleitung zu seiner *Relation des expériences* gemacht; es ist gleichfalls als logisch zu bezeichnen, wenn Z. auf Seite 99 aus jenen Annahmen folgert, dass bei der, während der Expansion stattfindenden Temperaturverminderung um 1° eine Wärmeeinheit gebunden wird — wie kommt er nun aber ein anderes Mal (Seite 76) auf den Schluss, dass während jener Temperaturverminderung die specifische Wärme gebunden werde?

Wäre er der Clausius'schen Ansicht, vom Verbrauch der Wärme bei Erzeugung von mechanischer Arbeit gefolgt, hätte er also angenommen, dass die n Wärmeeinheiten in Arbeit verwandelt würden, so würde er auch unter der von Holtzmann abweichenden Annahme, dass die Wärmemenge mit der Temperatur variirt, auf die Holtzmann'sche Formel gekom-

men sein. Ist nämlich $bk(1+\alpha t)\,lnt\,\frac{p}{p_0}-bk\alpha t$ die Arbeit, welche von 1 Pfund, von t bis 0 Grad sich expandirendem Dampfe hervorgebracht wird, so ist diese Arbeit dem Aequivalenzwerth derjenigen Wärmemenge gleich zu setzen, welche während jenes Temperaturintervalls aus dem Dampfe verschwindet. Diese Wärmemenge ist nach der Regnault'schen Formel $(a=b+nt)=nt$; bezeichnet daher w das Arbeitsäquivalent für die Wärmeeinheit, so wird:

$$w\,nt=bk\,(1+\alpha t)\,lnt\,\frac{p}{p_0}-bk\alpha t$$

$$w\,nt'=bk\,(1+\alpha t')\,lnt\,\frac{p}{p_0}-bk\alpha t,$$

und durch Vereinigung beider Gleichungen:

$$p=p_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t}\cdot\frac{t'}{t}}.$$

Diese Formel, die schon früher von Magnus und Anderen zur Berechnung der Dampfspannungen angegeben wurde, hat Holtzmann veranlasst, den auf das Volumen bei 0° bezogenen Ausdehnungscoefficienten $\alpha=\frac{1}{236{,}22}$ anzunehmen, weil sie dann mit der Erfahrung gut übereinstimmende Werthe liefert (siehe Holtzmann's Brochüre Seite 21). Es ist aber nicht zu übersehen, dass der hier angeführten Herleitung derselben die Voraussetzungen zu Grunde liegen: der Dampf bleibe während der Expansion fortwährend gesättigt: die bei 1° Temperaturverminderung verschwundene Wärmemenge sei gerade zu der geleisteten Arbeit verbraucht: die innere Arbeit dürfe vernachlässigt werden und: der Dampf folge bei der Ausdehnung dem *M-G*-Gesetze. Diese Voraussetzungen werden aber schon seit längerer Zeit mit Grund als unzulässig betrachtet. Regnault spricht sich z. B. über die Anwendbarkeit des *M-G*-Gesetzes auf Wasserdampf in folgender Weise aus: „Man berechnet die Dichtigkeiten des gesättigten und nicht gesättigten Dampfes gewöhnlich unter der Annahme, dass für constante Temperaturen das Mariotte'sche Gesetz darauf Anwendung finde und die Volume des nicht gesättigten Dampfes unter der Voraussetzung, dass sich bei constantem Druck aber verschiedenen Temperaturen der Dampf bei irgend welcher Dichte für jeden Temperaturgrad um denselben Bruchtheil seines Volumens bei 0° ausdehnt, um welchen für ein gleiches Temperaturintervall sich die atmosphärische Luft dilatirt, wenn sie die unter dem Drucke einer Atmosphäre besitzende Dichtigkeit hat. Aber die verschiedenen Untersuchungen, welche ich in dieser Reihe von Memoiren veröffentlicht habe, machen es sehr wahrscheinlich, dass diese Hypothesen bedeutend von der Wirklichkeit abweichen, und es wird daher durchaus nothwendig,

durch directe Versuche diese Relationen mit Sicherheit festzustellen." (*Relation des expériences*, *pag.* 724, *Pogg. Ann.* 78, *pag.* 560.)

Ferner findet Clausius, der ohne Zugrundelegung des M-G-Gesetzes das Verhalten des Dampfes bei der Expansion untersucht, dass derselbe nicht in dem durch das M-G-Gesetz bezeichneten Zustand der Sättigung bleibt, dass er sich aber auch nicht überhitze, sondern dass sich ein Theil desselben condensire. (*Pogg. Ann.* 97, *pag.* 441.) Clausius stellt auf Seite 461 der citirten Abhandlung einige aus seinen Rechnungen sich ergebende Werthe für die Gewichtsmenge Dampf m zusammen, die eine ursprünglich im Cylinder befindliche Masse Dampf M für verschiedene Temperaturen annimmt, wenn sich derselbe von 15° bis 25° ausdehnt; diese Werthe sind für $M = 1$

bei	150°	125°	100°	75°	50°	25°
$m =$	1	0,956	0,911	0,866	0,821	0,776

Dieses Verhalten des Dampfes leitet Clausius durchaus streng aus der Hypothese von der Aequivalenz der Wärme und mechanischen Arbeit mit der einzigen für diesen Fall ohne Bedenken zu gestattenden Nebenannahme ab, dass die specifische Wärme des Wassers für alle Temperaturen constant sei. Ref. ist der Meinung, dass diese Ergebnisse und ihre einwurfsfreie Herleitung, alle weitere Speculation über diesen Gegenstand zurückhaltend, nur zu experimenteller Prüfung auffordern können und muss sich daher um so mehr wundern, dass Z., der doch, wie er mehrfach anführt, mit Clausius Arbeiten bekannt war, mit seinen eignen Ansichten noch hervortreten konnte, anstatt sie mit allem Ballast ohne Besinnen über Bord zu werfen. Zernikow scheint indessen die sehr genaue Uebereinstimmung des von ihm abgeleiteten Aequivalenzwerthes für die Wärmeeinheit mit dem von Joule experimentell bestimmten als ein sehr merkbares Indicium für die Richtigkeit seiner Ansichten und mathematischen Inquisitionen anzusehen. Diese genaue Uebereinstimmung besteht darin, dass er jenen Aequivalenzwerth zu 361 findet, während ihn Joule zu 421 Kilogrammeter, also circa $\frac{7}{6}$ mal so gross angiebt. Z. leitet diesen Aequivalenzwerth aus der Expansionswirkung des Dampfes und der dabei latent werdenden und entzogenen Wärmemenge ab, die er, wie schon bemerkt, zu 1,305 Wärmeeinheiten annimmt. Hätte er ihn aus den Daten bestimmt, die er an einem früheren Orte seiner Schrift auffindet, dass nämlich eine Wärmemenge von 0,305 Wärmeeinheiten dem Arbeitswerth 150,2 Fusspfund als Aequivalent angehört, so würde derselbe sich zu 492 Fusspfund, oder für die französische Wärmeeinheit zu 155 Kilogrammeter, also ungefähr 64 p. c. vom Joule'schen verschieden sich ergeben haben. Gleichwohl legt er den Werth 361 Kilogrammeter oder 1151 Pfundfuss seinen spätern Rechnungen zu Grunde, wenn derselbe auch „etwas kleiner ist" als der von Joule gefundene, was nach seiner Meinung einerseits den mit Fehlerquellen behafteten Versuchen

Joule's, andernseits den noch nicht vollständig normirten Regnault'schen Coefficienten 0,305 zur Last zu legen ist.

Wenn nun Zernikow seine hierauf folgende Theorie der Dampfmaschinen auf diese so verkehrt bestimmten Werthe für die Dampfwirkung stützt, so kann das Urtheil über diese Theorie nicht länger mehr in Frage gestellt werden; es sei indessen kurz referirt, wie er den vorliegenden Stoff tractirt.

Vorläufig absehend von den besondern Dimensionen und Bewegungsverhältnissen der Dampfmaschinen bestimmt er die Wirkungsgrösse, welche die Masseneinheit Dampf bei den verschiedenen Maschinensystemen hervorbringt, indem er üblichermaassen von der, ohne Berücksichtigung von Verlusten berechneten Wirkungsgrösse des Dampfes die durch Abkühlung etc. entstehenden Arbeitsverluste subtrahirt.

Bei den Expansionsmaschinen ergiebt sich die, ohne Berücksichtigung dieser Verluste entstehende Wirkung als eine Summe aus der Arbeitsmenge vor und während der Expansion. Gegen die Richtigkeit der Berechnung dieser ersten Arbeitsmenge ist nichts einzuwenden, wenn die Gültigkeit des *M*-*G*-Gesetzes für Wasserdampf nicht bezweifelt und die Dampfspannung während dieses ersten Vorganges als constant angenommen wird, da der Werth: $bk(1+\alpha t)$ oder, wenn man die Temperaturgrade vom absoluten Nullpunkt anstatt vom Thaupunkt rechnet, $bk\alpha T$ nach dem *M*-*G*-Gesetze dem Producte aus Spannung und dem Volumen der Masseneinheit gleich ist, also die Arbeitsmenge bezeichnet, welche 1 Pfund Dampf bei constantem Drucke im Cylinder, ohne Berücksichtigung des schädlichen Raumes etc. hervorbringt. Es steht übrigens dieser Ausdruck in gar keiner Beziehung zu der mechanischen Wärmetheorie, sondern ist der directe Ausspruch des *M*-*G*-Gesetzes, weshalb denn auch die Pambour'schen Formeln für Maschinen ohne Expansion, wenn man statt der Spannungen und Dichten die durch das *M*-*G*-Gesetz gegebene Temperaturfunction einführt, vollständig mit den Zernikow'schen übereinstimmen, ohne diese Umformung aber, also in ihrer ursprünglichen Gestalt den Vortheil einer bequemen, numerischen Behandlung gewähren, was allerdings auf den ersten Blick nicht so erscheinen könnte, da die technischen Unbeholfenheiten der Zernikow'schen Formeln etwas verdeckt sind.

Bei Berechnung der Expansionswirkung nimmt Z., seinen früheren Entwickelungen gemäss an, dass der Dampf für jeden Grad, durch Ausdehnung entstehender Temperaturverminderung eine gleich grosse Arbeitsquantität hervorbringe und da er voraussetzt, dass der Dampf während der Expansion fortwährend im Maximum der Dichte bleibe, so verwendet er für seine Berechnung den auf Seite 98 gefundenen Werth für die Wirkungsgrösse eines vom gesättigten in den ungesättigten Zustand übergehenden Pfundes Dampf. Der Dampf würde nach Z's früher ausgesprochenen Ansichten sich eigentlich überhitzen; da aber von demselben stets tropfbare Flüs-

sigkeit übergerissen wird, so nimmt Z. eine Verdampfung dieses übergerissenen Wassers durch die, nach seiner Ansicht bei der Expansion frei werdende Wärme und demnach ein beständiges Gesättigtsein des Dampfes an. Es müssen daher die von ihm berechneten Grössen für die während der Expansion erzeugte Wirkungsmenge von 1 Pfund Dampf um den, der Gewichtsmenge des im Cylinder verdampften Wassers entsprechenden Arbeitwerth zu klein sein, oder wenn er, anstatt von der in den Cylinder strömenden Dampfmasse, von der im Kessel durch Verdampfung verschwundenen Wasserquantität ausgeht, die Wirkungen vor der Expansion zu gross sich ergeben. Zugestanden aber, dass trotzdem die Ergebnisse der numerischen Berechnung hinreichende Approximation liefern könnten, so ist doch die ganze Berechnungsweise der Expansionswirkung verkehrt, wie oben genugsam auseinandergesetzt wurde.

Die Widerstände und Arbeitsverluste behandelt Z. möglicht cavalierement. Ueberhaupt berücksichtigt er von denselben nur die Temperaturverminderung des Dampfes durch das Ueberströmen vom Kessel in den Cylinder, den Einfluss des schädlichen Raumes und den Gegendruck des verbrauchten Dampfes und auch diese nur im groben Ganzen. Die Temperaturverminderung berechnet er aus der Grösse der Abkühlung, welche der Dampf im Verbindungsrohre zwischen Kessel und Cylinder erfährt und aus der mechanischen Arbeit, welche der beim Einströmen in den Cylinder stattfindenden Geschwindigkeit entspricht, indem er ein, nur für ganz rohe Abschätzung zulässiges Abkühlungsgesetz anwendet und für die andere Ursache der Temperaturverminderung höchst willkürliche Annahmen macht. Er berechnet nämlich für diesen letzten Fall die Temperaturverminderung aus der lebendigen Kraft, die dem Dampfe bei dessen Geschwindigkeit in den Cylindercanälen zukommt und wählt wahrscheinlich gerade diese Geschwindigkeit, weil sie ohne Rücksicht auf den veränderlichen Stand des Schiebers und der Admissionsklappe die grösste ist, mit welcher sich zufolge der gewöhnlichen Dampfmaschinendimensionen der Dampf beim Uebertritt vom Kessel in den Cylinder bewegt. Offenbar ist das aber verkehrt und statt dieser Geschwindigkeit müsste die des Kolbens in Rechnung gezogen werden, da aus der Vernichtung der lebendigen Kraft, welche dem Uebergange aus der Canalgeschwindigheit in die Kolbengeschwindigkeit entspricht, eine nothwendige Temperaturerhöhung hervorgeht. Uebrigens liefern die Versuche Joule's über das Ueberströmen von Gasen aus einen in einen andern Behälter Ergebnisse, welche zu ganz entgegengesetzten Folgerungen nöthigen. Wird ein Gas von einem Gefäss in ein anderes übergeführt, so findet Joule, dass das Gas in letzterm nicht geringer, sondern höher temperirt ist, als das im ersten, sobald sich in beiden die Drücke ausgeglichen haben, dass die Gesammttemperatur aber dieselbe bleibt, und es lässt sich bezüglich der mechanischen Wärmetheorie hieraus schliessen, dass die Wärmemenge, welche bei der durch Dilatation im ersten Gefässe

stattfindenden Erzeugung von mechanischer Arbeit verschwand, durch Compression des Gases im zweiten Gefässe wiedergewonnen wurde.

Z. fährt nun fort, mit ganz rohen Annäherungsannahmen die weitern Beziehungen für die Dampfmaschinen aufzufinden; es wird indessen unnöthig sein, seine Rechnungen noch länger zu verfolgen, da der Werth seiner Arbeit genugsam aus dem Bisherigen erhellen muss.

Referent würde es nicht tadelnswerth finden, dass Z. seinen Entwickelungen so häufig Annahmen unterlegt, die nur von Weitem mit der Wirklichkeit zusammenstimmen, wenn derselbe allein die Absicht hätte, Rechnungsregeln aufzustellen, die wegen mangelnder, experimenteller Grundlagen nicht genauer zu erlangen wären; aber Z.'s Vorhaben ist, den vorliegenden Stoff strenger wissenschaftlich zu behandeln, als es bis jetzt geschah. Er will die alte Pambour'sche Theorie nicht deshalb verdrängen, weil sie weniger genau in ihren Ergebnissen ist, als die seinige, sondern weil sie ihm zu wenig sublim erscheint. „Vom practischen Standpunkte aus", meint er auf Seite 19, „lässt sich gegen die Resultate der de Pambour'schen Theorie wenig einwenden, da die empirische Formel, welche der Theorie zur Grundlage dient, ziemlich einfach ist, da die Entwickelung von dort aus tadellos fortschreitet und da die erhaltenen Rechnungsresultate mit den Werthen, welche sich aus den Versuchen ergeben haben, gut übereinstimmen, aber vom wissenschaftlichen Standpunkte aus lässt sich sehr Vieles gegen die de Pambour'sche Darstellung einwenden und vor allen Dingen, dass die Ableitungen zwar Regeln liefern, aber nie eine Theorie bilden können."

Bei diesem sonst lobenswerthen Drange nach grösserer Wissenschaftlichkeit sieht man nicht recht ein, weshalb sich Z. an seiner eigenen Theorie mehr befriedigen konnte, als an der schon 1856 in *Pogg. Ann.* (B. 97, Seite 441) von Clausius veröffentlichten, oder wenn ihm diese Theorie weniger streng dünkte als die seinige, wenn er Clausius Ansichten nicht theilte, oder ihm dessen analytische Behandlungsweise nicht einwurfsfrei erschien, weshalb er dann seine Einwände dagegen nicht ebenso kund gab, als die gegen die andern von ihm critisirten Theorien.

Es scheint indessen, als wenn Z. deshalb seiner Arbeit den Stempel grösserer Wissenschaftlichkeit aufzudrücken sich bewogen fühlte, weil er darin die mathematische Herleitung einer Formel zur Berechnung der Dampfspannungen liefert. Diese Formel betrachtet er, wie Ref. vermuthen zu müssen glaubt, als den Schwerpunkt des ganzen, von ihm errichteten theoretischen Gebäudes, als den Brennpunkt, in welchem die von der „Tiefe des Ursprungs" ausfliessenden Strahlen zu einem hell leuchtenden Funken sich concentriren, der die intellectuelle Welt mit seinem Glanze überströmt. In welchem Verhältnisse die Herleitung jener Formel zu einer streng wissenschaftlichen gehört, ist schon früher aufgedeckt worden.

Schlüsslich mag noch bemerkt werden, wie Z. auf viel geraderem und

einfacherem Wege zu einer Formel für die Effectsberechnung der Dampfmaschinen mit seinen Annahmen gelangen, und wie er, würde er diesen Weg eingeschlagen haben, hätte erkennen können, dass seine Ansichten und Berechnungen auf Verkehrtheit gegründet sind.

Die Grösse $bk\alpha$ ist das Aequivalent für die Wärmemenge, um welche 1 Pfund gesättigter Dampf von $(t+1)^0$ ein anderes von t^0 übertrifft, also für 0,305 Wärmeeinheiten (Seite 65). Demnach ist das Aequivalent der Wärmeeinheit $= \frac{bk\alpha}{0,305}$. Nimmt man nun an, der Dampf bleibe während der Expansionswirkung in den Dampfmaschinen fortwährend gesättigt (Seite 98 und 123) und beim Uebergange eines Pfundes Dampf von t^0 zu $(t-1)^0$ würde 1 Wärmeeinheit gebunden, also, wenn der Dampf fortwährend gesättigt bleiben soll, auch 1 Wärmeeinheit zu mechanischer Arbeit verwendet, so wird während der Expansion von 1 Pfund Dampf für jeden Grad Temperaturverminderung eine Arbeitsmenge von $\frac{bk\alpha}{0,305} = \frac{150,2}{0,305} = 402, \ldots$ Fusspfund nutzbar gemacht — ein aus den Annahmen und Rechnungsresultaten Z.'s durchaus folgerecht abgeleitetes Ergebniss, das in Gemeinschaft mit den frühern dazu dienen kann, den Werth der Zernikow'schen Arbeit von der richtigen Seite zu beleuchten.

Dresden.

Dr. Weiss, Assistent a. d. polyt. Schule.

Die aufsteigenden Kettenbrüche. Eine Zugabe zu allen Lehrbüchern der Arithmetik, von Alfred Kunze, Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Eisenach. Weimar, Hermann Böhlau.

Den gewöhnlichen Kettenbrüchen stellt der Verfasser die aufsteigenden Kettenbrüche gegenüber, bei denen jeder Zähler aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, dessen Zähler wieder die nämliche Beschaffenheit hat. Diese neuen Kettenbrüche, welche, dem Gesagten zufolge, nach dem Schema

$$\cfrac{\alpha + \cfrac{\beta + \cfrac{\gamma + \cfrac{\delta + \ldots}{d}}{c}}{b}}{a}$$

gebildet sind, hatten bisher noch keine Beachtung gefunden und es war daher ein guter Gedanke, sie näher zu untersuchen. Der Verfasser giebt zunächst Methoden an, um gewöhnliche Brüche in aufsteigende Ketten-

brüche zu verwandeln, deren Zähler $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sämmtlich der Einheit gleich sind, entwickelt hierauf die Eigenschaften der Näherungsbrüche und gelangt bei dieser Gelegenheit zu dem Satze, dass der obige Kettenbruch in die Reihe

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \frac{\gamma}{abc} + \frac{\delta}{abcd} + \dots$$

umgesetzt werden kann. (Diese Haupteigenschaft ist auch auf dem Titel in rothem Drucke angegeben.) Hieran knüpft sich die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades mittelst derartiger Kettenbrüche; zum Schluss werden mehrere unendliche Kettenbrüche betrachtet, deren Werthe theils durch Summirung der erwähnten gleichgeltenden Reihe, theils auf anderem Wege bestimmbar sind.

Dieser Inhaltsangabe wollen wir noch einen Satz hinzufügen, welcher dem Verfasser entgangen ist und der wenigstens in so fern Interesse gewährt, als er den Zusammenhang zwischen den aufsteigenden und den absteigenden Kettenbrüchen aufdeckt; der obige Kettenbruch ist nämlich identisch mit dem folgenden

$$\cfrac{\alpha}{a - \cfrac{a\beta}{b\alpha + \beta - \cfrac{b\alpha\gamma}{c\beta + \gamma - \cfrac{c\beta\delta}{d\gamma + \delta - \cfrac{d\gamma\varepsilon}{e\delta + \varepsilon - \dots}}}}}$$

wie man leicht findet, wenn man die vorhingenannte Reihe nach bekannten Methoden in einen absteigenden Kettenbruch verwandelt. Aus diesem Satze erklärt es sich hinreichend, dass die Näherungsbrüche der aufsteigenden Kettenbrüche ganz ähnliche Eigenschaften besitzen wie die Näherungsbrüche der aus negativen Gliedern zusammengesetzten absteigenden Kettenbrüche.

Schlömilch.

Bibliographie

vom 1. März bis 1. Juni 1858.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem. naturwissenschaftl. Classe. 25. Bd., 2 Heft. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 1 Thlr. 4 Ngr.

Dasselbe. 26. Bd. Ebendas. 3 Thlr. 17 Ngr.

— 27. „ 1. Heft. Ebendas. 1 Thlr. 27 Ngr.

Monatsberichte der K. P. Akademie der Wissenschaften in Berlin. Jahrg. 1858. 1. Heft. Berlin, Dümmler in Comm. pro compl. 1⅓ Thlr.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. 6. Bd. 1. Heft. Danzig, Anhuth. 1⅓ Thlr.

Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Mathem. phys. Classe. Jahrgang 1857. 2. und 3. Heft. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Redig. von. R. Wolf. 3. Jahrg. (1858) 1. Heft. Zürich, Höhr. pro compl. 3 Thlr.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Redigirt von M. Schultze. 4. Band, 2. und 3. Heft. Halle, Schmidt. 4 Thlr.

Würtembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte. 13. Jahrg., 3. Heft. Stuttgart, Ebner & Seubert. ⅔ Thlr.

Annalen der K. Sternwarte bei München. Herausgegeben von Lamont. 10. Bd. München, Franz in Comm. 1¾ Thlr.

Soldner, v., und Lamont, Meteorologische Beobachtungen auf der Sternwarte bei München in den Jahren 1825—1827. 2. Supplement zu den Annalen der Münchener Sternwarte. Eben daselbst 1 Thlr.

Fortschritte in der Physik im Jahre 1855. 10. Jahrg., redig von Krönig. 1. Abth. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

Bremiker, C., Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1860. Berlin, Reimer. ½ Thlr.

Crelle's Journal für Mathematik, fortgesetzt von **Borchardt** etc. 55. Bd. 1. Heft. Berlin, Reimer. pro Bd. 4 Thlr.

Astronomische Nachrichten, begründet von C. **Schumacher**, fortgesetzt von P. **Hansen** und F. **Peters**. 48. und 49. Bd. Nr. 1. Hamburg, Perthes, Besser & Mauke. pro Bd. 5 Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica; ed. A. Zuchold. 7. Jahrg. 2. Heft. Juli — Dec. 1857. *Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht.* 8 *Ngr.*

Reine Mathematik.

Salomon, J., Lehrbuch der Elementarmathematik für Oberrealschulen. 1. Bd. 2. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 1⅔ Thlr.

Spitzer, S., Bemerkungen über die Integration linearer Differentialgleichungen. Wien, Gerold's Sohn in Comm. (Akad.) ⅙ Thlr.

Spitzer, S., Integration verschiedener linearer Differentialgleichungen. Ebendas. (Akad.) ⅙ Thlr.

Wittstein, Th., Kurzer Abriss der Elementarmathematik zum Gebrauche bei Repetitionen. 2. Aufl.. Hannover, Hahn. 8 Ngr.

Rogner, Materialien zum Gebrauche beim Unterrichte in der höhern Analysis. 2. Ausg. Gratz, Hesse. 1⅓ Thlr.

Raabe, J. L., Mathematische Mittheilungen. 2. Heft. Zürich, Meyer & Zeller. ⅔ Thlr.

Vega, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 42. Aufl. bearb. von **Bremiker**. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 1¼ Thlr.

Heis und **Eschweiler**, Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten. 1. Theil Planimetrie. 2. Aufl. Cöln, Du Mont Schauberg. ⅚ Thlr.

Mocnik, Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien. 5. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 1⅓ Thlr.

Powalky, C., Logarithmisch-trigonometrische Dreiecksberechnungen. Eine Sammlung von Beispielen. Berlin, Dümmler. ½ Thlr.

Lay, J. F., Lehrbuch der Geometrie. 1. Theil. Planimetrie. Bonn, Henry & Cohen. 18 Ngr.

Suhle, H., Die Elemente der geometrischen Analysis. Bernburg, Gröning. ⅙ Thlr.

Snell, K., Lehrbuch der Geometrie. 2. Theil. Kreislehre und ebene Trigonometrie. 2. Aufl. Leipzig, Brockhaus. 24 Ngr.

Mann, F., Ein Beitrag zur Lösung der axonometrischen Probleme. Frauenfeld, Verlagscomtoir. ¼ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Stampfer, S., Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren und zu andern beim Eisenbahnbau vorkommenden geometrischen Arbeiten. 4. Auflage. Wien, Gerold's Sohn. 1⅓ Thlr.

Morawitz. M., Die Strassen- und Eisenbahncurven. Eine Tabellensammlung zum Bogenausstecken. Reichenberg, Jannasch. 18 Ngr.

Streckfuss, M., Lehrbuch der Perspective. Breslau, Trewendt. 2 Thlr.

Bode's Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels. 11. Aufl. Herausgeg. von Bremiker. 2. und 3. Lief. Berlin, Nicolai. à ⅓ Thlr.

Oeltzen, W., Argelander's Zonenbeobachtungen vom 15. bis 31. Grade südl. Declinationen in mittleren Positionen für 1850. 1. Abth. Wien, Gerold's Sohn in Comm. (Akad.) 14 Ngr.

— Dasselbe 2. und 3. Abth. Ebendas.

Coester, Sonnenfinsterniss am Nachmittage des 15. März. Zunächst für Berlin berechnet und dargestellt. Cassel, Bertram. ⅙ Thlr.

Nell, A. M., Der Planetenlauf; eine graphische Darstellung der Planenbahnen etc. Braunschweig, Vieweg. 1⅙ Thlr.

Piper, J., Karls des Grossen Kalendarium und Ostertafel; aus der Pariser Urschrift herausgeg. Berlin, Decker. 1 Thlr.

Atlas des nördlichen gestirnten Himmels; für den Anfang des Jahres 1855 entworfen auf der K. Sternwarte zu Bonn. 2. Lief. Bonn, Marcus. 3 Thlr.

Woepke, J., Ueber ein in der K. Bibliothek zu Berlin befindliches arabisches Astrolabium. Berlin, Dümmler in Comm. (Akad.) ⅚ Thlr.

Littrow, C, v., Der Zonenapparat am Mittagsrohre der Wiener Sternwarte. Wien Gerold's Sohn in Comm. (Akad.) 6 Ngr.

Snell, K., Newton und die mechanische Naturwissenschaft. 2. Aufl. Leipzig, Arnoldische Buchhandl. ⅓ Thlr.

Petzval, J., Bericht über dioptrische Untersuchungen. Wien, Gerold's Sohn in Comm. (Akad.) ⅙ Thlr.

Becker, M., Handbuch der Ingenieurwissenschaft. 2. Bd. (Der Brückenbau.) 2. Aufl. Stuttgart, Mäcken. 5¾ Thlr.

— Dasselbe 3. Band. (Strassen- und Eisenbahnbau.) Ebendaselbst. 5¾ Thlr.

Jaquet, A., Tracé des courbes circulaires, elliptiques et paraboliques de raccordement des chemins de fer, routes et canaux. Paris, V. Dalmont.

Belanger, Théorie de la résistance et de la flexion plane des solides dont les dimensions transversales sont petites rélativement à leur longueur. Paris, Mallet-Bachelier. 3 *Frcs.*

Physik.

Braniss, C. J., Ueber atomistische und dynamische Naturauffassung. Breslau, Trewendt. ⅓ Thlr.

Die gesammten Naturwissenschaften, dargestellt von Dippel, Gottlieb, Koppe etc. 14. Lieferg. Essen, Bädecker. ⅓ Thlr.

Baumgärtner, A. v., Von den allgemeinen Eigenschaften der Kräfte in der unorganischen Natur und ihre Bedeutung in der Naturlehre. Wien, Gerold's Sohn in Comm. (Akad.) 4 Ngr.

Grailich und v. Lang, Ueber die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. Ebendas. 1⅓ Thlr.

Knochenhauer, K. W., Versuche mit einer getheilten Batterie. Ebenselbst. 8 Ngr.

Benedikt, M., Ueber die Abhängigkeit des elektrischen Leitungswiderstandes von der Grösse und Dauer des Stromes. Ebendaselbst. 2 Ngr.

Pohl, J. J., Ueber den Gebrauch des Thermo-Hypsometers zu chemischen und physikalischen Untersuchungen. Ebendas. 4 Ngr.

Hankel, G. W., Electrische Untersuchungen. 3. Abhdlg. Ueber Electricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. Leipzig, Hirzel. 16 Ngr.

Schmidt, J. F. J., Untersuchungen über die Leistungen der Bourdon'schen Metallthermometer. Olmütz, Hölzel, ⅔ Thlr.

Aderholdt, A. E., Theorie des Regenbogens in fasslicher Darstellung. Jena, Döbereiner. 27½ Ngr.

Pouillet-Müller, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 5. Aufl. 2. Bd. 7. und 8. Lief. Braunschweig, Vieweg. à ½ Thlr.

Physikalisches Lexicon, von Marbach & Cornelius. 2. Aufl. 63. und 64. Liefg. Leipzig, O. Wigand. à ½ Thlr.

Schleiss v. Löwenfeld. Physicalische Briefe. München, Kaiser. ⅔ Thlr.

Arago, Oeuvres complètes publiées qar J. A. Barral. Tome VII. Notices scientifiques. Leipzig, Weigel. 2 *Thlr.*

Lartique, Essai sur les ouragans et les tempêtes. Paris, Robiquet. 5 *Frcs.*

Jamin, M. J., Cours de physique de l'école polytechnique. Tome I. (L'ouvrage aura trois volumes). Paris, Mallet Bachelier. 12 *Frcs.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

Professor Petzval's Memoire: Ueber Herrn Spitzer's Abhandlung: Die Integration mehrerer Differentialgleichungen betreffend, und die darin erhobenen Prioritäts-Ansprüche.*) Widerlegt von Professor SIMON SPITZER.

Am 22. Mai 1857 legte ich der Wiener kaiserlichen Akademie der Wissenschaften eine Arbeit vor über Integration der Differentialgleichung:

1) $$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0.$$

Ich habe, bevor ich zur Veröffentlichung dieser Arbeit schritt, mich in der Literatur dieses Gegenstandes gehörig umgesehen, ich habe die Arbeiten, welche die Integration der Gleichung 1) oder specieller Fälle dieser Gleichung zum Zwecke hatten, und welche von Euler, Laplace, Liouville, Poisson, Scherk, Jacobi, Lobatto, Serret, Lebesgue, Mainardi, Petzval gemacht wurden, genau studirt, und bin am Ende zu Formeln gelangt, welche ich nirgends vorfand, die sich aber, wie ich glaube, in Beziehung auf Einfachheit, Eleganz und Allgemeinheit wesentlich von den bisher bekannten unterschieden.

Zu meinem nicht geringen Erstaunen griff Herr Professor Petzval am 3. December des verflossenen Jahres diese Arbeit, welche die kaiserliche Akademie über Antrag des Herrn Ritters A. v. Ettingshausen in ihre Druckschriften aufgenommen hat, mit grosser Heftigkeit an.

Im Verlaufe meiner eben erwähnten Arbeit war mir nämlich die Veranlassung geboten, darauf hinzuweisen, dass die Integrations-Methode, welche Herr Prof. Petzval im ersten Bande seines Werkes „Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten" Seite 38 auf die Gleichung

2) $$(a_n+b_nx)y^{(n)}+(a_{n-1}+b_{n-1}x)y^{(n-1)}+\ldots+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0$$

anwendet, und deren Entdeckung er daselbst für sich in Anspruch nimmt schon lange von Laplace gemacht worden sei, und nicht nur in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1782 abgedruckt ist, sondern auch in *Lacroix*

*) Siehe die Sitzungsberichte der mathem. naturw. Classe der Wiener kaiserl. Akademie der Wissenschaften XXVII. Band, Nr. 4, Seite 253 des Jahrganges 1858.

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, seconde édition tom III. pag. 572 und zwar überall fast durchgängig mit denselben Buchstaben und Zeichen, wie Herr Petzval sie in seinem Werke giebt.

Der Herr Professor meint zwar, dass es nicht viel zu bedeuten habe, wenn Jemand von den Entdeckungen Laplace's Gebrauch macht, oder durch eigenes Nachdenken zu etwas kommt, was dieser grosse Mann auch schon gehabt hat, glaubt aber dennoch sich zu einer so heftigen Sprache gegen mich berechtigt, weil ich die besprochene Methode „die Laplace'sche" und nicht „die Petzval'sche" nenne. Oder ist vielleicht die Vehemenz seines Angriffs durch den Umstand zu erklären, dass ich die Priorität für die Integration der Gleichung

$$3) \qquad x y^{(n)} - y = 0$$

mittelst unendlicher Reihen für mich in Anspruch nehme? Ist denn das Integriren einer so einfachen Gleichung mit Hülfe unendlicher Reihen eine gar so bedeutende Entdeckung, dass nur im Dienste der Wissenschaft ergraute Männer sie gemacht haben konnten? Oder wie anders soll ich mir die Worte des Herrn Professor auslegen: „Zwar hat es nicht viel zu bedeuten, wenn Jemand von den Entdeckungen Laplace's Gebrauch macht, oder durch eigenes Nachdenken zu etwas kommt, was dieser grosse Mann auch schon gehabt hat! allein, wenn ein alter, im Dienste der Wissenschaft ergrauender Gelehrter, der ein paar grosse Wissenschaften beinahe von der Grundfeste bis an den Gipfel ausgebildet hat, einem armen Anfänger, der ohnehin wenig oder gar nichts sein nennen kann, dieses wenige wegnimmt, so hat der Reiche den Armen bestohlen; und wenn der Lehrer das Eigenthum seines Schülers sich zuschreibt, so ist diess eben so viel, als wenn der Maler seinen Sohn beraubt hätte."

Obwohl mir an der Priorität der Entdeckung des Integrals der Gleichung

$$3) \qquad x y^{(n)} - y = 0$$

mittelst unendlicher Reihen gar nichts liegt, weil ich diese für höchst unbedeutend halte, so gebietet es mir dennoch die Pflicht, über die angesprochene Priorität den genauesten und überzeugendsten Nachweis zu liefern, damit jeder Unpartheiische sich selber ein Urtheil hierüber machen kann. — Aber ich entsage dennoch zum vorhinein dem Gedanken, durch diesen Nachweis Herrn Prof. Petzval überzeugen zu wollen. Denn wie könnte ich (wollt' ich auch) hoffen, einen Beweis zu Stande zu bringen, der Herrn Prof. Petzval zur Ueberzeugung brächte; wenn es mir unmöglich ist, den Herrn Professor zur Einsicht zu bringen, dass eine Methode, welche seit mehr als dreiviertel Jahrhunderten veröffentlicht ist, welche in den Pariser Memoiren vom Jahre 1782 auf Seite 47 fast mit denselben Buchstaben und Zeichen abgedruckt erscheint, dem Laplace und nicht ihm gehöre; denn kaum beweise ich ihm diess, sagt er: „ich nenne die Methode dennoch mein, weil es mindestens vorderhand „noch unerwiesen ist, dass sie jemandem Anderen, z. B. Laplace angehöre."

Herr Prof. Petzval findet Seite 59 des ersten Bandes seines vorher citirten Werkes, so wie auf Seite 23 seines im Jahre 1847, unter den von W. Haidinger gesammelten, und durch Subscription herausgegebenen naturwissenschaftlichen Abhandlungen, veröffentlichten Memoires: „Ueber die Integration linearer Differentialgleichungen" für die Gleichung

$$4)\qquad x y^{(n)} - a^2 y = 0$$

für positive x folgendes Integrale:

$$5)\qquad y = -\int_0^\infty e^{-\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} \left(C_1 e^{\frac{x}{\mu_1 v}} + C_2 e^{\frac{x}{\mu_2 v}} + \ldots + C_r e^{\frac{x}{\mu_r v}}\right) dv$$

und für negative x folgendes andere:

$$6)\qquad y = \int_0^\infty e^{-\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} \left(C_{r+1} e^{\frac{x}{\mu_{r+1} v}} + C_{r+2} e^{\frac{x}{\mu_{r+2} v}} + \ldots + C_{n-1} e^{\frac{x}{\mu_{n-1} v}}\right) dv$$

woselbst $\mu_1\, \mu_2 \ldots \mu_{n-1}$ die $n-1$ Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} + 1 = 0$ bedeuten, von denen die ersten r negativ, oder imaginär, mit reellen negativen Bestandtheilen; ferner die übrigbleibenden Wurzeln positiv, oder imaginär mit reellen positiven Bestandtheilen, sind. — Sollte auch $\pm\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $v^{n-1} + 1 = 0$ sein, so hat man noch das particuläre Integral

$$7)\qquad y = C\int_{-0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{v}\sqrt{-1} - \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv$$

den früher gefundenen zuzusetzen.

Wird nun nach dieser Methode die sehr einfache Gleichung

$$8)\qquad x y'' - y = 0$$

aufgelösst, so findet man hiefür nur ein, mit einer einzigen Constanten versehenes Integral, und auch dieses nur dann, wenn x positiv ist, es ergiebt sich nämlich hiefür

$$9)\qquad y = C\int_0^\infty e^{-v-\frac{x}{v}}\, dv.$$

Für die Gleichung dritter Ordnung

$$10)\qquad x y''' - y = 0$$

giebt Herr Prof. Petzval folgendes Integral

$$11)\qquad y = B\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} \sin\frac{x}{v}\cdot v\, dv$$

wird dasselbe aber in 10) substituirt, so ergiebt sich nicht $x y''' - y = 0$, sondern

$$12)\qquad x y''' - y = B \sin\frac{x}{0}$$

was wohl Null sein kann, in der That aber eine unbestimmte Grösse ist.

Seite 326 betrachtet Herr Prof. Petzval die specielle Gleichung

$$8)\qquad xy''-y=0$$

setzt in dieselbe $x=\xi^2$, kommt hierdurch zu der Gleichung

$$13)\qquad \xi\frac{d^2y}{d\xi^2}-\frac{dy}{d\xi}-4\xi y=0$$

und verweist, behufs ihrer Integration auf folgende Reihen:

$$14)\quad \left\{\begin{aligned} y=G_1x^{-\frac{a}{2}}e^{bx}&\Big\{1-\left(\frac{a}{2}-1\right)_1\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2bx}+\left(\frac{a}{2}-1\right)_2\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{4b^2x^2}\\ &\quad-\left(\frac{a}{2}-1\right)_3\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{a}{2}+2\right)\frac{1}{8b^3x^3}+\ldots\Big\}\\ +G_2x^{-\frac{a}{2}}e^{-bx}&\Big\{1+\left(\frac{a}{2}-1\right)_1\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2bx}+\left(\frac{a}{2}-1\right)_2\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{4b^2x^2}\\ &\quad+\left(\frac{a}{2}-1\right)_1\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{a}{2}+2\right)\frac{1}{8b^3x^3}+\ldots\Big\}\end{aligned}\right.$$

in denen -1 statt a, 2 statt b, und ξ statt x zu substituiren ist, die aber hiefür divergent werden. — Seite 327 empfiehlt Herr Prof. Petzval für die Differentialgleichung

$$15)\qquad xy^{(n)}\pm a^2y=0$$

folgende Substitution

$$16)\qquad x=\xi^{\frac{n}{n-1}}$$

lässt es eben bei dem guten Rath bewenden, und geht weiter. — Ja noch ein drittes Mal kommt Herr Prof. Petzval, und zwar im zweiten Band, Seite 116 seines Werkes auf Gleichungen dieser Form zurück, er bespricht nämlich daselbst die Gleichung

$$17)\qquad xy''''\pm b^4y=0$$

giebt auch hier den Rath $x=\xi^{\frac{4}{3}}$ zu setzen, kommt aber auch hier zu keinem Integrale.

Also dreimal macht Herr Professor Petzval einen Anlauf, um die besprochene Gleichung zu integriren, und ebenso oftmals muss er sich unverrichteter Sache zurückziehen. Ein Zeitraum von nicht weniger als 8 Jahren trennt den ersten Anlauf vom dritten.

Ich war daher ganz erfreuet, als ich im Sommer des Jahres 1855 in Euler's „Vollständiger Anleitung zur Integral-Rechnung“, zweiter Band, Seite 148 der Salomon'schen Uebersetzung die Gleichung zweiter Ordnung dieser Art gelöst fand, weil ich bis dahin vergebens in Prof. Petzval's Werk nach einem Integrale dieser Gleichung suchte.

Ich habe es unternommen, denselben Weg bei Gleichungen höherer Ordnung zu verfolgen, und habe die von mir bei dieser Gelegenheit gefundenen Integrale in Grunert's Archiv für Mathematik XXVI. Band, 1. Heft veröffentlicht.

Man findet nämlich Seite 59 dieses Archivs für die Gleichung:

$$8)\qquad xy''-y=0$$

das von Euler angegebene Integral in folgender etwas veränderten Gestalt:

$$18)\quad \begin{cases} y=(A+B\log x)\left(x+\frac{x^2}{1!\,2!}+\frac{x^3}{2!\,3!}+\frac{x^4}{3!\,4!}+\dots\right) \\ -B\Big[-1+\frac{x^2}{1!\,2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^3}{2!\,3!}\left(1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right) \\ \qquad +\frac{x^4}{3!\,4!}\left(1+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\,..\Big] \end{cases}$$

welches ich bei einer späteren Gelegenheit in diesem Journale in folgender geschlossenen Form darstellte:

$$19)\quad \begin{cases} y=A\sqrt{x}\int_0^\pi \cos\omega\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\,d\omega+B\int_0^\pi e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\,d\omega \\ +2B\sqrt{x}\int_0^\pi \cos\omega\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\log\left(\sqrt{x}\sin^2\omega\right)d\omega \end{cases}$$

Man findet ferner Seite 61 des XXVI. Bandes des Archivs für die Gleichung

$$10)\qquad xy'''-y=0$$

Das Integral

$$20)\quad \begin{cases} y=A\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^5}{5!}+\frac{1}{3.5}\cdot\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{3.5.7}\cdot\frac{x^9}{9!}+\,..\right) \\ +\left(B+C\log x\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^6}{6!}+\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{x^8}{8!}+\cdot\right) \\ -C\Big\{-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^4}{6!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) \\ \qquad +\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{x^8}{8!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots\Big\} \end{cases}$$

etc. etc. und so findet man auch daselbst das Integral der Gleichung

$$3)\qquad xy^{(n)}-y=0$$

gegeben. — Anderthalb Jahre darauf, nachdem ich diese Arbeit veröffentlicht hatte, las ich im selben Archive, aber im XXVIII. Band, 3. Heft, zu meiner nicht geringen Verwunderung, einen Aufsatz des Herrn Petzval und fand, dass der Herr Professor nun plötzlich auf genau dieselbe Weise wie ich, diese Gleichung behandelt, nämlich durch unendliche, nach aufsteigenden Potenzen geordnete Reihen, einer Integrations-Methode, welche bisher Prof. Petzval unablässig für unbrauchbar erklärt hatte.

Es sagt nämlich Herr Petzval im I. Band, Seite XI der Vorrede zur I. Lieferung seines Werkes: „Man kann sich das Integral einer linearen „Differentialgleichung auf drei verschiedene Arten in eben so vielen Formen „als auffindbar vorstellen. Die erste dieser Formen ist die einer convergirenden, nach aufsteigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen

geordneten Reihe, auf die wir in der Regel jede Function bringen können, an deren numerischen Werthe uns gelegen ist. Wir benützen nun diese Form in gegenwärtigem Werke allerdings, z. B. zum Beweise der Existenz des allgemeinen Integrales, sind sogar zur genauen Discussion aller derjenigen Fälle genöthigt, in denen eine solche Reihenentwickelung unzulässig ist, benützen sie aber zur wirklichen Integration nicht, denn, eben weil sie die allgemeine Form ist, die jede Function annehmen kann, so ist sie die undurchsichtigste, d. h. die zur Bestimmung der speciellen Eigenschaften der Functionen am wenigsten dienliche. Welch' ein einfaches Bild macht sich das mathematische Anschauungsvermögen von einen Sinus, Cosinus oder einer Exponentielle, — man bringe diese Functionen in die alles gleich machende Reihenform, und alle analytischen Eigenschaften: Periodicität, Maximum-, Null-, Minimum-Werthe, unendliches Wachsen oder Abnehmen gegen eine bestimmte Grenze hin, oder über alle Grenzen hinaus, sind dem Auge entschwunden. Man gewinnt daher sehr wenig damit, wenn man die particulären Integrale einer Differentialgleichung in einer solchen Reihenform ermittelt hat etc."

Am Schlusse der Seite 139 sagt Herr Petzval Folgendes: „Gegenüber den Bedürfnissen der Mechanik und Physik lässt sich hievon noch eine zweite Bemerkung anschliessen, nämlich: Die Integration der Differential-Gleichung ist nicht Zweck, sondern nur Mittel zum Zwecke, der eigentliche Zweck aber ist, Auslegung jener gewaltigen Geistersprache, die in den Differential-Gleichungen liegt, und Zerlegung des vielumfassenden Naturgesetzes, das in einen solchen enthalten ist, in ihre einfachsten, dem menschlichen Auffassungsvermögen am leichtesten zugänglichen Bestandsatzungen. Könnte dieser Zweck erreicht werden, ohne Integration, vermittelst der Differential-Gleichung selber, so wäre das Integriren der letzern nutzlos, so wie es wenig nutzbringend ist, in allen denjenigen Fällen, wo das gewonnene Integrale eine Form hat, kraft deren ihm keine grössere Durchsichtigkeit innewohnt, als der Differentialgleichung, z. B. die Form einer Reihe, geordnet nach aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen. — Es wird nicht unnütz sein, wenn wir uns an dieser Stelle über den Werth der letzterwähnten Reihenform ausführlicher aussprechen (und diess thut nun Herr Petzval auf zwei vollgefüllten Quartseiten und schliesst 141 mit den Worten): Es war nothwendig, das völlig Nutzlose der Integration der linearen Differentialgleichungen durch solche Reihen, in Bezug auf den Zweck: Erkenntniss der in denselben liegenden Naturgesetzen umständlich zu erörtern, weil wir jetzt nur mehr die geraden Gegentheile der aufgezählten Unzukömmlichkeiten in Einem Begriffe zu vereinigen brauchen, um das Musterbild einer vollkommeneren und zweckmässigeren Integrations-Methode vor Augen zu haben."

In der vierten Lieferung, die im vorjährigen Sommer erschien, sah ich

Seite 347 wieder, wie Prof. Petzval die genannte Gleichung auf die von mir früher gezeigte Weise behandelt, und Seite 353 spricht Herr Petzval, nachdem er die Integration der Gleichung

3) $$x y^{(n)} - y = 0$$

nach derselben Methode, wie ich, nämlich nach aufsteigenden Potenzen verrichtet, folgende Worte: „Man sieht also, dass die aufsteigende Integration gelegentlich auch sehr brauchbare Resultate liefern kann, und diess zwar namentlich, wie nachgewiesen wurde, in dem Falle, wo sich in der Differentialgleichung Abfälle befinden, von weniger als eine Einheit auf das Coefficentenpaar. Diess ist um so mehr zu beherzigen, als gerade bei solchen Abfällen die sämmtlichen andern Integrations-Methoden, die asymptotische etc. ihren Dienst versagen, indem sie entweder zu Ausdrücken führen, mit denen man weder weiter rechnen, noch eine Untersuchung der analytischen Eigenschaften einleiten kann, oder zu vorgängigen, sehr weitläufigen Transformationen nöthigen. Wir haben eben mit dem jetzt erledigten Beispiele diese Erfahrung im ersten Bande Seite 57 gemacht, wo wir mit ihr einen Integrationsversuch in Form von bestimmten Integralen einleiteten."

Und nach diesen Thatsachen, von deren Wahrheit sich Jedermann überzeugen kann, beklagt sich Herr Petzval, wenn ich in meinem der kaiserlichen Akademie überreichte Memoire die Worte fallen lasse: „Wir ersehen aus der jüngst erschienenen vierten Lieferung, dass in neuester Zeit Petzval den von uns eingeschlagenen Weg für gut findet." Man wird sich wundern, dass ich bisher von der Gleichung

3) $$x y^{(n)} - y = 0$$

sprach, während gerade diese von Herrn Prof. Petzval nirgends erwähnt wird. — Ich erhob jedoch in meiner Abhandlung nur in Bezug auf diese Prioritätsansprüche. In Bezug auf die übrige Arbeit konnte ich mit Herrn Prof. Petzval doch keinen Prioritätsstreit anfangen, da sich von dem eigentlichen Inhalte derselben entweder in allen vier bisher erschienenen Lieferungen keine Spur vorfindet, oder aber, falls sich ja eine solche findet, ich es ja offen sagte.

Herr Prof. Petzval glaubte aber gerade durch den übrigen Theil meiner Arbeit besser Gelegenheit zu einem Angriffe zu finden. Ich übergehe das geringschätzige Urtheil, zu welchem sich Herr Prof. Petzval hinreissen liess, mit Stillschweigen aber den Vorwurf einer Unrichtigkeit derselben, oder gar den eines von mir begangenen Plagiats muss ich entschieden zuzurückweisen, und Punkt für Punkt solch' ungerechte und ungegründete Einwürfe widerlegen.

Die Gleichung

1) $$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

zu integriren, war der erste, wenn auch nicht der einzige Zweck meiner Arbeit. Bevor ich zur Integration obiger Differentialgleichung schreite,

sagte ich am Anfange meines Memoires, will ich, der Einfachheit der Untersuchung wegen, statt den Constanten $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0$ andere, sich unseren Rechnungen inniger anschmiegende Constanten einführen, zu denen ich auf folgende Weise gelange:

Ich bilde den Bruch

$$21)\qquad \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0}$$

und zerlege denselben in Partialbrüche. Sei

$$22)\qquad \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}$$

so sind m, A, B, α, β die neueinzuführenden Constanten, und werden diese Werthe in die vorgelegte Gleichung substituirt, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$23)\quad (m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0$$

Prof. Petzval sagt: „Herr Spitzer lässt den Bruch 21) wie vom Himmel fallen, ohne zu sagen, woher er ihn bezieht. Hiedurch wird schon im Vorhinein seine Abhandlung unverständlich, für alle Diejenigen wenigstens, die mein Werk über die Integration der Differentialgleichungen nicht kennen. Ich bemerke daher hier ergänzungsweise, dass die volle Bedeutung und Bildungsart dieses Bruches in meinem Werke 1. Band Seite 75 allgemein angegeben sei, und dass derselbe ganz ungeänderte Bruch*) sich noch überdiess auf Seite 43 vorfindet. Es nimmt also Herr Spitzer zu seinem Integrationsgeschäfte von meiner Integrations-Methode den Anlauf. Ich sage „von meiner Integrations-Methode“, weil es wenigstens vorderhand noch unerwiesen ist, dass sie jemandem Andern, z. B. Laplace, angehöre. Er folgt Schritt für Schritt meinen an dieser Stelle zu ersehenden Rechnungen, und braucht sogar dieselben Zeichen, mit dem unwesentlichen Unterschiede, dass er eine Constante, die bei mir A' heisst, mit B benennt.

Ich bemerke, dass diess einfach nicht der Fall ist. Ich gebe wohl zu, die Arbeiten des Herrn Petzval genau gekannt zu haben, ich habe diess ja aber gleich im Eingange meiner Arbeit angeführt, aber von seiner Integrations-Methode nehme ich nicht den Anlauf; denn eine Gleichung in anderer Form hinstellen, ist doch noch kein Integriren derselben. Aber selbst zugegeben, dass ich den Anlauf genommen hätte, von der Methode, die Herr Petzval im 1. Bande, Seite 38 seines Werkes giebt, so wäre es doch die Laplace'sche Methode, von der ich den Anlauf genommen, und nicht die

*) Herr Prof. Petzval hat, um die Gleichung von der Form 1) zu integriren, damit angefangen, wo möglich, die Constante a_2 wegzuschaffen, dann kommt er zu dem Bruche

$$\frac{a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0}$$

der in Partialbrüche zerlegt $\frac{A}{u-\alpha} + \frac{A^1}{u-\beta}$ giebt. Ich sehe daher nicht, wie Herr Petzval Seite 43 seines Werkes den ganz ungeänderten Bruch 21) findet.

seine. Herr Petzval hält diess aber mindestens vorderhand noch für unerwiesen, nun dann möge er die Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1782 zur Hand nehmen, er findet dort Seite 47 dieselbe Methode, mit denselben Buchstaben und Zeichen nicht nur für die Differentialgleichungen durchgeführt, sondern auch für die Differenzengleichungen, die Herr Petzval ebenfalls wunderbarer Weise, wie durch einen neckischen Zufall nach derselben Methode auflöst wie Laplace, und zwar wiederum fast genau mit denselben Buchstaben und Zeichen.

Ich setze, um die Gleichung 23) zu integriren

$$24)\qquad y=e^{\alpha x}z$$

Diese Substitution nimmt Herr Petzval für sich in Anspruch. Ich bemerke hiezu, dass Herr Petzval sie gar niemals auf die Integration der Gleichungen der Form 1) anwandte, sondern genau, Schritt für Schritt dem von Laplace vorgezeichneten Wege folgte, d. i. y in der Form

$$25)\qquad y=\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\,V\,du$$

voraussetzte. Uebrigens muss ich weiter bemerken, dass ich die Substitution $y=e^{\alpha x}z$ von J. A. Serret holte, der sie in seinem „*Mémoire sur l'intégration d'une équation différentielle à l'aide des différentielles à indices queleonques*“ anwandte, welches sich sowohl in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie vom Jahre 1843, als auch in Liouville's Journal tom. IX abgedruckt befindet, d. i. zu einer Zeit, wo Herr Petzval über Differentialgleichungen noch gar nichts veröffentlicht hatte.

Die Substitution 24) führte mich auf die Gleichung

$$26)\qquad (m+x)z''+[A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z'+A(\alpha-\beta)z=0$$

und diess ist ein specieller Fall folgender von Liouville herrührenden Gleichung

$$27)\qquad (mx^2+nx+p)z''+(qx+r)z'+sz=0$$

wie ich diess auch gehörigen Orts erwähnte.

Ich komme durch Anwendung der Liouville'schen Methode zu folgendem Integrale der Gleichung 23)

$$28)\qquad y=C_1e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^B}\right]+C_2e^{\beta x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^A}\right]$$

von welchem Herr Petzval sagt, dass sie nicht mein Eigenthum sei, sondern das von Liouville, und dass es enthalten sei als specieller Fall, der im XIII. Bande, Seite 181 des Journal's *de l'école polytechnique* angegebenen Formeln, d. i. als specieller Fall des Integrals der Gleichung 27).

Wenn diess, was Herr Petzval hier sagt, wahr wäre, so würde diess in der That für mich eine schwere Anklage sein. Glücklicher Weise aber hat im Jahre 1843, also mehrere Jahre, nachdem Liouville sein merkwürdiges Memoire über die Integration der Differentialgleichung

27) $$(mx^2+nx+p)y''+(qx+r)y'+sy=0$$
veröffentlichte, Serret ein Memoire der Pariser Akademie mitgetheilt, unter dem schon früher erwähnten Titel: *Memoire sur l'intégration d'une équation differentielle à indices quelconques* und in diesem Memoire das Integral der Gleichung

29) $$xy''+2ny'-m^2xy=0$$
gegeben, unter folgender Form:

30) $$y=Ae^{mx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[e^{-2mx}x^{-n}]+Be^{-mx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[e^{2mx}x^{-n}]$$

Die Pariser Akademie hat diese Arbeit wichtig genug gefunden, um sie in ihre *Comptes rendus* zu veröffentlichen, ja noch mehr, Liouville selbst hat die Wichtigkeit dieser Arbeit durch Aufnahme in sein ausgezeichnetes Journal anerkannt. Wie kann nun das Integral 28), das ich gebe, Herrn Liouville's Eigenthum sein, wenn die sehr spec. Gleichung 27), die aus der von mir betrachteten Gleichung 23) hervorgeht, wenn man daselbst

31) $$m=0,\quad \alpha=m,\quad \beta=-m,\quad A=n,\quad B=n$$
setzt, nicht Herrn Liouville gehört?

Ich habe ferner, gleich nachdem ich Separatabdrücke meiner Arbeit erhielt, Herrn Liouville einen Abdruck zugesandt, und ich weiss, dass er ihn empfangen hat; es ist nun fast ein ganzes Jahr verflossen, und Herr Liouville lässt sich sein Eigenthum von mir nehmen?

Endlich, wenn die Formel 28), zu deren Entwickelung ich kaum mehr als eine Octavseite benöthigte, so einfach ist, dass sie Herr Petzval, oder jeder seiner Schüler oder Leser gleich hätte finden können, wenn er nur gewollt hätte, so frage ich, warum Herr Petzval so langwierige und anstrengende Entwicklungen machte, und dennoch das Integral nicht in solch' einfacher Gestalt erhält, wie ich? Zu was, frage ich weiter, hat Herr Petzval ein 10 Druckbogen starkes Memoire „Ueber die Integration linearer Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten" veröffentlicht, wenn die Differentialgleichungen, die er daselbst integrirte schon Liouville, und zwar auf viel einfachere Weise integrirt hatte? Herr Petzval sage nicht, er integrire schon daselbst die allgemeine Gleichung

2) $$(a_n+b_nx)y^{(n)}+(a_{n-1}+b_{n-1}x)y^{(n-1)}+\ldots+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0$$
hingegen ich, in meinem Memoire, bloss die specielle

1) $$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0$$
denn der Weg, den ich einschlug, der lässt sich auch, wie ich in meinem Memoire ausdrücklich sagte, betreten bei Differentialgleichungen von der Form 2) und ich habe diess für Differentialgleichungen dritter Ordnung daselbst thatsächlich gezeigt.

Ich will hier gelegentlich bemerken, dass sich aus der Formel 28), die ich gab, die Laplace'schen Integrale, und umgekehrt, aus dem Laplace-schen Integrale der Gleichung 1) die von mir gegebenen Formeln mit Leichtigkeit ableiten lassen. Denn bekanntlich hat man für positive Werthe von x

$$32) \quad \frac{1}{x^B} = \frac{1}{\Gamma(B)} \int_0^{\infty} e^{-\omega x} \omega^{B-1} d\omega$$

folglich auch für positive Werthe von $m + x$

$$33) \quad \frac{1}{(m+x)^B} = \frac{1}{\Gamma(B)} \int_0^{\infty} e^{-\omega(m+x)} \omega^{B-1} d\omega$$

ferner:

$$34) \quad \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} = \frac{1}{\Gamma(B)} \int_0^{\infty} e^{(\beta-\alpha-\omega)x - m\omega} \omega^{B-1} d\omega$$

und:

$$35) \quad \frac{\partial^{A-1}}{\partial x^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right] = \frac{1}{\Gamma(B)} \int_0^{\infty} (\beta-\alpha-\omega)^{A-1} \omega^{B-1} e^{(\beta-\alpha-\omega)x - m\omega} d\omega$$

somit:

$$36) \quad e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right] = \frac{1}{\Gamma(B)} \int_0^{\infty} (\beta-\alpha-\omega)^{A-1} \omega^{B-1} e^{(\beta-\omega)x - m\omega} d\omega$$

Setzt man hierein $\beta - \omega = u$, so erhält man

$$37) \quad e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-1)x}}{(m+x)^B}\right] = C \int_{\beta}^{-\infty} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

wobei C eine Constante bedeutet; was die Laplace'sche Form ist.

Man könnte also eigentlich sagen: Die Methode, die ich zu Anfang meines Memoires gegeben, ist ein Weiterführen der Laplace'schen Methode; ich stelle nämlich das Integral der Differentialgleichung dar, nicht wie Laplace, in der Form eines bestimmten Integrals, in welcher ein todter Buchstabe u vorkommt, sondern ich gebe y als reine Function von x, und darin besteht Ein Unterschied meiner Methode von der Laplace'schen. Die Laplace'sche Methode ist nur richtig für positive Werthe von A und B, meine für beliebige Werthe von A und B, das Laplace'sche Integral gilt nur für positive $m + x$ oder nur für negative $m + x$, meine für beliebig bezeichnete $m + x$, die Laplace'sche ist unbrauchbar, wenn die unter dem Integralzeichen stehende Grösse innerhalb der Integrationsgrenzen durch unendlich geht, meine Methode kennt diesen Fall gar nicht, meine Methode lässt sich endlich auch dann anwenden, wenn die vorgelegte Differentialgleichung eine complete ist. Es hat also meine Methode, wie ich glaube, unverkennbare Vortheile gegenüber der Laplace'schen und da Herr Petzval die Laplace'sche Methode fast in unveränderter Gestalt giebt,*) so existirt nahezu

*) Die Fälle, wo A und B oder bloss eine dieser Grössen negativ sind, behandelt Herr Petzval auf eigenthümliche Weise, und kommt da zu Formen von folgender Gestalt:

$$y = \frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[e^{ux} W\right]$$

woselbst nach verrichteter h maliger Differentiation u durch eine Constante α ersetzt werden muss.

derselbe Unterschied zwischen meiner Methode und der Petzval'schen. — Ich habe nun zwei Beispiele gemacht, und diese aus Herrn Petzval's Werk entlehnt, um zu zeigen, wie ich augenblicklich durch meine Methode zu deren Integrale komme.

Ich nahm erstens $A=0$ an, und hatte sogleich

$$38) \qquad y=C_1 e^{\alpha x}\int\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}dx+C_2 e^{\alpha x}$$

eine Form, zu welcher Herr Petzval nur durch Zuhülferufen der Cauchyschen singulären Integrale gelangte.

Ich nahm ferner die, von sehr vielen Analysten behandelte Gleichung

$$39) \qquad xy''+ay'-b^2xy=0$$

vor und erhielt nach Zerlegung des Bruches

$$40) \qquad \frac{au}{u^2-b^2}$$

in die beiden Partialbrüche

$$41) \qquad \frac{\frac{a}{2}}{u+b}+\frac{\frac{a}{2}}{u-b}$$

folgendes Integral

$$42) \qquad y=C_1 e^{-bx}\frac{d^{\frac{a}{2}-1}}{dx^{\frac{a}{2}-1}}\left[x^{-\frac{a}{2}}e^{2bx}\right]+C_2 e^{bx}\frac{d^{\frac{a}{2}-1}}{dx^{\frac{a}{2}-1}}\left[x^{-\frac{a}{2}}e^{-2bx}\right]$$

welches mit dem von Serret gegebenen, vollkommen übereinstimmt. Um nun auch zu zeigen, dass ich durch Entwickelung dieses Ausdruckes, zu denselben Reihen komme, welche Herr Petzval findet, entwickelte ich wirklich den $\frac{a}{2}-1^{\text{ten}}$ Differentialquatienten der in den Klammern stehenden Producte nach der bekannten Formel:

$$43) \qquad \frac{\partial^\mu . PQ}{\partial x^\mu}=PQ^{(\mu)}+(\mu_1)P'Q^{(\mu-1)}+(\mu_2)P''Q^{(\mu-2)}+\ldots$$

indem ich

$$44) \qquad P=x^{-\frac{a}{2}} \quad Q=e^{\pm 2bx}$$

setze, und erhielt so die Reihen:

$$14) \quad \left\{\begin{aligned} y=G_1 x^{-\frac{a}{2}}e^{bx}\Bigg[1-\left(\frac{a}{2}-1\atop 1\right)\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2bx} \\ +\left(\frac{a}{2}-1\atop 2\right)\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{1}{4b^2x^2}-\ldots\Bigg]+ \\ +G_2 x^{-\frac{a}{2}}e^{-bx}\Bigg[1+\left(\frac{a}{2}-1\atop 1\right)\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2bx} \\ +\left(\frac{a}{2}-1\atop 2\right)\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{4b^2x^2}+\ldots\Bigg] \end{aligned}\right.$$

oder für $a=-2$

45) $$y = G_1 e^{bx}\left(x-\frac{1}{b}\right) + G_2 C^{-bx}\left(x+\frac{1}{b}\right)$$

welche vollkommen mit denen von Herrn Petzval gegebenen, übereinstimmen.

Da findet nun Herr Petzval sich wieder zu folgender Bemerkung veranlasst. „Herr Spitzer geht über zur Erörterung der verschiedenen Fälle, Schritt für Schritt meinen Fusstapfen folgend, und gelangt dadurch zu Formeln, von denen die erste (Herr Petzval meint die Formel 14) auf Seite 79 meines Werkes, die zweite (Herr Petzval meint die Formel 45) an eben der Stelle zu finden ist.

Wenn Herr Petzval diess „ein Schritt für Schritt in seine Fusstapfen folgen“ nennt, so kann ich mit viel mehr Recht sagen: Herr Petzval folgt Schritt für Schritt den Fusstapfen von Scherk und Lobatto, weil er dieselben speciellen Beispiele wie Scherk und Lobatto löste, und auch zu denselben Resultaten gelangt. Ich kann es mit mehr Recht sagen, weil Herr Petzval den unveränderten Gang von Lobatto folgt, dasselbe Beispiel behandelt, und nach derselben Methode löst.

Ich bemerkte ferner, dass die Reihe 14), welche für ganze positive oder negative Werthe von $\frac{a}{2}$ abbricht, für andere Werthe von $\frac{a}{2}$ divergent, somit unbrauchbar wird, weil

46) $$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm \frac{(a-2n)(a+2n-2)}{8bnx}$$

für fortwährend wachsende Werthe von n unendlich wird. Ich habe in dem Falle, wo $\frac{a}{2}$ keine ganze Zahl ist, die Gleichung 42) auf andere Art entwickelt, es ist nämlich für

47) $$P = e^{\pm 2bx} \quad Q = x^{-\frac{a}{2}}$$

das Integral der Gleichung 42)

48) $$\begin{aligned} y = C_1 e^{bx}\Bigg[& \frac{\partial^{\frac{a}{2}-1}}{\partial x^{\frac{a}{2}-1}}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right) + 2b\binom{\frac{a}{2}-1}{1}\frac{\partial^{\frac{a}{2}-2}}{\partial x^{\frac{a}{2}-2}}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right) \\ & + 4b^2\binom{\frac{a}{2}-1}{2}\frac{\partial^{\frac{a}{2}-3}}{\partial x^{\frac{a}{2}-3}}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right) + \ldots\Bigg] \\ + C_2 e^{-bx}\Bigg[& \frac{\partial^{\frac{a}{2}-1}}{\partial x^{\frac{a}{2}-1}}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right) - 2b\binom{\frac{a}{1}-1}{1}\frac{\partial^{\frac{a}{2}-2}}{\partial x^{\frac{a}{2}-2}}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right) \\ & + 4b^2\binom{\frac{a}{2}-1}{2}\frac{\partial^{\frac{a}{2}-3}}{\partial x^{\frac{a}{2}-3}}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right) - \ldots\Bigg] \end{aligned}$$

Ich will nun, weil Professor Petzval hierauf vorzüglich seinen Angriff richtet, die Rechnung für den Fall, als a ein positiver Bruch ist, vollständig durchführen. Es ist alsdann

$$49)\ \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^{\frac{a}{2}-1}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-1}}=\frac{(-1)^{\frac{a}{2}-1}\Gamma(a-1)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\cdot\frac{1}{x^{a-1}}\\ &\frac{\partial^{\frac{a}{2}-2}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-2}}=\frac{(-1)^{\frac{a}{2}-2}\Gamma(a-2)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\cdot\frac{1}{x^{a-2}}\\ &\frac{\partial^{\frac{a}{2}-3}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-3}}=\frac{(-1^{\frac{a}{2}-3}\Gamma(a-3)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\cdot\frac{1}{x^{a-3}}\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}\right.$$

somit:

$$50)\ \left\{\begin{aligned} y=&Ae^{bx}\left[\frac{\Gamma(a-1)}{x^{a-1}}-2b\left(\frac{a}{1}-1\right)_1\frac{\Gamma(a-2)}{x^{a-2}}+4b^2\left(\frac{a}{2}-1\right)_2\frac{\Gamma(a-3)}{x^{a-3}}-\ldots\right]+\\ &+Be^{-bx}\left[\frac{\Gamma(a-1)}{x^{a-1}}+2b\left(\frac{a}{2}-1\right)_1\frac{\Gamma(a-2)}{x^{a-2}}+4b^2\left(\frac{a}{2}-1\right)_2\frac{\Gamma(a-3)}{x^{a-3}}+\ldots\right] \end{aligned}\right.$$

woselbst $\Gamma(a)$ die bekannte Gamma Function ist, deren Definition aus folgender Gleichung fliesst:

$$51)\quad \Gamma(a)=lim.\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(m-1).m.\ \ m^a}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots\ldots(a+m-1)(a+m)}\ ;\quad m=\infty$$

Setzt man in 50) statt e^{bx} und e^{-bx} ihre entsprechenden unendlichen Reihen, und verrichtet dann die Multiplication dieser Reihen mit denen in den Klammern stehen, so findet man das merkwürdige Resultat, dass die beiden in 50) hingestellten Ausdrücke nicht von einander verschieden sind. — Ich kann aber bis jetzt noch nicht behaupten, dass die convergente Reihe:

$$52)\quad y=e^{bx}\left[\frac{\Gamma(a-1)}{x^{a-1}}-2b\left(\frac{a}{2}-1\right)_1\frac{\Gamma(a-2)}{x^{a-2}}+4b^2\left(\frac{a}{2}-1\right)_2\frac{\Gamma(a-3)}{x^{a-3}}-\ldots-\right]$$

welche ich für positive gebrochene Werthe von a entwickelte, ein Integral vorgelegten Differentialgleichung sei, denn ich habe bisher die Function *complémentaire*, und wie Herr Petzval ausdrücklich sagt, auch die einem jeden Schüler bekannte Integrationsconstante (als ob diess zwei verschiedene Dinge wären, die Integrationsconstante nämlich, und die Function *complémentaire*) ausser Acht gelassen — aber nicht wie Herr Petzval, der meine Arbeit Punkt für Punkt durchsah, wiederholt angiebt, vergessen; denn ich machte ausdrücklich am Schlusse meiner Arbeit, d. i. Seite 70 folgende Bemerkung: „Da wir ferner immerwährend die Function *complémentaire* ausser Acht gelassen haben, so bleibt uns zur Ve-

rificirung des gewonnenen Integrales nichts anderes übrig, als eine directe Substitution in die vorgelegte Gleichung.“ Wird nun der Ausdruck 52) in die Gleichung 39) substituirt, so überzeugt man sich, dass der Ausdruck 52) der Gleichung genügt, somit ist dieser Ausdruck wirklich das Integral der Gleichung 52).

Da man ferner, wenn man die Function *complémentaire* berücksichtigt, für y auch eine Reihe folgender Form erhält:

$$53)\qquad y = e^{bx}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots)$$

so ergiebt sich durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung 39) noch folgender Werth für y

$$54)\quad \left\{ y = e^{bx}\left[1 - bx + \frac{b^2(a+2)}{2!(a+1)}x^2 - \frac{b^3(a+2)(a+4)}{3!(a+1)(a+2)}x^3 + \frac{b^4(a+2)(a+4)(a+6)}{4!(a+1)(a+2)(a+3)}x^4 - \ldots\right]\right.$$

somit erhält man für die Gleichung

$$39)\qquad xy'' + ay' - b^2xy = 0$$

nach dem von mir betretenen Weg folgendes, für alle gebrochenen positiven Werthe von a gültige Integrale:

$$55)\left\{\begin{array}{l} C_1 = ye^{bx}\left[\frac{\Gamma(a-1)}{x^{a-1}} - 2b\left(\frac{a}{2} - 1\right)\frac{\Gamma(a-2)}{x^{a-2}} + 4b^2\left(\frac{a}{2} - 1\right)\frac{\Gamma(a-3)}{x^{a-3}} - \ldots\right] \\ \quad + C_2 e^{bx}\left[1 - bx + \frac{b^2(a+2)x^2}{2!(a+1)} - \frac{b^3(a+2)(a+4)x^3}{3!(a+1)(a+2)} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{b^4(a+2)(a+4)(a+6)x^4}{4!(a+1)(a+2)(a+3)} - \ldots\right] \end{array}\right.$$

und dieses ist denn doch ganz entschieden vorzuziehen den von Herrn Petzval herrührenden divergenten Reihen.

Mit welchem Rechte kann denn Herr Petzval sagen, dass ich die Function *complémentaire* rein vergessen habe, und sogar die, ihm und jedem seiner Schüler bekannte Integrationsconstante, wenn ich nicht nur zu Anfang meines Memoires, sondern zum Ueberflusse auch noch am Ende desselben ausdrücklich auf dieselbe aufmerksam machte?

Da ich die von Herrn Petzval gegebenen Reihen 14) für alle jene Fälle, wo $\frac{a}{2}$ keine ganze Zahl ist, für unbrauchbar erklärte, da sie divergent sind, so findet Herr Petzval sich veranlasst, Folgendes darüber zu sagen:

„Die Rede ist von einer Reihe, die zur Classe der sogenannten halbconvergirenden gehört, d. h. man nähert sich, mehr und mehr Anfangsglieder zusammen nehmend, anfänglich dem wahren Werthe der Function, welche dieselbe darstellen soll, immer mehr, dann aber später entfernt man sich von ihm wieder. Diese ist es, die Herr Spitzer für „unbrauchbar“ erklärt. Ich erwiedere darauf: Ich und mehrere berühmte Analysten vor mir haben sie gebraucht und brauchbar gefunden.

Reihen sind eines der wirksamsten analytischen Hülfsmittel, und haben bisher das Schicksal gehabt aller grossen wissenschaftlichen Werkzeuge: erst überschätzt, dann theilweise unterschätzt, sind sie gegenwärtig daran, in gehöriger Weise gewürdigt zu werden. Nachdem man mit ihrer Hülfe trigonometrische und logarithmische Tafeln construirt hatte, fand man, dass sie bei unvorsichtigem Gebrauche zu Irrthümern verleiten, und letzteres namentlich dann, wenn sie divergiren.

Nun waren die grössten mathematischen Geister Europa's wie Gauss, Cauchy damit beschäftigt, Kennzeichen der Convergenz oder Divergenz aufzustellen, und es wurde der convergirenden Reihe allein das Recht zugesprochen, die Function zu repräsentiren, bis endlich Cauchy selbst die Bemerkung machte, dass überhaupt gar keine unendliche Reihe, weder eine convergirende noch eine divergente, als der sichere Repräsentant einer Function angesehen werden könne, weil es Functionen giebt, von denen sämmtliche Glieder der aufsteigenden Reihenentwickelung verschwinden. Wenn man daher in irgend einer Rechnung die Function y einer Variablen x etwa erhielte in der folgenden wohlbekannten Form:

$$56)\qquad y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

so kann man nicht mit Gewissheit sagen, dass $y = \sin x$ sei, weil es noch eine unendliche Menge anderer Functionen giebt, denen dieselbe Reihenentwickelung zukommt, z. B.

$$57)\qquad \left\{ \begin{array}{l} y = \sin x + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ y = \sin x + e^{-\left(\frac{k}{x}\right)^4} \end{array} \right.$$

etc. Diese Bemerkung Cauchy's*) hat besonders auf dem Felde der Integration der Differentialgleichungen Werth, weil sich derlei Formen in den Integralen nicht selten nachweisen lassen. Die hier angeführten sind z. B. jedesmal im Integral vorhanden, wenn der erste Coefficient der Differentialgleichung den Factor x^3 oder x^5 besitzt.

Was soll man gegenwärtig anfangen? Die divergenten Reihen können mitunter zu einem Irrthume verleiten, aber die convergirenden auch. Will man alle Reihen exiliren, so hat man die ganze Mathematik aufgehoben. Ich antworte mit der Gegenfrage. Was thut der kluge Inhaber einer Werkstätte, wenn sich einer seiner Arbeiter aus Ungeschicklichkeit mit einem scharfen Werkzeuge verletzt hat? Schafft er etwa alle scharfen Werkzeuge ab? Die Antwort liegt auf der Hand, sie lautet: Nein, denn wer ungeschickt ist, kann sich auch mit einem stumpfen Werkzeuge verletzen. Er wird daher lieber seinen Leuten die gehörigen Vorsichten ein-

*) Ich beuge mich vor dem Geiste Cauchy's, kann mich aber dennoch seiner Ansicht nicht anschliessen, sondern erkläre trotzdem offen, dass ich aus der Gleichung 56) mit Bestimmtheit auf $y = \sin x$ schliesse.

prägen, und hierin liegt auch der wahre Begriff der mathematischen Strenge. Ich habe also, wie gesagt, die halbconvergirenden Reihen, die Herr Spitzer nicht brauchen kann, nebst ihren ähnlich gestalteten Schwestern unter den gehörigen Vorsichten brauchbar gefunden, und wenn erst die fünfte Lieferung meines Werkes erschienen sein wird, hoffe ich, dass auch Herr Spitzer, in mehreren Beispielen diese Brauchbarkeit entweder anerkennen oder neuerfinden wird. Aber, welche ist denn jetzt die Form, welche Herr Spitzer anstatt der angeblich unbrauchbarcn setzt? Sie ist die folgende:

$$48)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & C_1 e^{bx}\left[\frac{\partial^{\frac{a}{2}-1}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-1}} + 2b\binom{\frac{a}{2}-1}{1}\frac{\partial^{\frac{a}{2}-2}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-2}}\right. \\ & \left. + 4b^2\binom{\frac{a}{2}-1}{2}\frac{\partial^{\frac{a}{2}-3}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-3}} + \ldots\right] + \\ & + C_2 e^{-bx}\left[\frac{\partial^{\frac{a}{2}-1}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-1}} - 2b\binom{\frac{a}{2}-1}{1}\frac{\partial^{\frac{a}{2}-2}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-2}}\right. \\ & \left. + 4b^2\binom{\frac{a}{2}-1}{2}\frac{\partial x^{\frac{a}{2}-3}\left(x^{-\frac{a}{2}}\right)}{\partial x^{\frac{a}{2}-3}} - \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Von diesen Reihen beweist nun Herr Spitzer, dass sie convergiren. Er hat die Bemerkung Liouville's, die er früher nicht unterdrücken konnte *), ganz vergessen, sowohl bei der Aufstellung der Reihe, wie bei dem Beweise der Convergenz; er hat ganz vergessen, dass jedem Gliede seines Integrales eine unendliche Reihe mit unbekannten Coefficienten **), von deren Werth man nichts weiss, als Function *complémentair* zugesetzt werden muss."

Ich komme nun weiter. Nachdem ich die zwei Beispiele durchgeführt habe, zeigte ich, dass das Integral der Gleichung

$$23)\quad (m+x)y'' + [A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = 0$$

in dem speciellen Falle, wo

$$58)\qquad A+B=1$$

ist, und A, B positive Zahlen bedeuten, oder imaginäre, mit positiven reellen Bestandtheilen, folgende merkwürdige Gestalt haben:

*) Da Herr Petzval meine Arbeit Punkt für Punkt gelesen hat, so musste er ja offenbar die letzte Seite dieser Arbeit gesehen haben, dann aber ist es mir unbegreiflich, wie er solche Unwahrheiten so oftmals wiederholen kann.

**) Liouville hält die Function *complémentair* für eine ganze algebraische Function mit einer endlichen Anzahl von Gliedern.

$$82)\left\{\begin{aligned} y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \\ + C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du \end{aligned}\right.$$

Ich habe ferner, in einem der kaiserlichen Akademie am 7 October 1857 überreichten Memoire das Integral der Gleichung 23) auch in dem Falle durch bestimmte Integrale angegeben, wo A und B beliebige positive Zahlen bedeuten, oder imaginäre, mit positiven reellen Bestandtheilen, wenn nur $A+B$ eine ganze positive Zahl ist. Ein diesem Falle entsprechendes Beispiel liefert die Gleichung

$$60) \qquad xy'' + (2n+1)y' - b^2 xy = 0$$

welche nach der von mir herrührenden Formel folgendes Integral giebt:

$$61) \left\{\begin{aligned} y = e^{bx} \frac{d^n}{dx^n} \Big\{ e^{-2bx} \frac{d^n}{dx^n} \Big[C_1 e^{bx} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{ux}\, du}{\sqrt{u^2-b^2}} \\ + C_2 e^{bx} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{ux} \log[x(u^2-b^2)]}{\sqrt{u^2-b^2}} du \Big] \end{aligned}\right.$$

unter n Null oder eine ganze positive Zahl verstanden, und aus dieser Formel ergiebt sich mit Leichtigkeit das Integral der Gleichung

$$62) \qquad xz'' - (2n+1)z' - b^2 xz = 0,$$

denn man hat, nach einem von Lebesgue herrührenden Satze, der im 11. Bande von Liouville's Journal veröffentlicht ist,

$$63) \qquad z = x^{2n+1} y'$$

wo y den in 61) aufgeschriebenen Werth hat, und n wieder entweder Null ist, oder eine ganze positive Zahl.

Von diesen merkwürdigen Formeln, welche gültig sind, mag x nun positiv sein oder negativ, reell oder imaginär, findet sich in dem ganzen Werke von Petzval nicht eine Spur, und dennoch gebraucht er die Worte: „Nachdem Herr Spitzer seinen Beweis geschlossen, fährt er fort, die Differentialgleichungen, die ich als Beispiele benutzt habe, unerbittlich abzumergeln, so, dass es beinahe den Anschein gewinnt, als wollte er mir zeigen, wie ich es hätte machen sollen."

Ich frage Herrn Petzval, hat er das Integral 59) auch nur geahnt? oder das Integral 61)? Kommt in seinem ganzen voluminösen Werke auch auch nur eine dieser Formen vor? Oder hat Herr Petzval diese vielleicht anderswo gesehen? Oder sind diese merkwürdigen Formen nutzlos, weil sie Herr Petzval nicht fand?

Ich betrachtete alsdann die Gleichung 1) in jenem speciellen Falle, wo der aus den Coefficienten dieser Gleichung gebildete Bruch 21) eine Zerlegung auf folgende Weise gestattet:

$$64)\qquad \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha}$$

Die Gleichung 1) erscheint alsdann in der Gestalt:

$$65)\quad (m+x)y'' + [B - 2\alpha(m+x)]y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]y = 0$$

Herr Petzval giebt Seite 47 seines Werkes ein particuläres Integral für solche Gleichungen. Dieses von ihm gegebene ist aber nur in dem sehr speciellen Falle gültig, wenn A, B und α positiv sind, ferner $m=0$ ist, und endlich x negativ. Die vom ihm gegebene Formel ist:

$$66)\qquad y = C\int_{\alpha+\varepsilon}^{\infty} e^{ux - \frac{A}{u-\alpha}} (u-\alpha)^{B-2} du$$

wo ε eine, der Null sich ohne Ende nähernde Zahl ist. — Ich aber integrire die Gleichung nicht wie Herr Petzval, denn das, was Herr Petzval giebt, kann ich unmöglich als das Integral der Gleichung 65) ansehen, denn es ist ja nur ein particuläres Integral in einem äusserst speciellen Falle; ich setze, um die Gleichung 65) zu integriren,

$$24)\qquad y = e^{\alpha x} z$$

und komme hierdurch zu der Gleichung

$$67)\qquad (m+x)z'' + Bz' + Az = 0$$

welcher man auch im zweiten Bande des Petzval'schen Werkes Seite 31 begegnet, dort mit (35) bezeichnet sieht, aber daselbst nicht integrirt findet, sondern von welcher er nur sagt, dass sie nicht durch bestimmte Integrale, auch nicht durch Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl integrirbar sei. Früher aber, nämlich Seite 104 des ersten Bandes sagt Herr Petzval: „Und so wären wir denn in allen Fällen zu den allgemeinen, mit der gehörigen Anzahl von Constanten versehenen Integralen der Gleichungen von der Form:

$$2)\ (a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \ldots + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

gelangt. Wir können also allgemein annehmen, dass eine jede Differentialgleichung von beliebig hoher Ordnung, und mit Coefficienten, die nach der unabhängigen Variablen vom ersten Grade sind, durch unsere Methode vollständig integrirt werden könne, und dass diejenigen particulären Integrale, aus welchen sich das allgemeine zusammensetzt, in drei verschiedenen Formen erscheinen, nämlich: in der eines bestimmten Integrals, ferner in der eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, und endlich als Product aus einer Exponentielle in eine endliche oder unendliche, nach absteigenden Potenzen der Variablen geordnete Reihe.“

Seite 31 des zweiten Bandes sagt Herr Petzval, dass das Integral der Gleichung 67) die Form habe:

$$68)\qquad z = C_1 e^{\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x}}} z_1 + C_2 e^{\beta\int\frac{dx}{\sqrt{x}}} z_2$$

woselbst α und β bestimmte Constanten vorstellen, und z_1 und z_2 Functionen der ersten Classe sind, unter welchen Herr Petzval solche Functionen von

x versteht, welche die Eigenschaft haben, beim fortwährenden Wachsen von x sich einer Potenz von x^p fortwährend zu nähern, unter p eine endliche, übrigens aber nach Belieben positive oder negative, ganze oder gebrochene, reelle oder imaginäre Zahl verstanden, und folglich Differentialquotienten zu bieten, die je um die Einheit niedriger sind in der Ordnungszahl. Man darf nun nicht glauben, dass eine Petzval'sche Function der ersten Classe eine ganze Function von x sein müsse, oder eine, nach absteigenden Potenzen von x geordnete convergirende Reihe, sondern es kann auch ein bestimmtes Integral sein, oder eine andere, vielleicht bisher noch unbekannte Form haben.

Aber auch mit der Form des Integrales 68) scheint Herr Petzval nicht zufrieden, denn Seite 353 des zweiten Bandes sagt Herr Petzval wieder, „dass bei Gleichungen dieser Art die Entwickelung in aufsteigenden Reihen am Orte sei. Diess ist um so mehr zu beherzigen, als gerade bei solchen Gleichungen die sämmtlichen andern Integrationsmethoden, die asymptotischen etc. ihren Dienst versagen, indem sie entweder zu Ausdrücken führen, mit denen man weder weiter rechnen noch eine Untersuchung der analytischen Eigenschaften einleiten kann, oder zu vorgängigen, sehr weitläufigen Transformationen nöthigen."

Welchen Weg sollte man nun einschlagen, wenn man die Gleichung 67) nach Petzval's Methode integriren wollte?

Ich musste mir daher einen eigenen Weg suchen, und fand, durch eine kaum eine Octavseite füllende Rechnung

$$69)\qquad z=\frac{\partial^{B-\frac{1}{2}}}{\partial x^{B-\frac{1}{2}}}\left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}}+C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}}\right]$$

somit für das Integral der Gleichung 65)

$$70)\qquad y=e^{\alpha x}\frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{d x^{B-\frac{1}{2}}}\left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}}+C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}}\right]$$

falls nur nicht $A=0$ ist, in welchem speciellen Falle aber die Gleichung 67) übergeht in

$$71)\qquad (m+x)z''+Bz'=0$$

somit sehr leicht zu integriren ist.

Ich habe nun von diesen Integralen eine schöne Anwendung auf die Riccati'sche Gleichung gemacht. Ist nämlich

$$72\qquad y''=a^2x^ny=0$$

so ist das Integral derselben:

$$73)\qquad y=\frac{\partial^{\frac{n}{2n+4}}}{\partial t^{\frac{n}{2n+4}}}\left[C_1 e^{\frac{2a\sqrt{t}}{n+2}}+C_2 e^{-\frac{2a\sqrt{t}}{n+2}}\right]$$

woselbst $t=x^{n+2}$ 74) ist. — Weitere Anwendungen machte ich in meiner am 7. October 1857 veröffentlichten Abhandlung bei Gelegenheit der Inte-

gration partieller Differentialgleichungen. Ich fand nämlich für das Integral der Gleichung

$$75)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{dx_n^2}\right)$$

das Integral

$$76)\qquad \varphi=\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{du^{\frac{n-2}{2}}}\left[\psi_1\left(t+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)+\psi_2\left(t-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right];$$

ferner für die Gleichung

$$77)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}\right)$$

das Integral

$$78)\qquad \varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2}\cdot\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{du^{\frac{n-1}{2}}}\left[\psi_1\left(2\omega\sqrt{t}+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)+\psi_2\left(2\omega\sqrt{t}-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right]$$

woselbst

$$78)\qquad u=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$$

ist. — Ich bemerke endlich noch bei dieser Gelegenheit, dass die von Liouville integrirte Gleichung

$$27)\qquad (mx^2+nx+p)y''+(qx+r)y'+sy=0$$

in dem speciellen Falle, wo sie die Form

$$79)\qquad (nx+p)y''+ry'+sy=0$$

annimmt (welches genau die Form der Gleichung 67 ist), nicht nach der Methode integrirt werden kann, welche für die allgemeinere Gleichung 27) von Liouville gegeben worden ist, und dass Herr Petzval, der die Liouville'sche Gleichung, nach seinen eigenen Worten, bis zur Peinlichkeit vorsichtig untersuchte, diesen in 79) angeführten Fall gar nicht einmal erwähnte.

Alsdann wendete ich mich zu den Gleichungen, für welche der Bruch

$$80)\qquad \frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+b_1u+b_0}=mu+n+\frac{A}{u-\alpha}$$

ist, und finde, dass die Gleichung 1) in diesem Falle die Form

$$81)\qquad my''+(n-m\alpha+x)y'+[A-\alpha(n+x)]y=0$$

hat und ihr Integrale folgendes ist:

$$82)\qquad \left\{\begin{aligned} y=C_1e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[e^{-\frac{m\alpha+n}{m}x-\frac{x^2}{2m}}\right]\\ +C_2e^{-\frac{nx}{m}-\frac{x^2}{2m}}\int^{A}e^{\frac{m\alpha+n}{m}x+\frac{x^2}{2m}}dx^A\end{aligned}\right.$$

Endlich betrachtete ich die Gleichung 1) in folgender Form:

$$83)\qquad a_2y''+a_1y'+(a_0+x)y=0$$

welche dem letzten Ausnahmsfalle entspricht, und sagte, dass hier der Laplace'sche Weg, welchen auch Petzval adoptirte, zum Integrale führt.

Nachdem ich die Gleichungen der Form 1) vollständig erledigt hatte, und in ganz anderer Form integrirte, als Herr Petzval, wandte ich mich zu den Differenzengleichungen von der Form

$$84)\qquad (a_2+b_2x)\Delta^2 y+(a_1+b_1x)\Delta y+(a_0+b_0x)y=0$$

und führte hier zum ersten Male in die Wissenschaft, und mit glücklichem Erfolge Differenzquotienten ein mit allgemeiner Ordnungszahl, und zum Schlusse meiner Arbeit zeigte ich die Ausdehnung meiner Methode auf Gleichungen der Form

$$2)\ (a_n+b_nx)y^{(n)}+(a_{n-1}+b_{n-1}x)y^{(n-1)}+\ldots+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0$$

Setzt man nämlich in dieselbe

$$85)\qquad y=e^{ux}z$$

und bezeichnet man, wie Herr Petzval der Kürze halber

$$86)\qquad \begin{cases} a_nu^n+a_{n-1}u^{u-1}+\ldots+a_1u+a_0 \text{ mit } U_0 \\ b_nu^n+b_{n-1}n_{n-1}+\ldots+b_1u+b_0 \text{ mit } U_1 \end{cases}$$

so erhält man:

$$87)\qquad \left\{ \begin{array}{l} (U_0^{(n)}+xU_1^{(n)})\dfrac{z^{(n)}}{n!}+(U_0^{(u-1)}+xU_1^{(n-1)})\dfrac{z^{(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots \\ \qquad +(U_0'+xU_1')z'+(U_0+xU_1)z=0 \end{array} \right.$$

(welche Gleichung aber nicht in Petzval's Werk erscheint) und wählt man jetzt u so, dass

$$88)\qquad U_1=0$$

ist, so wird, wenn die constante Zahl α eine einfache Wurzel dieser Gleichung ist, die Substitution

$$24)\qquad y=e^{\alpha x}z$$

den letzten Coefficienten der Gleichung 87) in eine Constante verwandeln. Wird dann die Gleichung 87) einer $-A$maligen Differentiation unterworfen, unter A diejenige Zahl verstanden, welche man bei der Zerlegung von $\frac{U_0}{U_1}$ in Partialbrüche als Zähler jenes Bruches erhält, dessen Nenner $u-\alpha$ ist, so erhält man durch Einführung einer neuen Variablen y_1 vermittelst

$$89)\qquad z^{(-A+1)}=y_1$$

eine Gleichung, welche genau die Form 2) hat, aber um eins niedriger in der Ordnungszahl ist. Lässt sich dieses Verfahren wiederholt anwenden, so kann man die Ordnungszahl der vorgelegten Differentialgleichung wiederholt um eine Einheit erniedrigen. — So erhielt ich für Differentialgleichungen dritter Ordnung von der Form 2), wenn

$$90)\qquad \frac{U_0}{U_1}=m+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta}+\frac{C}{u-\gamma}$$

ist, folgendes particuläre Integral

$$91)\qquad y=e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[\frac{e^{(\gamma-\beta)x}}{(m+x)^C}\right]\right\}$$

ferner für Differentialgleichungen der vierten Ordnung, wenn

$$92)\qquad \frac{U_0}{U_1}=m+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta}+\frac{C}{u-\gamma}+\frac{D}{u-\delta}$$

ist, das Integral

$$93)\qquad y=e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left\{e^{(\gamma-\beta}\frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}}\left[\frac{e^{(\delta-\gamma)x}}{(m+x)^D}\right]\right\}\right]$$

etc. etc. Sollte der specielle Fall eintreten, dass für

$$24)\qquad y=e^{\alpha x}z$$

die Gleichung 87) folgende Form annimmt

$$94)\qquad \begin{cases}(U_0^{(n)}+x\,U_1^{(n)})\dfrac{z^{(n)}}{n!}+(U_0^{(n-1)}+x\,U_1^{(n-1)})\dfrac{z^{(n-1)}}{(n-1)!}+\dots\\ \qquad+(U_0^{(r)}+x\,U_1^{(r)})\dfrac{z^{(r)}}{r!}=0\end{cases}$$

was jedesmal dann eintritt, wenn für den bestimmten Werth $u=\alpha$ folgendes System von Gleichungen erfüllt wird:

$$95)\qquad \begin{cases}U_0=0\\U_1=0\end{cases}\quad\begin{cases}U_0'=0\\U_1'=0\end{cases}\quad\begin{cases}U_0^{(r-1)}=0\\U_1^{(r-1)}=0\end{cases}$$

d. h. wenn U_0 und U_1 den gemeinschaftlichen Factor $(u-\alpha)^r$ besitzen, so wird die Gleichung 94) erfüllt, für

$$96)\qquad z^{(r)}=0$$

d. h. für

$$97)\qquad z=A_0+A_1x+A_2x^2+\dots+A_{r-1}x^{r-1}$$

und somit die Gleichung 2) für:

$$98)\qquad y=e^{\alpha x}(A_0+A_1x+A_2x^2+\dots+A_{r-1}x^{r-1})$$

wie diess auch Herr Petzval, aber auf anderem Wege findet. In diesem speciellen Fall kann die Gleichung 94) durch die Substitution

$$99)\qquad z^{(r)}=y_1$$

vereinfacht werden, denn man erhält alsdann eine Gleichung von der Form 2), deren Ordnungszahl aber um r Einheiten niedriger als 2) ist. Mit anderen Worten, wenn U_0 und U_1 den Factor $(u-\alpha)^r$ gemeinschaftlich besitzen, so führt die Substitution

$$100)\qquad y=e^{\alpha x}\int^r y_1\,dx^r$$

auf folgende Gleichung der Ordnung $n-r$

$$101)\qquad \begin{cases}(U_0^{(n)}+x\,U_1^{(n)})\dfrac{y_1^{(n-r)}}{n!}+(U_0^{(n-1)}+x\,U_1^{(n-1)})\dfrac{y_1^{(n-r-1)}}{(n-1)!}+\dots\\ \qquad+(U_0^{(r)}+x\,U_1^{(r)})\dfrac{y_1}{r!}=0.\end{cases}$$

Nach dieser Darlegung der in meiner Abhandlung enthaltenen Integrations-Methode, frage ich, wie lassen sich die Worte des Herrn Professor Petzval rechtfertigen, die er am Anfange seiner Schrift sagt: „Als festgestellte Thatsache ist anzunehmen, dass Herr Spitzer und ich geschrieben

haben über einerlei Gegenstand. Die Priorität kann daher nur entweder Herrn Spitzer, oder mir, oder keinem von Beiden gebühren. Wenn ich daher nachweisen kann, dass in dem vorgelegten Memoire gar nichts Herrn Spitzer angehört, bis auf dasjenige, was entweder dem Inhalte, oder der Form nach unrichtig ist, und dass alles andere eher mein, als Herrn Spitzer's Eigenthum sei: so ist offenbar der volle Beweis der Ungerechtigkeit der gegen mich erhobenen Anklage geliefert. Ich kann daher bei der Unbestimmtheit der Anklage nichts anders thun, als die Arbeit meines Herrn Gegners Punkt für Punkt vornehmen, und das, was Herrn Spitzer eigenthümlich angehört, von demjenigen, was wahrscheinlich mein, oder Anderer Eigenthum ist, absondern, indem ich haarklein angebe, in welchem Buche dieses letztere zu finden sei, und auf welcher Seite, und zwar in einem Werke, das Herrn Spitzer nach seinem eigenen Geständniss bekannt ist."

Ich will Herrn Petzval mit wenig Worten entgegnen. Meine Anklage ist eine vollkommen bestimmte, und lautet: Die Integrations-Methode, die er Seite 38 seines Werkes giebt, und deren Entdeckung er daselbst für sich in Anspruch nimmt, so wie die, welche er für Differenzen-Gleichungen Seite 113 giebt, und ebenfalls für sich in Anspruch nimmt, rühren von Laplace her, und befinden sich in den Memoiren der Pariser Akadmie vom Jahre 1782, ferner die Integration der Gleichung

$$3) \qquad x y^{(n)} - y = 0$$

mit Hülfe unendlicher Reihen rührt von mir her, und beruht blos auf einer Verallgemeinerung des von Euler auf die Gleichung

$$8) \qquad x y'' - y = 0$$

angewandten Verfahrens, wurde auch von mir in Grunert's Archiv veröffentlicht, und zu einer Zeit, wo Herr Petzval noch die unerschütterliche Ueberzeugung hatte und aussprach, dass ein Integriren nach aufsteigenden Potenzen der unabhängigen Variablen völlig nutzlos sei, und kann daher auch nicht Herrn Petzval zugeschrieben werden. — Diese von mir erhobenen Anklagen konnte Prof. Petzval nicht widerlegen, und ist auch in der That die Widerlegung schuldig geblieben.

Die Anklagen aber, welche Herr Petzval gegen mich erhoben, zerfallen Punkt für Punkt in Nichts. — Herr Petzval sagt wiederholt, ich folge Schritt für Schritt seinen Fusstapfen, nun will ich zeigen, wie diess zu verstehen sei. Professor Petzval und ich schrieben über die Integration der Gleichung

$$1) \qquad (a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

das ist wahr. Herr Petzval beginnt damit, wo möglich den ersten Coefficienten a_2 wegzuschaffen, ich beginne damit, wo möglich den letzten Coefficienten b_0 zu entfernen. Hierdurch betrete ich schon von Anfang an, eine andere Fährte wie Petzval. Kaum ist mir diess durch die Substitution

$$24) \qquad y = e^{\alpha x} z$$

welche ich von Serret holte, gelungen, so schlage ich den Weg ein, den Liouville für die Gleichungen

$$27)\qquad (mx^2+nx+p)y''+(qx+r)y'+sy=0$$

mit so glücklichem Erfolge betrat, und komme zu der Formel

$$28)\qquad y=C_1 e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right]+C_2 e^{\beta x}\frac{\partial^{B-1}}{\partial x^{B-1}}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^A}\right]$$

welche neu ist, von mir zuerst angegeben wurde, und bisher weder von Herrn Petzval, noch von Liouville, noch von irgend einem Andern vor mir, veröffentlicht wurde, wenigstens ich habe diese Formel nirgends gesehen. Ob es leicht oder schwer war, diese Formel aufzustellen, das will ich dahingestellt sein lassen, das kommt hier nicht in Frage. — Herr Petzval schreibt sie dem Liouville zu. Wie kann aber diese Formel Liouville gehören, wenn der sehr specielle Fall dieser Formel, wo

$$31)\qquad m=0,\quad A=B,\quad \alpha+\beta=0$$

nicht Liouville, sondern dem Serret gehört? Mit welchem Rechte kann Herr Petzval mein geistiges Eigenthum mir nehmen, und es einem Andern schenken?

Zwei Beispiele, die ich aus Herrn Petzval's Werke nahm, führte ich zur Erläuterung an, und komme augenblicklich zu den von Herrn Petzval gefundenen Lösungen derselben, das nennt Herr Petzval „ein Schritt für Schritt in seinen Fusstapfen gehen.“

Mit demselben Rechte könnte man sagen: Lagrange, Euler, Cauchy, Fourier etc. etc. gingen Schritt für Schritt in die Fusstapfen von Newton, weil sie alle die Gleichung

$$x^3-2x-4=0$$

lösten, und dieselbe Wurzel fanden, wie Newton.

Herr Petzval hält mir's übel, weil ich den halbconvergenten Reihen die convergenten vorziehe, und überhaupt, weil ich die von ihm gegebenen divergenten Reihen für unbrauchbar finde. — Wenn Herr Petzval die halbconvergenten Reihen brauchbar findet, warum zerplagt er sich am Anfange seines Werkes mit dem Convergenzbeweis?

Nach der Entwickelung der Formel 28), welche nur einen ganz kleinen Theil meines Memoires bildet, entwickelte ich die Formel

$$70)\qquad y=e^{\alpha x}\frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}}\left[C_1 e^{+2\sqrt{-A(m+x)}}+C_2 e^{-2\sqrt{-A(m+x)}}\right]$$

welche dann stattfindet, wenn der aus den Coefficienten der Gleichung gebildete Bruch

$$\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+a_1u+c_0}$$

sich zerlegen lässt in:

$$m+\frac{A}{(u-\alpha)^2}+\frac{B}{u-\alpha}$$

in welchem Falle Herr Petzval für das Integral der vorgelegten Gleichung erst ein bestimmtes Integral für gut, dann für schlecht findet, hernach wieder eine absteigende, mit einer Exponentiellen verbundene Entwickelung für gut hält, und endlich alles verwirft, und die aufsteigende Entwickelung, welche anfänglich zu wiederholten Malen für eine nutzlose erklärt wurde, als hier vorzüglich anwendbar räth. So was nennt Herr Petzval wahre Wissenschaft, solche Methoden stehen nach seiner Meinung fest da, wie das grosse Wiesbachhorn!

Oder gehört die Formel 70 vielleicht auch Herrn Petzval? oder meint Herr Petzval, dass sie als specieller Fall in der Liouville'schen enthalten sei? — Wo kommt ferner, da ja Herr Petzval alles haarklein anderswo findet, die Formel

$$82)\quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & C_1 e^{\alpha x} \frac{\partial^{A-1}}{\partial x^{A-1}} \left[e^{-\frac{m\alpha+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \right] \\ & + C_2 e^{-\frac{nx}{m} - \frac{x^2}{2m}} \int^{A} e^{\frac{m\alpha+n}{m}x + \frac{x^2}{2m}} dx^A \end{aligned} \right.$$

vor, die das Integral der Gleichung

$$81)\qquad my'' + (-m\alpha + n + x)y' + [A - \alpha(n + x)]y = 0$$

ist? Herr Petzval sage mir es. Oder sind vielleicht die Gleichungen dritter und höherer Ordnungen von der Form 2) auch specielle Fälle der Liouville'schen?

Wer hat noch bisher für die Differenzen-Gleichung

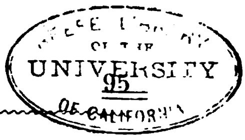
$$102)\quad (a_2 + b_2 x)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{\Delta y}{\Delta x} + (a_0 + b_0 x)y = 0$$

folgendes Integrale gegeben:

$$103)\quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & C_1 (1 + \alpha h)^{\frac{x}{h}} \cdot \frac{\Delta^{\frac{A-1-h\alpha}{1+h\alpha}}}{h^{\frac{A-1-h\alpha}{1+h\alpha}}} e^{\Sigma \log \frac{(1+h\alpha)(1+h\beta)(m+x) - Ah(1+h\beta)(-Bh(1+h\alpha)}{(1+h\alpha)[(1+h\alpha)(m+x) - Ah)]}} \\ & + C_2 (1 + \beta h)^{\frac{x}{h}} \cdot \frac{\Delta^{\frac{A-1-h\alpha}{1+h\alpha}}}{h^{\frac{A-1-h\alpha}{1+h\alpha}}} e^{\Sigma \log \frac{(1+h\alpha)(1+h\beta)(m+x) - Ah(1+h\beta) - Bh(1+h\alpha)}{1+h\beta)[(1+h\beta)(m+x) - Bh]|}} \end{aligned} \right.$$

woselbst A, B, m, α, β die in 22) angeführten Bedeutungen haben, und welches um so merkwürdiger ist, weil es Differenzquotienten von allgemeiner Ordnungszahl hat, und unmittelbar die Form 28) annimmt, wenn man h gegen Null convergiren lässt? Oder ist dieses Integral werthlos? Wie kann meine Arbeit, die ich über die Integration der Gleichung 1) geschrieben, ein Aphorismengerümpel genannt werden, wenn es nicht auch zugleich die Petzval'sche, über denselben Gegenstand in Haidinger's naturwissenschaftlichen Abhandlungen veröffentlichte, ist?

Ich will, um den Leser nicht zu ermüden, schliessen. Gerne unter-



werfe ich meine Arbeiten dem Urtheile der Mathematiker und erkenne ein solches mit Dank selbst dann an, wenn es für mich ungünstig ausfallen sollte. Aber eine Beurtheilung, wo mir Fehler, die ich nicht begangen, angedichtet werden, und meine Entdeckungen mir genommen und Anderen, die sie nicht gemacht, zugeschrieben, gegen eine solche unwahre und verleumderische Beurtheilung lege ich feierlichst Verwahrung ein.

Lehrbuch der Geometrie für Schulen und zum Selbstunterrichte. 1. Theil: Geradlinigte Planimetrie, 2. Theil: Kreislehre und ebene Trigonometrie; von K. Snell, Professor in Jena. 3. Theil: Stereometrie, von H. Schäffer, Professor an der Universität Jena. Leipzig, Brockhaus 1857.

Die beiden ersten Theile dieses Werkes bilden die zweite und erweiterte Auflage des 1841 erschienenen Lehrbuchs der Geometrie von K. Snell und bedürfen keiner sehr ausführlichen Besprechung, da der Unterschied zwischen beiden Auflagen mehr quantitativer als qualitativer Natur ist. Wir finden denselben natürlichen und heuristischen Gedankengang wie früher, dieselbe kirchenväterliche Breite der (im Uebrigen guten) Darstellung und auch dieselben Ungenauigkeiten, an denen die frühere Auflage laborirte. In dieser Beziehung heben wir namentlich zwei Stellen als sehr ungenügend hervor.

Die Congruenzlehre fängt der Verfasser mit dem schwierigsten Falle dreier gegebenen Dreiecksseiten an und argumentirt wie folgt: legt man eine Seite a hin und an deren Endpunkt die andere b mit einem ihrer Endpunkte, so kann man b immer noch um den festliegenden Endpunkt herumdrehen; da aber die Entfernung der anderen Endpunkte von a und b so gross wie c sein soll, so wird durch diese Vorschrift die in Drehung begriffene Linie in einer einzigen ganz bestimmten Lage gegen a fixirt... und damit das Dreieck bestimmt. — Gleich darauf wird auch erwähnt, wie man mit Zirkel und Lineal das Dreieck aus a, b, c zu construiren hat. — Es scheint dem Verfasser gänzlich entgangen zu sein, dass hierin eine *petitio principii* steckt; wenn sich zwei Kreise in nur einem Punkte schneiden könnten, so wäre der Beweis richtig, aber gerade weil zwei Durchschnitte vorhanden sind und folglich auch zwei Dreiecke entstehen, bedarf es einer besonderen Untersuchung, ob diese zwei Dreiecke nur der Lage nach verschieden sind oder ob sie nicht etwa bei gleichen Seiten verschiedene Winkel haben. — Man könnte, den Verfasser parodirend, hierzu folgendes arithmetische Seitenstück liefern: „wenn über den Werth des Produktes $x(9-x)$ nichts Bestimmtes gesagt ist, so darf x beliebig gewählt werden, wenn aber der Werth dieses Produktes gerade $=14$ sein soll, so wird durch diese Vorschrift das in der Bewegung von 0 bis ∞ begriffene

x in einer bestimmten Stelle fixirt; die Gleichung $x\,(9-x)=14$ hat daher eine einzige positive Auflösung". —

Ein anderer schwacher Punkt findet sich in der Aehnlichkeitslehre. Wenn in dem Dreiecke ABC die Transversale $A'B' \,//\, AB$ gelegt wird, so gilt bekanntlich die Proportion $AC : BC = A'C : B'C$; um dies zu beweisen, denkt sich der Verfasser AC in eine hinreichend grosse Anzahl von Theilen so getheilt, dass A' ein solcher Theilpunkt ist, und kann dann freilich leicht genug zeigen, dass B' der entsprechende Theilpunkt von BC sein muss. Hier übersieht der Verfasser gänzlich den Fall der Incommensurabilität von AC und $A'C$, bei welcher kein Theilpunkt, wie gross auch die Anzahl der Theile sein möge, je mit A' zusammenfallen kann. Diese Ungenauigkeit ist um so mehr zu rügen, als der Verfasser im 2. Theile S. 90 urplötzlich die Irrationalität der Seitenverhältnisse des rechtwinkligen Dreiecks erwähnt, aber gleichwohl kein Bedenken trägt, die früheren, nur für rationale Verhältnisse bewiesenen Sätze ohne Weiteres auf irrationale Verhältnisse auszudehnen.

Den 2. Theil eröffnet eine Philippika gegen die „gangbare Darstellung" der Trigonometrie namentlich gegen das Bestreben mancher Schriftsteller, gleich so allgemeine Definitionen der trigonometrischen Functionen zu geben, dass hieraus der Zeichenwechsel der letzteren von selber folgt. Abgesehen von mancherlei Uebertreibungen und von einigen Redensarten, welche den Laien glauben machen könnten, dass die Mathematiker mit der Trigonometrie noch gar nicht so recht im Reinen seien und dass erst Herr Professor Snell die richtige Behandlung dieser Wissenschaft entdeckt habe, findet sich manches Wahre in der Vorrede und Referent unterschreibt gern des Verfassers principiellen Ausspruch: „Das Negative kommt, um es einmal hier bestimmt und entschieden auszusprechen, als selbstständige Grösse nie anders zum Vorschein, als durch Verallgemeinerung der Formeln über die Grenze hinaus, innerhalb welcher sie zunächst angelegt erscheinen etc.", nur muss Referent dabei gleichzeitig bemerken, dass dieser sehr schöne Satz nicht ganz neu ist und dass gute Schriftsteller diesem Principe schon seit langer Zeit huldigen. So lässt man z. B. die negativen Zahlen dadurch entstehen, dass man den Subtrahenden als möglicherweise grösser wie den Minuenden betrachtet (vergl. u. A. J. H. T. Müller's Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik), ja schon 1833 schrieb der verdienstvolle Magnus in seinen analytisch-geometrischen Aufgaben und Lehrsätzen: „Der Anfangspunkt A der Geraden $AN'NX$ sei gegeben, dann ist für $AN=a$, $AN'=a'$ und $NN'=h$,

$$h=a-a';$$

liegt aber N' nicht auf der Geraden AN, sondern auf ihrer Verlängerung über A hinaus und ist in diesem Falle $AN'=a''$, so hat man für die Entfernung h der Punkte N und N'

$$h=a+a'';$$

beide Formeln lassen sich in die eine $h = a - x$ zusammenfassen, indem man $AN' = x$ setzt und dessen Werth positiv oder negativ nimmt, jenachdem N' auf der einen oder anderen Seite von A liegt".

Aus seinem Principe glaubt der Verfasser schliessen zu müssen, dass man zunächst die spitzwinklige Trigonometrie vollständig erledigen müsse und nachher erst, geleitet durch die Formel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

die allgemeinere Untersuchung über die Functionen beliebiger Winkel anstellen dürfe. Ob diese Folgerung in der That eine strikte und ob das anempfohlene Verfahren, ganz abgesehen von seiner Weitläufigkeit, in wissenschaftlicher und pädagogischer Rücksicht wirklich das beste ist, mögen folgende Bemerkungen zeigen.

Wenn sich Jemand von Hause aus in der glücklichen Lage befindet, die Trigonometrie im beschränktesten Sinne, als blose Dreiecksberechnung, auffassen zu dürfen, wie es z. B. auf Gymnasien geschehen kann, so würden wir es ihm sehr verdenken, wenn er sich und die Jungen mit den trigonometrischen Functionen stumpfer und überstumpfer Winkel abquälen wollte; etwas anders aber liegen die Sachen da, wo einer allgemeineren und freieren Auffassung gehuldigt werden muss. Der Verfasser selbst nimmt die Aufgabe der Trigonometrie nicht in jenem beschränkten, sondern vielmehr im polygonometrischen Sinne, er muss sich also doch auf das Vorkommen stumpfer und überstumpfer Winkel gefasst machen, und so wäre es nur consequent, die Betrachtung hierauf gleich mit anzulegen. Mindestens kann es Referent weder unpädagogisch noch unwissenschaftlich finden, wenn schon frühzeitig auf Winkel grösser als 90° Rücksicht genommen wird. Die Frage ist nur, ob der Zeichenwechsel der trigonometrischen Functionen genügend motivirt, d. h. ob nachgewiesen werden kann, dass jener Zeichenwechsel nothwendig und nicht ein blosser *lusus ingenii* ist. Ohne Zweifel kann dieser Nachweis nicht eher geführt werden, als eine Formel vorhanden ist, worin Cosinus etc. vorkommen, ob man aber gerade bis zu der, verhältnissmässig complicirten Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ warten muss, ist noch eine andere Frage; ja im Gegentheil, wenn sich früher eine einfachere und anschaulichere Formel fände, die gleichfalls auf die Nothwendigkeit der positiven und negativen Cosinus hinwiese, so wäre die Forderung des Verfassers besser erfüllt, als auf jenem umständlichen Wege. Zu einer solchen Formel gelangt man aber, sobald man von dem Begriffe der Projection ausgeht; ist nämlich r' die Projection des beweglichen Radius auf den festen Radius r und s' die Projection des beschriebenen Bogens s, so hat man bei spitzen Winkeln ($s < \frac{1}{2}\pi$),

$$s' = r - r',$$

und bei stumpfen Winkeln

$$s' = r + r',$$

welche Formeln sich zu einer einzigen Formel zusammenziehen lassen,

wenn r' als positiv oder negativ angesehen wird, jenachdem es auf der einen oder anderen Seite liegt. Für $\frac{r'}{r} = \cos x$ hat man jetzt schon das Gesetz des Zeichenwechsels der Cosinus*), auch wird wohl der Verfasser nicht bestreiten wollen, dass diese Ableitung jene Anschaulichkeit besitzt, „die man von geometrischen Behauptungen zu fordern berechtigt ist" (S. 169); an Kürze aber dürfte sie der Snell'schen Deduction jedenfalls überlegen sein, denn der Verfasser braucht nicht weniger als dreissig Seiten, um die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen zu bestimmen.

Trotz dieser Ausstellungen verkennen wir übrigens die mancherlei guten Seiten des Buches nicht und haben für etwaige fernere Auflagen desselben nur den Wunsch, dass sich sein Verfasser zu einer genaueren und knapperen Darstellung bequemen und von dem Hügel der Verachtung herabsteigen möge, um zu entdecken, dass die mathematische Welt nicht so bornirt ist, als er glaubt.

Der dritte, von Professor Schäffer bearbeitete Theil des Werkes hat in seiner Darstellungsweise viel Aehnlichkeit mit den beiden ersten Theilen; der Gedankengang ist heuristisch und anschaulich, die Diction klar und etwas breit, wenn auch bei Weitem nicht in dem Maasse wie bei Snell; die Anordnung des Stoffes ist folgende. Der 1 Abschnitt, „die Lagen gerader Linien gegen Ebenen und der Ebenen gegeneinander", betrachtet in sieben Capiteln sehr ausführlich die Lage einer Ebene im Raume, die Gerade und die Ebene, die Lage zweier Geraden gegen eine Ebene, sowie zweier Ebenen gegeneinander, drei Ebenen, vier und mehr Ebenen, die Polyeder, und schliesst mit einer Reihe von Constructionen. Besondere Aufmerksamkeit hat der Verfasser in Capitel 6 dem Euler'schen Satze geschenkt und namentlich die Fälle untersucht, wo $e + f$ nicht $k + 2$ ist; man wird diese Partie nicht ohne Interesse lesen. Capitel 7 hätte Referent gern um solche Aufgaben vermehrt gesehen, die entweder sehr fundamentaler Natur sind oder bei manchen Untersuchungen besonders häufig vorkommen; z. B. durch einen Punkt eine Gerade zu legen, die zwei sich kreuzende Gerade schneidet; die kürzeste Entfernung zweier Geraden anzugeben, u. dergl. m. — Abschnitt 2 behandelt die Congruenz und Symmetrie der prismatischen und pyramidalen Dreikante, sowie allgemeiner der Prismen, Pyramiden, Obelisken und Polyeder. Am Ende folgen wieder Constructionen, welche durch das Vorige bedingt sind, nämlich die graphische Auflösung der sphärisch-trigonometrischen Aufgaben und die Construction verschiedener Netze. Recht verdienstlich erscheint uns der 3. Ab-

---

*) Man wird vielleicht einwenden, dass es nicht passend sei, mit dem Cosinus anzufangen. In der That ist aber der Cosinus die primitive trigonometrische Function, da sie unmittelbar aus der Vergleichung einer Geraden mit ihrer Projection hervorgeht; deshalb sind auch die Formeln der analytischen Geometrie des Raumes fast durchgängig Cosinusformeln. Eine zufällige Benennung kann aber kein Grund sein, den natürlichen Gedankengang zu ändern.

schnitt, worin die Aehnlichkeit der Prismen, Pyramiden und Polyeder mit grösserer Ausführlichkeit untersucht wird, als dies in den meisten Lehrbüchern der Stereometrie zu geschehen pflegt. Der 4. Abschnitt enthält die gewöhnliche Ausmessung der Polyeder. Gewissermaassen ein besonderes Buch bildet der letzte Abschnitt, betr. „Lehre vom Cylinder, vom Kegel und von der Kugel"; die Darstellung fasst sich hier kürzer und schliesst mit dem Satze des Archimedes. SCHLÖMILCH.

Noch einmal Herr Schnuse!

(Offenes Sendschreiben an die HH. Dr. O. Schlömilch und Dr. B. Witzschel betr.)

Es war ursprünglich nicht meine Absicht, einen Wisch zu beachten, den man eigentlich nur mit der Feuerzange anfassen kann; mehrfache Aufforderungen von Seiten meiner Freunde bestimmen mich aber, so kurz als möglich auf die Punkte zu antworten, wo Herr Schnuse mir Irrthümer nachweisen will.

In Nr. 2 seines Sendschreibens wundert sich Herr Schnuse über meinen Zweifel, ob die Summe der unendlichen Reihe

$$A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 + \dots$$

verschwindet, wenn jedes einzelne ϱ die Null zur Grenze hat. Dieselbe Verwunderung kehrt in Nr. 4 wieder und man muss daraus schliessen, dass Herr Schnuse in allem Ernste meint: „wenn jede der Grössen $\varrho_1, \varrho_2 \dots$ der Null beliebig nahe gebracht werden kann, so ist auch

$$Lim\,(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots) = 0".$$

Die Unrichtigkeit dieses Satzes ist längst schon bewiesen; so convergirt z. B. jede der Grössen

$$\frac{1}{n^2},\ \frac{2}{n^2},\ \frac{3}{n^2},\ \dots \frac{n-1}{n^2}$$

gegen die Grenze Null, wenn n unendlich wächst, dagegen verschwindet die Summe für $n = \infty$ nicht, sondern erhält den Grenzwerth $\frac{1}{2}$. Ferner hat schon Professor Dirichlet gezeigt, dass die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{\varrho}{1^{1+\varrho}} + \frac{\varrho}{2^{1+\varrho}} + \frac{\varrho}{3^{1+\varrho}} + \dots$$

nicht gleichzeitig mit ϱ verschwindet, sondern die Einheit als Grenzwerth annimmt. Ebenso ist für unendlich wachsende x

$$Lim\left\{\frac{x}{x^2+1^2} + \frac{x}{x^2+2^2} + \dots\right\}$$

nicht $= 0$, obschon jedes einzelne Glied verschwindet; vielmehr ist der Grenzwerth $= \frac{1}{2}\pi$. Dergleichen Beispiele können leicht in beliebiger Zahl geliefert werden und mahnen zur Vorsicht. Wenn Herr Schnuse diese Vorsicht für überflüssig hält, so beweist er damit nur seine eigene Ignoranz und überhebt mich eben dadurch völlig der Mühe, diesen Punkt weiter zu erörtern.

Damit hängt ein zweiter Punkt zusammen. Wenn bei verschwindenden δ, $Lim\ \varphi_1(\delta) = a_1$, $Lim\ \varphi_2(\delta) = a_2$ etc., so kann $\varphi_1(\delta) = a_1 + \varrho_1$, $\varphi_2(\delta) = a_2 + \varrho_2$ etc. gesetzt werden, wo $\varrho_1, \varrho_2 \ldots$ zwar nicht bekannt sind, aber mit δ gleichzeitig verschwinden; man hat jetzt

$$\begin{aligned} &Lim\left\{\varphi_1(\delta) + \varphi_2(\delta) + \varphi_3(\delta) + \ldots\right\} \\ = &Lim\left\{\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots \\ + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \end{aligned}$$

und nun entsteht die Frage, ob die Summe der ϱ verschwindet oder nicht. Im ersten Falle ist

$$\begin{aligned} &Lim\left\{\varphi_1(\delta) + \varphi_2(\delta) + \varphi_3(\delta) + \ldots\right\} \\ = &Lim\ \varphi_1(\delta) + Lim\ \varphi_2(\delta) + Lim\ \varphi_3(\delta) + \ldots \end{aligned}$$

im zweiten Falle aber würde die vorstehende Gleichung nicht gelten. Herr Schnuse hält consequenter Weise diese ganze Untersuchung, die in neuerer Zeit auch andere Mathematiker beschäftigt hat, für unnütze Formelmacherei —; ich will dagegen an einem Beispiele zeigen, auf welche Unrichtigkeiten man ohne die nöthige Vorsicht kommen kann. Es sei der Grenzwerth zu bestimmen, welchem sich die Summe

$$S_n = \frac{1^2+n}{1^2(a+n)} + \frac{2^2+n}{2^2(2a+n)} + \ldots + \frac{n^2+n}{n^2(na+n)}$$

für $n = \infty$ nähert. Nach Herrn Schnuse's ungenauer Art zu rechnen müsste man sagen: die Grenzwerthe der einzelnen Glieder sind der Reihe nach $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}$ etc., folglich ist

$$Lim\ S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Darin steckt aber ein bedeutender Fehler. Man hat nämlich identisch

$$\begin{aligned} S_n = &\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\ &- a\left\{\frac{1}{1(a+n)} + \frac{1}{2(2a+n)} + \ldots + \frac{1}{n(na+n)}\right\} \\ &+ \frac{1}{a+n} + \frac{1}{2a+n} + \ldots\ldots + \frac{1}{na+n}; \end{aligned}$$

für unendlich wachsende n wird der erste Theil $= \frac{1}{6}\pi^2$, der zweite Theil verschwindet, wie leicht bewiesen werden kann, der dritte Theil verschwindet aber nicht, sondern geht über in

$$\int_0^1 \frac{dx}{ax+1} = \frac{l(a+1)}{a},$$

und folglich ist der richtige Betrag

$$Lim\ S_n = \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{l(a+1)}{a}.$$

Dieses Beispiel wird hinreichen.

Da jede Differentiation ein Grenzenübergang ist, so bedarf es auch immer einer besonderen Untersuchung darüber, ob bei unendlichen Reihen der Satz

$$\frac{d\,\Sigma\,\varphi(x)}{dx}=\Sigma\frac{d\,\varphi(x)}{dx}$$

seine Gültigkeit behält; bekanntlich hat schon Abel diese Bemerkung gemacht. Für Potenzenreihen glaube ich in meinem Compendium d. h. A. den Nachweis geliefert zu haben, dass man differenziren darf, ohne das Gültigkeitsintervall der Reihe zu ändern; dieses Intervall ist a. a. O. immer nur durch eine Ungleichung bestimmt, dagegen ist noch gar nicht erörtert worden, ob die betreffenden Sätze auch an den Grenzen der Convergenz gelten, d. h. z. B. für die Entwickelung

$$Arctan\, x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \dots$$

würde nach S. 126—130 nur die Bedingung $1 > x > 0$ aufzustellen sein; die Frage, was für $x = 1$ werden soll, kommt an dieser Stelle gar nicht vor, sondern erst weit später. Wenn demnach gesagt ist, dass das Gültigkeitsintervall nicht geändert werden soll, so heisst dies im vorliegenden Falle, die abgeleitete Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots$$

gilt ebenfalls für $1 > x > 0$. Ich glaube, dass Jeder, der die betreffende Partie des Buches mit nur einigem gesunden Menschenverstande liest, meine Worte gar nicht anders deuten kann; Herr Schnuse findet freilich Unsinn heraus, indem er eine Gleichung ($x = 1$) da nimmt, wo bei mir nur von Ungleichungen die Rede war; — ich kann darauf nur mit dem Wunsche antworten, dass Herr Schnuse erst richtig lesen lernen möge, ehe er an's Kritisiren geht. — In Nr. 6 erzählt Herr Schnuse, ich hielte die Formel

$$\int_{-b}^{b}\frac{dx}{x}=0$$

für richtig und bemerkt darauf, sie sei sinnlos, citirt auch deshalb Gauss. Wer aber S. 291 nachschlägt, wird finden, dass ich in Uebereinstimmung mit Gauss, Dirichlet, Cauchy etc. den Werth des betreffenden Integrales für unbestimmt (d. h. unendlich vieldeutig) erklärt habe und dass ich demselben nur dann einen bestimmten Werth, den sogenannten Hauptwerth beilege, wenn er als der Grenzwerth von

$$\int_{-b}^{-\delta}\frac{dx}{x}+\int_{+\delta}^{+b}\frac{dx}{x}$$

betrachtet wird. Ebenso ist auch in allen anderen Fällen, wo die Function unter dem Integralzeichen discontinuirlich oder unendlich wird, ausdrücklich bemerkt, dass der angebliche Werth nur der Hauptwerth sein soll

(s. z. B. S. 305, wo das von Herrn Schnuse gleichfalls citirte Integral vorkommt). Ich weiss nicht, ob Herr Schnuse absichtlich oder unabsichtlich mit Weglassung gerade der Bedingungen citirt, unter denen allein die obigen Formeln einen bestimmten Sinn haben, jedenfalls aber wird er sich von mir die Bemerkung gefallen lassen müssen, dass solche Citate den Falsificaten eben so nahe verwandt sind, wie der Hehler dem Stehler.

Wie weit es Herr Schnuse überhaupt in der Mathematik gebracht hat, zeigt u. A. die Behauptung, dass die Formel

$$\int_0^\infty \cos rx\,dx = 0$$

richtig sei. Da

$$\int \cos rx\,dx = \frac{\sin rx}{r},$$

so ist

$$\int_0^\infty \cos rx\,dx = \frac{\sin \infty}{r}$$

folglich, Herrn Schnuse's Werthangabe gemäss,

$$\sin \infty = 0;$$

mithin ist wahrscheinlich auch, weil $\infty = \infty + \frac{1}{2}\pi$,

$$\cos \infty = \cos\left(\infty + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \infty = 0,$$

endlich

$$(\cos \infty)^2 + (\sin \infty)^2 = 0.$$

Die Gleichung $\sin \infty = 0$ enthält das sehr merkwürdige geometrische Resultat, dass die Verticalprojection der Schraubenlinie eine geradlinige Asymptote hat; auch die letzte Consequenz ist nicht minder eigenthümlich, namentlich wäre sehr zu wünschen, dass Herr Schnuse die Stelle, d. h. den Werth von z angäbe, von wo ab die Gleichung $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ zu gelten aufhört, um nach und nach in $\sin^2 \infty + \cos^2 \infty = 0$ überzugehen. — Die Folgerungen, die ich hier aus der Schnuse'schen Formel gezogen habe, liegen so nahe und sind so einfach, dass sie sich Jedem, der überhaupt Mathematiker sein will, unwillkürlich aufdrängen; wenn Herr Schnuse dergleichen Blödsinn nicht selber bemerkt, so muss man wirklich bezweifeln, ob er überhaupt noch zurechnungsfähig ist. Dieser Zweifel veranlasst mich auch, das Füllhorn von Grobheiten, das Herr Schnuse über mich ausgegossen hat, einfach zu ignoriren. SCHLÖMILCH.

Es ist eine undankbare — weil vergebliche — Arbeit, einen Mohren weiss zu waschen und ebenso Herrn Dr. Schnuse von der Unhaltbarkeit seiner früheren wie neueren in dem offenen Sendschreiben ausgedrückten Behauptungen zu überzeugen. Es kann daher mit Nachstehendem auch

nicht meine Absicht sein, Herrn Schnuse auf sein offenes Sendschreiben zu antworten, weil es diesem Herrn entweder an gehöriger Fähigkeit oder an gutem Willen gebricht, die Wahrheit zu erkennen oder anzuerkennen; vielmehr kann es mir nur darum zu thun sein, einigen Verdächtigungen des Herrn Schnuse entgegenzutreten, welche er den Lesern seiner Antikritik und seines „offenen Sendschreibens" wiederholt unterbreitet, und welche als solche nicht sofort erkannt werden möchten, wenn nicht die gedachten Leser auch meine Recension der Schnuse'schen Uebersetzung von Chasles' *Traité de Géometr. Supér.* (II. Jahrgang 1. Heft unserer Zeitschrift), sowie meine Entgegnung (II. Jahrgang 5. Heft) auf dessen „Antikritik" zugleich bei der Hand haben und sich der Mühe, die erforderlichen Vergleichungen wiederholt anzustellen, unterziehen können; eine Mühe, die ich selbst nicht Jedermann zumuthen möchte, da auch ich des ganzen Handels überdrüssig genug bin.

Herr Schnuse gefällt sich, mir einen Mangel an Achtung vor der wissenschaftlichen Persönlichkeit des Herrn Chasles wiederholt vorzuwerfen, sowie einen Dünkel beizulegen, in Folge dessen ich mich selbst ebenso hoch und höher zu stellen scheine, als Herr Chasles anerkanntermassen in der wissenschaftlichen Welt dasteht. Als Beweis für diese Intensionen des Herrn Schnuse führe ich an die Ausfälle gegen mich in seiner Antikritik (unter Nr. 2): „Es wäre interessant zu wissen, ob sich Herr Witzschel auch zu den deutschen Originalschriftstellern zählt? — Was die Kenntniss der mathematischen Literatur betrifft, so möchte Herr Witzschel wohl gegen Herrn Chasles etwas zurückstehen". Ferner die Worte in der recensirenden Nachschrift seines offenen Sendschreibens (S. 15): „Es ist ein höchst sonderbares Benehmen von Ihnen, Herr Witzschel, die *Géometr. Supér.* von Chasles in einem solchen Maasse, wie Sie, auszubeuten — denn wenigstens zwei Drittel Ihres Buches gehören Chasles an*) — und zugleich bei jeder vermeintlichen Gelegenheit unbegründeten Tadel gegen Chasles auszusprechen!" (Seite 16 wird dasselbe in nur etwas gröberer Manier wiederholt) u. s. w. Zur Vergleichung hiermit führe ich aus der mehrerwähnten Recension einige Worte und Wendungen an, welche meine Ansichten und respectvolles Urtheil über Herrn Chasles und dessen *Géometr. Supér.* hinlänglich documentiren dürften. Gleich im Eingange der Recension habe ich gesagt: „Diese Schrift (des Herrn Schnuse) ist im Wesentlichen eine Uebersetzung des trefflichen Werkes von Chasles *Traité*" etc. Ferner S. 3 Zeile 14 v. u.: „Die metrischen Eigenschaften des Doppelverhältnisses sind übrigens in den angegebenen Kapiteln des Chasles'schen

*) Herr Schnuse scheint, beiläufig bemerkt, nicht begreifen zu können, dass, angenommen — aber damit keineswegs zugegeben — „wenigstens zwei Drittel meines Buches gehöre Herrn Chasles an", es immer noch fraglich bleibt, ob diese angeblichen zwei Drittel den Originalpartien der *Géometr. Supér.* entlehnt sind, oder ob ich nicht noch andere Quellen dabei mit benutzt habe; abgesehen davon, dass wieder viel noch darauf ankommt, wie ich dieses Material benutzt habe.

Werkes sehr systematisch, klar und ausführlich auseinander gesetzt". Sodann Zeile 5 v. u.: „Herr Chasles hat seine Theorie (des Imaginären) mit höchst beachtenswerther Consequenz durchgeführt". Ferner S. 5 Zeile 11 v. o.: „Durch die homographischen Gebilde auf einer Graden ist die Theorie der Involution naturgemäss vorbereitet, welche dann in den nächstfolgenden fünf Kapiteln (der *Géometr. Supér.*) mit einer Gründlichkeit und Eleganz bearbeitet ist, wie sie wohl in keinem anderen Werke über neuere Geometrie zu finden sein dürfte". Es wird wohl nun Niemandem weiter, als höchstens Herrn Schnuse, beifallen, mir nach diesen und ähnlichen anderen Aeusserungen über das Chasles'sche Werk Geringschätzung und hochfahrenden Dünkel dem genannten Verfasser der *Géometr. Supér.* gegenüber beizumessen.

Was ist es aber, wird man fragen, das Herrn Schnuse so in Eifer bringen kann, in Folge dessen er in solchen Ausfällen sich ergeht? Die einfachste und nächste Ursache davon ist ohne Zweifel meine Kühnheit, mir in der angegebenen Recension über die Schnuse'sche Uebersetzung, die ich als eine „freie Bearbeitung" der Chasles'schen *Géometr. Supér.* anzuerkennen einigen Anstand nahm*), einige Bemerkungen erlaubt zu haben, welche Herrn Schnuse nicht recht gefallen haben mögen. Statt sich dabei zu beruhigen oder dieselben in anständiger Weise zu widerlegen, wirft mir Herr Schnuse ungemeinen Dünkel und Hochmuth vor und meint sehr schlau zu handeln, wenn er zum Beleg dessen einige auf das eigentliche Chasles-sche Werk bezügliche Bemerkungen oder Berichtigungen als „unbegründete und abgeschmackte" Urtheile darzustellen sucht. Ich bemerkte in der genannten Recension bezüglich der Priorität in der Aufstellung des Princips der Zeichen: „Herr Chasles scheint der erste in Frankreich zu sein, welcher dieses Princip seit einiger Zeit (in dem 1837 erschienenen *Aperçu historique etc.* ist dasselbe noch nicht aufgestellt) mit aller Consequenz bei seinen mathematischen Untersuchungen sich zu eigen gemacht und mit nicht geringem Erfolge dabei in Anwendung gebracht hat. Wenn er daher in der Vorrede S. IX bemerkt: *on a donc beaucoup perdu à ne pas introduire systématiquement dans la Géométrie pure le principe des signes; les progrès de la science en ont été nécessairement retardés;* so hat er gewiss nicht Unrecht; wenn aber damit auch nach dem Zusammenhange**) mit

*) Wogegen Herr Schnuse angeblich auch nichts einzuwenden haben will, „da auch wir in unserer Zeitschrift Uebersetzungen lieferten" — sehr wohl! nur mit dem Unterschiede, dass wir diese als Uebersetzungen und nicht als „freie Bearbeitungen" ausgeben —.

**) Seite III der *Géometr. Supér.* sagt nämlich Herr Chasles: *Jusqu'à présent on n'a point introduit d'une manière générale et systématique en Géométrie, le principe des signes pour marquer etc.* Ich glaube hiernach also wohl berechtigt gewesen zu sein, zur Berichtigung die obige Bemerkung gemacht zu haben, wenn mir auch Herr Schnuse eine Anmerkung (Seite X) des Herrn Chasles entgegenhält, in welcher es heisst: *Cependant dans l'ouvrage de M. Möbius intitulé Calcul barycentrique, le prémier, je crois, où l'on ait donné de signes à ces deux rélations etc.* Denn hierauf scheint offenbar Herr Chasles nicht das gehörige Gewicht gelegt zu haben, in-

dem Vorhergehenden im Allgemeinen gesagt sein soll, dass vor ihm das erwähnte Princip nicht in Anwendung gekommen sei, so dürfte dieses sicher insofern unrichtig sein, als bereits längere Zeit vorher Herr Möbius in allen seinen Schriften, also mindestens von dem Erscheinen des barycentrischen Calculs an gerechnet (1827), selbiges aufgestellt und durchgehends in Anwendung gebracht hat". Ich glaube doch wohl hiermit die wissenschaftlich hochstehende Persönlichkeit des Herrn Chasles mit hinlänglicher Zartheit und gehörigem Respect behandelt zu haben. Nur Herr Schnuse vermag in seinem blinden Eifer dies nicht zu erkennen und ebenso wenig, dass die folgenden Bemerkungen meiner Recension weniger Herrn Chasles gelten, als vielmehr gegen diejenigen deutschen Schriftsteller gerichtet sind, welche für die Früchte deutschen Fleisses und Scharfsinnes weniger Aufmerksamkeit zeigen und somit dieselben nicht selten auf Umwegen über Frankreich und England beziehen oder bekommen. Herr Schnuse dreht Das, was ich gesagt, entweder absichtlich oder in Mangel bessern Verständnisses um; macht einen Beleg für einen allgemeinen gar nicht von mir zuerst aus der Geschichte der Wissenschaften aufgestellten Satz zum Vordersatze eines Schlusses, nach welchem ich von einem speciellen Falle auf das Allgemeine in logisch unberechtigter Weise geschlossen haben müsste (Antikritik S. 2: „Daraus, dass Chasles Geschichte der Geometrie etc.").

Wenn Herr Schnuse freilich in solcher Weise räsonnirt oder den Sinn meiner Worte dergestalt verunstaltet, so kann oder konnte man es mir wirklich nicht verargen, wenn ich auf alle weiteren Ausstellungen in der „Antikritik" und dem „offenen Sendschreiben" nicht weiter antwortete. Ich unterlasse daher auch jetzt alle sonstigen Bemerkungen, welche ich in ausführlicher Weise machen könnte, und füge dem nur noch hinzu, dass wenn Herr Schnuse auf meine in der Entgegnung (Jahrgang II, Heft 5) gegebenen Rügen bezüglich seiner Entstellungen keine bessere und anständiger gehaltene Entschuldigung hat, als die in seinem „offenen Sendschreiben" unter Nr. 6 und 7 enthaltene*), so muss ich wiederholt

dem er sonst die vorher angezogenen Stellen des Haupttextes unterdrückt oder entsprechend verändert haben würde. Wenn ferner Herr Schnuse mir vorwirft: „Man sollte meinen, es handelte sich hier um die grösste mathematische Entdeckung — solche Weitläufigkeiten macht Herr Witzschel hier, um Herrn Möbius die erste Anwendung der Zeichen +, — in der neueren Geometrie zu vindiciren!" so meine ich zwar nicht die grösste Entdeckung, wohl aber eine gar nicht unwichtige Angelegenheit berührt zu haben. Herr Chasles legt ja ersichtlicher Weise (m. s. die Vorrede zur *Géometr. Supér.* S. III—X) selbst nicht wenig Gewicht auf den von ihm beobachteten Gebrauch der Zeichen und auch Herr Möbius erachtet es für erforderlich, eine diesen Punkt betreffende Bemerkung resp. Verwahrung einzulegen (Kreisverwandtschaft S. 532 Anmerkung).

*) „Das Privatgutachten habe ich seiner Abgeschmacktheit wegen sofort nach Durchlesung desselben den Flammen überliefert, so dass ich nur aus dem Gedächtnisse referiren — das Referat also kein wörtliches sein konnte". Herr Schnuse hat aber so referirt, dass Jedermann zum Glauben gebracht wurde, er müsse das Privatgutachten vor sich liegen haben! Ferner: „Dass Sie nicht der Verfasser des Pri-

bekennen, dass ich nicht weiss, ob ich es mit einem Manne zu thun habe, der die Wahrheit nicht anerkennen will oder nicht einsehen kann.

Dr. Witzschel.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 1. August 1858.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathemat.-physikalische Classe. Jahrg. 1858. Heft I. Leipzig, Hirzel. ⅓ Thlr.

Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1857. Berlin, Dümmler in Comm. Mathematische Abhandlungen. 1 Thlr.

Physikalische Abhandlungen. 2 Thlr.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 14. Band. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 8⅔ Thlr.

Reine Mathematik.

Kunze, A., Die aufsteigenden Kettenbrüche. Weim., Böhlau. ⅓ Thlr.

Haberlandt, J., Compendium des arithmetischen Unterrichts; für Land- und Forstwirthe. Wien, Braumüller. 1⅓ Thlr.

Tchebycher, P., *sur les questions de Minima, qui se rattachent à la réprésentation approximative des fonctions. Pétersbourg.* Leipzig, Voss. 1 Thlr. 3 Ngr.

Heger, J., Auflösung eines Systems von mehreren unbestimmten Gleichungen ersten Grades in ganzen Zahlen. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Thlr.

Petzval, J., Integration der linearen Differentialgleichungen. 5. Lief. (Akad.) Ebendaselbst. 3 Thlr.

Brskiba, J., Lehrbuch der Arithmetik. 3. Auflage. Wien, Braumüller. 1 Thlr.

Hofmann, F., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 3. Theil. Bayreuth, Grau'sche Buchh. geh. 21 Ngr.

— Resultate dazu. 12 Ngr.

---

vatgutachtens sind — muss ich Ihnen auf Ihre öffentliche Versicherung glauben und deshalb das unter Nr. 5 der Antikritik Gesagte in Bezug auf Sie zurücknehmen — wogegen alles Uebrige in voller Kraft bleibt". Also auch z. B. das bemerkte Falsificat, dessen Sie Sich durch gänzlich falsches Referiren schuldig gemacht haben? Liegt hierin nicht eine eigenthümliche Keckheit, wenn nicht gar Schamlosigkeit?

Hofmann, F., Sammlung der wichtigsten Sätze aus der Arithmetik und Algebra. 2. Auflage. 3 Ngr.

— Die wichtigsten Sätze und Aufgaben aus der Planimetrie. 6 Ngr.

Spitz, C., Lehrbuch der Stereometrie für höhere Lehranstalten. Leipzig, Winter. 16 Ngr.

— Anhang hierzu: Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der im Lehrbuche befindlichen Aufgaben. Ebendaselbst. 4 Ngr.

Heilermann, H., Sammlung geometrischer Aufgaben. Coblenz, Hölscher. 2 Theile. à ¼ Thlr.

Boner, J. E., Trigonometrie. 1. Cursus. Münster, Regensberg. 3¾ Thlr.

Spoerer, G., Die ebene Geometrie und Trigonometrie. 1. Heft, 2. Auflage. Anclam, Dietze. ¼ Thlr.

Salomon, J., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Bd. Geometrie. 2. Auflage. Wien, Gerold's Sohn. 2 Thlr.

Schneider, J., Anfangsgründe der Planimetrie. Wien, Sallmayer & Comp. 16 Ngr.

Skuhersky, R., Die orthographische Parallel-Perspective. 2 Hefte. Prag, Tempsky. à ⅔ Thlr.

— Methode der orthogonalen Projection auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel mit einander einschliessen. Prag, Calve in Comm. 16 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Hornstein, K., Die Asteroiden. Ein Vortrag. Wien, Gerold's Sohn. 8 Ngr.

Bode's Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels, herausgegeben von C. Bremiker. 11. Auflage. 4. und 5. Lieferung. Berlin, Nicolai. à ⅓ Thlr.

Hillardt, F., Perspectivischer Zeichenapparat. Wien, Seidel. ⅓ Thlr.

Kreutzer, K., Anleitung zum Zeichnen der Krystallflächen und Netze. Ebendaselbst. 1 Thlr.

Redtenbacher, F., Theorie und Bau der Wasserräder. 2. Aufl. Mannheim, Bassermann. 10 Thlr.

Wiebe, F., Skizzenbuch für den Ingenieur und Maschinenbauer. 1. Heft. Berlin, Ernst & Korn. 1 Thlr.

Zeuner, G., Die Schiebersteuerungen, mit besonderer Rücksicht der Steuerungen bei Locomotiven. Freiberg, Engelhardt. 1⅓ Thlr.

Winkler v. Brückenbrand, Praktische Geometrie. 3. Aufl. Wien, Braumüller. 3 Thlr. 18 Ngr.

Rouvroy, W. H. v., Dynamische Vorstudien zu einer Theorie der gezogenen Feuerwaffen. Dresden, Adler und Dietze. gr. 8. geh. ⅓ Thlr.

Hofmann, F., Grundriss der mathematischen Geographie. Bayreuth, Grau'sche Buchhandlung. gr. 8. geh. 8 Ngr.

Girault, Ch., *Eléments de géométrie appliquée à la transformation du mouvement des machines. Paris, Mallet-Bachelier.*

Mahistre, *Cours de mécanique appliquée. Paris, Mallet-Bachelier.* 8 Frcs.

Freycinet, Ch. de, *Traité de mécanique rationelle, comprenant la statique comme cas particulier de mécanique.* 2 *Vol. Paris, Mallet-Bachelier.*

Physik.

Die Naturwissenschaften; bearbeitet von Dippel, Gottlieb, Koppe etc. Lief. 15. Essen, Bädeker. ⅓ Thlr.

Crüger, F. C. J., Die Physik in der Volksschule. 6. Auflage. Erfurt, Körner. ½ Thlr.

Crüger, F., Schule der Physik. 4. Auflage. Erfurt, Körner. 2 Thlr.

Wenck, J., Die Physik mit Rücksicht ihrer Anwendung auf Technik. 2. Auflage. Leipzig, Matthes. 2¼ Thlr.

Grailich, J., Die singenden Flammen. Ein Vortrag. Wien, Gerold's Sohn. 8 Ngr.

— Krystallographisch-optische Untersuchungen. Ollmütz, Hölzel. 2⅔ Thlr.

Graevell, F., Charakteristik der Newton'schen Farbentheorie. Ein Vortrag. Berlin, Herbig. ⅕ Thlr.

Neumann, C., *Explicare tentatur quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. Diss. inaug.* Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

Volger, G., Untersuchungen über die Erdbeben in der Schweiz. 3 Bände. Gotha, Perthes. 6 Thlr.

Schering, E., Zur mathematischen Theorie elektrischer Ströme. Göttingen, Dieterich in Comm. 12 Ngr.

Laboulaye, Ch., *Essai sur l'équivalent mécanique de la chaleur. Paris, Lacroix et Baudry.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die orthographische Parallelperspective; von R. SKUHERSKY, Professor am polytechnischen Institut zu Prag. Prag, 1858, bei Tempsky.

Die vorliegende Schrift ist die weitere Ausführung einer früheren, denselben Gegenstand betreffenden Abhandlung des Verfassers, die bereits 1850 in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie erschien und wovon sich eine Umarbeitung in den Abhandlungen der k. böhm. Gesellsch. der Wissensch. Bd. 10 (1858) findet (zu beziehen durch die Calve'sche Buchhandlung zu Prag). Der Grundgedanke des Verfassers besteht in Folgendem. Man denke sich zwei nicht senkrecht zu einander liegende Ebenen E' und E'', von denen die erste als Bildebene genommen und vertical so gestellt werden möge, dass ihr Durchschnitt mit E'' horizontal liegt; irgend ein Punkt P im Raume kann nun orthographisch auf jede dieser Ebenen projicirt werden und dies giebt zwei Projectionen P', P'', wobei $PP' \perp E'$ und $PP'' \perp E''$ ist; endlich projicire man P'' wieder auf die Bildebene nach $P+$, so hat man jezt in dieser Ebene zwei Projectionen P' und $P+$, welche in Verbindung mit dem bekannten Winkel zwischen E' und E'' die Lage des Punktes P im Raume bestimmen. Projectionen dieser Art nennt der Verfasser Parallelperspectiven, weil sowohl ihr Aussehen als ihre Entstehungsweise einige Aehnlichkeit mit der wahren Perspective besitzt; bei letzterer sind nämlich E' und E'' senkrecht zu einander, P' ist der Durchschnitt der Geraden von P nach dem Projectionscentrum O mit der Bildebene E', und $P+$ entsteht als Durchschnitt derselben Ebene mit der Geraden von O nach der Horizontalprojection P''. — In der genannten Abhandlung („Methode der orthogonalen Projection auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel einschliessen") werden nun die hauptsächlichsten Aufgaben der descriptiven Geometrie nach dieser Methode bearbeitet; das angezeigte selbstständige Werkchen dagegen beschäftigt sich vorzugsweise mit Schattenconstructionen und erst durch die Anhänge rechtfertigt sich einigermaassen sein Titel. Hier kommt auch der Verfasser zu einer Vergleichung seiner Methode mit der axonometrischen Projection und sucht

jener den Vorzug zu sichern. Wenn übrigens hierbei der axonometrischen Projection ein Vorwurf daraus gemacht wird, dass sie an bestimmten Verkürzungsverhältnissen festhält, so kann wenigstens Referent in diesen Tadel nicht einstimmen. Sowie es für die Praxis ein grosser Vortheil ist, wenn überall nach demselben Maasse (z. B. dem Meter) gemessen wird — gleichgiltig, ob die Einheit glücklich oder unglücklich gewählt wurde —, so ist es auch von eben so entschiedenem Vortheile, wenn auf alle Zeichnungen dieselben Maassstäbe passen, sollte auch hier und da einmal die Zeichnung nicht gerade ein schönes Bild darstellen. Die Ausführung der graphischen Arbeit aber dürfte bei der Parallelperspective wohl nicht weniger Zeit und Mühe kosten als bei der axonometrischen Projection, vorausgesetzt natürlich, dass man die zu letzterer nöthigen Maassstäbe ein für alle Mal gezeichnet und einen axonometrischen Winkelhaken angeschafft hat. — Im Uebrigen empfehlen wir das Schriftchen den Freunden der descriptiven Geometrie.

SCHLÖMILCH.

Ueber die Gleichgewichtsfiguren homogener freier rotirender Flüssigkeiten. Von Dr. L. MATTHIESSEN, Privatdocent in Kiel. Kiel, Schwers'sche Buchhandlung, 1857.

Die Bestimmung der Gleichgewichtsfigur, welche eine homogene frei rotirende Flüssigkeit annimmt, wenn sich deren Molecüle nach dem Newton'schen Gesetze gegenseitig anziehen, ist bekanntlich desswegen eine schwere Aufgabe, weil die Componenten der Anziehung, die ein Punkt der Oberfläche durch die ganze Masse erleidet, von der Gestalt der letzteren, also von Dem abhängen, was erst gefunden werden soll. Es bedurfte daher des Aufgebotes analytischer Kunstgriffe, um wenigstens in den einfacheren Fällen zur Lösung der Aufgabe zu gelangen; in der That hat der Calcül bis jetzt nur wenige Flächen als Niveauflächen bezeichnen können, nämlich das abgeplattete Ellipsoid (Legendre), die Ringform unter der Voraussetzung, dass die Dicke des Ringes sehr klein im Verhältniss zu seinem Halbmesser ist (Laplace), endlich das dreiachsige Ellipsoid, wie Jacobi gefunden hat. Der Verfasser der vorliegenden Schrift geht einen anderen Weg und benutzt weniger analytische, als vielmehr synthetisch-geometrische Betrachtungen, womit es ihm gelingt, auf einfachere und anschaulichere Weise zu denselben Resultaten zu kommen. Den Anfang macht der Satz, dass die Dichtigkeit in allen Punkten einer Niveaufläche gleich sein muss; hieraus wird ein zweites Theorem abgeleitet, zufolge dessen in allen Punkten einer Niveaufläche das Produkt aus dem Elemente δr eines Radiusvector r und der nach der Richtung von r geschätzten Gesammtanziehung R einen constanten Weg hat, also $R\,\delta r = A\,\delta a$ ist, wenn A und a für den einen Pol der rotirenden Fläche sind, was R und r für irgend

einen ihrer Punkte. Daran knüpft sich die bekannte Gleichung $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$, die geometrisch bedeutet, dass die Resultante aller auf die äusserste Oberfläche wirkenden Kräfte normal zu dieser stehen muss. Von besonderer Wichtigkeit ist der nächste Satz, welcher die Aehnlichkeit aller Niveauflächen eines und desselben rotirenden Körpers, dessen Molecüle gegen einander gravitiren, ausser Zweifel setzt. Zufolge desselben ist für zwei unendlich nahe Niveauflächen $\delta r : \delta a = r : a$ und hierdurch reducirt sich die Gleichung $R\,\delta r = A\,\delta a$ auf $Rr = Aa$ oder $Xx + Yy + Zz = Aa$; diese liefert in Verbindung mit der Differentialgleichung $X dx + Y dy + Z dz = 0$ die exacte Gleichung der äussersten Oberfläche. Daran schliesst sich die Untersuchung des dreiachsigen Ellipsoids sowohl in Bezug auf die Achsenverhältnisse (§. 6), als auch rücksichtlich der isodynamischen Linien, d. h. derjenigen Curven auf der Fläche, längs welcher die Schwere constant bleibt. — Im zweiten Theile seiner Schrift behandelt der Verfasser die Ringform und gelangt dabei zu dem Resultate, dass die elliptische Gestalt des Ringquerschnittes die allein mögliche Form ist, so lange keine besonderen äusseren Kräfte (wie z. B. die Anziehung der Sonne) in Frage kommen.

Ohne Zweifel sind durch die Matthiesen'sche Abhandlung neue Gesichtspunkte für die betreffende Theorie gewonnen worden und sie ist daher als eine sehr verdienstvolle und beachtenswerthe Arbeit zu bezeichnen.

Schlömilch.

Compendium der höheren Mathematik, von A. v. Burg. Dritte sehr vermehrte und verbesserte Auflage. Wien, Gerold's Sohn, 1859.

Mit der ersten Auflage dieses bekannten Werkes machte der Verfasser vor längerer Zeit den Versuch, das Hauptsächlichste von der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Theorie der höheren Gleichungen, Differenzenrechnung, Reihenlehre, Wahrscheinlichkeitrechnung, analytischer Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential-, Integral- und Variationsrechnung in einen mässigen Band zusammenzudrängen — ein Experiment, das schon angesichts des gewaltigen Materiales einiges Bedenken erregen musste. Zu jener Zeit indessen, wo man in methodischer Beziehung weniger genau war, mochte das Unternehmen allenfalls für gelungen gelten; heut' zu Tage ist man, durch allerhand Erfahrungen gewitzigt, scrupulöser geworden und namentlich hat man einsehen gelernt, dass die früheren Beweise vieler analytischen Sätze nur halbe Beweise und als solche schlimmer wie gar keine sind, weil sie manchen Entwickelungen einen trüglichen Schimmer von Allgemeinheit verleihen und gerade die Bedingungen nicht erkennen lassen, an welche die Giltigkeit der betreffenden Sätze geknüpft ist. Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, erscheint die neue Auflage

wohl als eine vermehrte, keineswegs aber als eine verbesserte, und wenn der Verfasser in der Vorrede sagt, dass er bemüht gewesen sei, den Fortschritten der neuesten Zeit Rechnung zu tragen, so kann sich dies höchstens auf die Quantität des Materiales, nicht aber auf die methodische Bearbeitung desselben beziehen, man kann sogar dreist behaupten, dass der Verfasser von jenen zahlreichen und überaus wichtigen Verbesserungen analytischer Methoden, welche wir Cauchy, Jacobi, Lejeune-Dirichlet u. m. A. verdanken, so gut wie keine Notiz genommen hat. Wir wollen hierzu einige Belege liefern.

Seit mehr als 25 Jahren kennt man das Ungenügende der Methode der unbestimmten Coefficienten, welche nur zeigt, wie die Coefficienten beschaffen sind, wenn eine Reihenentwickelung der postulirten Form existiren sollte; dies hindert aber den Verfasser nicht, jene Methode ganz in alter Weise bei jeder Gelegenheit anzuwenden. Stünde nicht die Jahreszahl 1859 auf dem Titel, so möchte man glauben, ein Buch aus den Jahren 1790—1820 vor sich zu haben.

Bereits 1821 hat Cauchy gezeigt, dass das Rechnen mit unendlichen Reihen (namentlich die Multiplication derselben) eine gewisse Vorsicht verlangt; dies hält aber den Verfasser nicht ab, mit unendlichen Reihen gerade so wie mit endlichen Grössen umzuspringen. So z. B. findet sich S. 79 und 80 folgende Ableitung des allgemeinen binomischen Satzes: 1) es wird hypothetisch

$$(1+x)^y = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

gesetzt und nachgewiesen, dass

$$A_2 = A_1 \frac{y-1}{2}, \quad A_3 = A_2 \frac{y-2}{3}, \dots$$

sein würde; 2) um $A_1 = \varphi(y)$ zu bestimmen, multiplicirt der Verfasser die Gleichungen

$$(1+x)^y = 1 + \varphi(y)x + \text{etc. und } (1+x)^z = 1 + \varphi(z)x + \text{etc.}$$

und findet $\varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(y+z)$, woraus $\varphi(y) = ky$ folgt. In dieser Herleitung stecken schon zwei Fehler; die Methode der unbestimmten Coefficienten ist der eine, und der andere liegt in der Multiplication zweier Reihen, von denen man nicht weiss, ob sie convergiren oder nicht (denn die Multiplication zweier divergenten Reihen hat gar keinen vernünftigen Sinn). Ausserdem ist die Deduction unnütz weitläufig; da der Verfasser sich vor einer Functionalgleichung $[\varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(y+z)]$ nicht scheute, so kam er rascher und genauer weg, wenn er die Binomialreihe mit Hilfe der Gleichung $f(y)\,f(z) = f(y+z)$ summirte, denn diese Gleichung kommt in Folge der Substitution $\log f(y) = \varphi(y)$ auf jene zurück und ist daher eben so leicht aufzulösen. S. 81 giebt der Verfasser die Binomialformel für allgemein giltig aus ohne Rücksicht auf die Convergenz oder Divergenz der Reihe — bekanntlich wiederum nicht wahr. Ebenso unrichtig ist die Behauptung auf S. 425, dass alle bisher bekannten Functionen in Reihen von

der Form $A + Bx + Cx^2 +$ etc. verwandelt werden können; den Gegenbeweis liefern schon die Functionen $\log x$, $\cot x$, $e^{\sqrt{x}}$ und dergl.

Um die Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ zu erhalten, setzt der Verfasser in der Exponentialreihe $x\sqrt{-1}$ für x, d. h. er wendet eine nur für reelle x bewiesene Formel auch bei imaginären x an. Das Schlimmste aber ist, dass man gar nicht erfährt, was e^{xi} bedeuten soll; was versteht denn der Verfasser unter e^{xi}? Von einer Potenz mit reellem Exponenten hat man eine klare Vorstellung, nicht aber von einer Potenz mit imaginären Exponenten; was eine solche heissen soll, muss man den Leuten erst sagen, bevor man damit operirt. Auf einen logisch gebildeten Leser macht des Verfassers Art zu rechnen ganz denselben Eindruck, als wenn es hiesse: „Wir wollen die und die Eigenschaft der Kreistangente auf den Fall anwenden, wo die Tangente imaginär wird“, ohne dass aber vorher oder nachher gesagt würde, was eine imaginäre Kreistangente bedeuten soll. — Der Verfasser scheint nicht zu wissen, dass die Gleichung $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ die Definition von e^{xi} enthält; daher die verkehrte Darstellung.

Solcher analytischer Curiositäten könnten wir noch eine ziemliche Menge anführen, wenn wir nicht unsere Leser zu ermüden fürchten müssten. Dass aber auch der geometrische Theil des Werkes von Ungenauigkeiten nicht frei ist, wollen wir noch an einem sehr auffälligen Beispiele zeigen. Um die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades auf die einfachste Form zu bringen, verändert der Verfasser das Coordinatensystem mit Hilfe der bekannten Winkel φ, ψ, Θ und sagt dann *simplement*, es sei immer möglich, diese Winkel so zu wählen, dass die mit $x'y'$, $x'z'$ und $y'z'$ behafteten Glieder gleichzeitig wegfallen. Nun gehören aber dazu drei Gleichungen zwischen φ, ψ und Θ oder deren trigonometrischen Functionen; jene drei Gleichungen enthalten Produkte wie $\cos\varphi \cos\psi$, $\cos\varphi \cos\Theta$ etc., sind also vom zweiten Grade, und folglich würde die Elimination von $\cos\psi$ und $\cos\Theta$ eine Gleichung sechsten Grades für $\cos\varphi$ liefern. Woher weiss denn der Verfasser *a priori*, dass diese Gleichung reelle Wurzeln hat und dass die etwa vorhandenen reellen Wurzeln ächte Brüche sind (denn sonst würde φ doch noch imaginär)? Wenn der Verfasser bei der Discussion der allgemeinen Gleichung nicht sorgfältiger zu Werke gehen wollte, so that er besser, sie ganz wegzulassen und die betreffenden Flächen lieber auf andere Weise, z. B. durch Spuren und Querschnitte, zu construiren.

Nach allen diesen Bemerkungen bedauern wir, das vorliegende Werk für nichts weiter als für eine im Wesentlichen unveränderte neue Ausgabe eines alten und veralteten Buches erklären zu müssen.

Schlömilch.

Bibliographie

vom 1. August bis 15. October 1858.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Bd. II, Heft 2. Frankfurt a/M., Brönner. 4 Thlr.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Heft 10. Zürich, Höhr in Comm. 1 1/5 Thlr.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Halle; red. von SCHULTZE. 4. Bd., 4. Heft. Halle, Schmidt. 2 Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik, von GRUNERT. Inhalt zu Theil 1—25. Greifswald, Koch. 1 1/3 Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1855, herausgegeben von KRÖNIG. XI. Jahrgang. 2. Abth. Berlin, Reimer. 2 2/3 Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica; Ed. E. A. Zuchold. Jahrg. 1858, Januar bis Juni. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 9 Ngr.

Mémoires présentés à l'Académie des sciences. (Mathém. et phys.) Tome 15. *Paris.*

Reine Mathematik.

SPITZER, S., Neue Integrationsmethode für Differenzengleichungen etc. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm.

SCHNUSE, C. H., Die Grundlehren der höheren Analysis. 2. Thl. Integralrechnung. Braunschweig, Leibrock. 1 Thlr.

MOÇNIK, F., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Wien, Gerold's Sohn. 12 Ngr.

LENTZ, F., Leitfaden der Arithmetik und Algebra. 1. Cursus. Hamburg, Würger. 1/4 Thlr.

LEY, J. F., Lehrbuch der Geometrie. 2. Thl. Trigonometrie und Stereometrie. Bonn, Henry & Cohen. 22 Ngr.

ZORER, Grundriss der ebenen Geometrie. Abth. 2. Ellwangen und Tübingen, Fues. 16 Ngr.

KOPPE, K., Anfangsgründe der reinen Mathematik. Thl. 2, Planimetrie. 7. Aufl. Essen, Bädecker. 18 Ngr.

ARNDT, J., Lehrbuch der Planimetrie. Stuttgart, Becher. 1/3 Thlr.

SCHWARZ, H., System der analytischen Geometrie. 1. Bd., Analytische Geometrie der Ebene. 1. Abth. Halle, Schmidt. 1 2/3 Thlr.

BINNS, W., Elementarer Unterricht über die orthographische Projection. Aus dem Englischen übersetzt von HERTEL. Weimar, Voigt. 1 Thlr.

HOFFMANN, C., Mathematisches Wörterbuch. Lief. 6. Berlin, Bosselmann. ⅔ Thlr.

LEIBNIZEN's Mathematische Schriften; herausgeg. von GERHARDT. 2. Abth., Bd. 1. Halle, Schmidt. 3½ Thlr.

LARGIADÈR, A. P., *Le dessin axonométrique. 1. partie.* Frauenfeld, Verlagscomptoir. 18 Ngr.

HAAN, BIERENS de, *Over eenige gevallen bij de theorie van onstadige (discontinuë) functiën. Amsterdam, van der Post.* 1 Fr. 50 C.

MEIER, F., *Exposé d'un principe concernant l'intersection des surfaces, avec l'application à la recherche de propriétés des surfaces du second ordres. (Mémoire couronné.) Liège.* 1½ Thlr.

Angewandte Mathematik.

FISCHER, PH., Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens. Abth. I, Heft 1. Oppenheim a. d. K., Kern. ¾ Thlr.

BAUERNFEIND, C. M., Elemente der Vermessungskunde. Bd. 2. München, liter.-artist. Anstalt. 2⅘ Thlr.

— Tafeln über verschiedene Gegenstände der praktischen Geometrie. Anhang zur Vermessungskunde. Ebendas. 16 Ngr.

DIENGER, J., Abbildung krummer Oberflächen auf einander mit Anwendung auf höhere Geodäsie. Braunschweig, Vieweg. ⅔ Thlr.

KORISTKA, C., Studien über die Methoden und Benutzung hypsometrischer Arbeiten. Gotha, Perthes. 2⅓ Thlr.

VORLÄNDER, J. J., Ueber die Berechnung der Flächeninhalte aus Originalmaassen. Leipzig, Teubner. ⅔ Thlr.

DUHAMEL, Lehrbuch der analytischen Mechanik; übersetzt von SCHLÖMILCH. 2. Aufl. Lief. 7 und 8. Ebendas. à ⅓ Thlr.

WERNICKE, A., Lehrbuch der elementaren Mechanik. 1. Theil. Braunschweig, Vieweg. 1⅚ Thlr.

NAVIER, L., Lehrbuch der höheren Mechanik; deutsch von L. MEJER. Hannover, Hahn. 2 Thlr.

Taschenbuch des Ingenieurs. Herausgegeben von dem Verein „die Hütte". 2. Aufl. 1. Hälfte. Berlin, Ernst & Korn. pro compl. 1⅔ Thlr.

BODE's Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels, herausgegeben von BREMIKER. 11. Ausg. Lief. 6. ⅓ Thlr.

OELTZEN, W., Argelander's Zonenbeobachtungen. Abth. 4 u. 5. Wien, Gerolds Sohn in Comm. ⅔ Thlr.

MÄDLER, J. H., Der Fixsternhimmel. Eine Darstellung der neueren darauf bezüglichen Forschungen. Leipzig, Brockhaus. 1 Thlr.

BREMIKER, C., Berechnung des Laufes und der Erscheinungen der Planeten, sowie der Sonnen- und Mondfinsternisse in den Jahren 1858—1868. Berlin, Nicolai. ½ Thlr.

LÖWY, M., Ueber die Bahn der Eugenia. Wien, Gerolds Sohn in Comm. 2 Ngr.

SCHINZ, E., Würdigung des Tychonischen Weltsystems aus dem Standpunkte des XVI. Jahrh. Halle, Schmidt. ⅙ Thlr.

ADAM, V., Das Entwerfen geographischer Kartennetze in Verbindung mit dem mathematischen Unterrichte. Brünn, Nitsch & Grosse in Comm. 8 Ngr.

Physik.

Physikalisches Lexicon, 2. Aufl. von MARBACH und CORNELIUS. Lief. 65, 66. Leipzig, O. Wigand. à ½ Thlr.

Die Naturwissenschaften. Herausgegeben von DIPPEL, GOTTLIEB, KOPPE etc. Lief. 18—22. Essen, Bädeker. à ⅙ Thlr.

MÜLLER, J., Grundriss der Physik und Meteorologie. 6. Aufl. 1. Hälfte. Braunschweig, Vieweg. pro compl. 1⅚ Thlr.

GANOT, A., Lehrbuch der Physik und Meteorologie; frei bearbeitet von Dr. WEISKE. 2 Bde. Leipzig, Voss. 3⅓ Thlr.

SPILLER, PH., Das Phantom der Imponderabilien in der Physik. Posen, Rehfeld in Comm. ½ Thlr.

KREIL, K., Resultate aus fünfmonatlichen Beobachtungen in Chartum und aus dreizehnmonatlichen Beobachtungen in Ulibary und Gondokoro. Wien, Gerolds Sohn in Commission. 6 Ngr.

FRIESACH, K., Geographische und magnetische Beobachtungen in Nord- und Südamerika; angestellt in den Jahren 1856 und 1857. Wien, Gerolds Sohn in Comm. 7 Ngr.

SCHABUS, J., Krystallologische Untersuchungen. Wien, Gerolds Sohn in Comm. 4 Ngr.

BÖTTGER, C., Das Mittelmeer; eine Darstellung seiner physischen Geographie etc. Lief. 1—3. Leipzig, G. Mayer. à 12 Ngr.

HIRN, G. A., *Recherches sur l'equivalent mécanique de la chaleur. Paris, Mallet-Bachelier.* 8 Frcs.

BILLET, M. F., *Traité d'optique physique. Tome I. Paris, Mallet-Bachelier.* pro compl. (II. vol.) 15 Frcs.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Elemente der Projectionslehre, mit Anwendungen der Perspective auf die Geometrie, dargestellt von C. T. Anger, Professor in Danzig. Verlag von Kafemann, Danzig 1858.

Der Verfasser des vorliegenden Werkchens gehört unter die gegenwärtig noch ziemlich seltenen Gymnasiallehrer, welche der Ueberzeugung leben, dass der Unterricht in der Geometrie nur dann wahrhaft fruchtbringend wird, wenn derselbe durch alle Classen hindurch von einer geometrischen Constructionslehre begleitet wird. Sehr richtig sagt der Verfasser in der Vorrede, nachdem er erwähnt hat, dass man meistens nur planimetrisch construiren lässt: „Wenn die Constructionen während des wissenschaftlichen Unterrichts auch in den höheren Classen in der Weise fortgesetzt werden, dass die Ergebnisse der Lehrsätze oder die Lösungen der Aufgaben durch geeignete, mit Genauigkeit ausgeführte Zeichnungen einen sinnlichen Ausdruck gewinnen, so wird das tiefere Verständniss des durch den Vortrag Erkannten dadurch bedeutend gefördert. Dabei wird man sich aber nicht auf die Planimetrie allein beschränken, sondern auch die Darstellung körperlicher Gegenstände berücksichtigen. Es ist bekannt, wie schwer oft die Auffassung der Stereometrie denjenigen wird, welche sich aus der Zeichnung eines körperlichen Gebildes von diesem eine Vorstellung machen sollen. Die Anwendung von Modellen hilft dabei weniger als man glauben möchte, denn abgesehen davon, dass eine grosse Anzahl von Zuhörern sich nicht gleichzeitig mit deren Einzelheiten vertraut machen kann, sind die Modelle oft zu speciell ausgeführt, so dass sie nur einen besonderen Fall erläutern, während es sich um ganz Allgemeines handelt. Hier tritt nun die Projectionslehre als Hilfsmittel auf, um die Vorstellung zu fixiren. Wenn im Vortrage die Lehre von der Lage der Linien und Ebenen im Raume, also etwa das elfte Buch des Euklid, beendigt ist, dürfte man mit jener den Anfang machen.“ — Aehnliches hat Referent seit zehn Jahren bei verschiedenen Gelegenheiten und an verschiedenen Orten (Jenaer Literaturzeitung, Mager's Pädagog. Revue etc.)

ausgesprochen, aber wenig Anklang gefunden, obschon er Jacobi's Autorität für sich citiren konnte; wahrscheinlich sind die meisten Gymnasiallehrer gleich von vorn herein in dem Vorurtheile befangen gewesen, dass die Praxis der Projectionslehre gar nicht auf das Gymnasium gehöre oder wenigstens schwer ein- und durchführbar sei (letzteres vielleicht nur deswegen, weil ihnen selber die nöthige Uebung fehlte); man hielt daher den Referenten für einen unnützen Projectemacher, der um so leichter reden könne, je weniger er selber Gymnasialunterricht ertheilt habe. Desto freudiger war Referent überrascht, einem praktischen Schulmanne zu begegnen, der nicht nur gleicher Ansicht ist, sondern „seit einer Reihe von Jahren die hier angedeutete Methode in Anwendung gebracht" und damit den Beweis geliefert hat, dass jene Idee wirklich ausgeführt werden kann. Wie sich von selbst versteht, wird man in dem vorliegenden Schriftchen, welches für den Unterricht auf Gymnasien und höheren Bürgerschulen bestimmt ist, keine descriptive Geometrie *à la Monge* oder Gugler suchen, wohl aber findet man eine nach verschiedenen Richtungen hin vollständige Behandlung der beschränkteren Aufgabe, jeden beliebigen Körper in jeder beliebigen Lage graphisch darzustellen. Als Mittel hierzu benutzt der Verfasser der Reihe nach 1) die orthographische Projection auf zwei unter einander senkrechten Ebenen, 2) die Projection durch parallele, gegen die Projectionsebene geneigte Strahlen (plagiographische Projection, Cavalierperspective), 3) die gewöhnliche perspectivische Projection und 4) die Basreliefperspective, die hier wohl zum ersten Male rein elementar-geometrisch begründet worden ist. Gedankengang und Umfang des ersten und dritten Abschnittes stimmen mit Dem überein, was Referent in der Anzeige von Gugler's descriptiver Geometrie (Literaturzeitung von 1858, Seite 33 und 34) als das Nothwendige und für Gymnasien Ausreichende bezeichnete, und es würden sich daran, wenn man Zeit übrig hat, die Durchschnitte der einfachsten krummen Flächen leicht anschliessen lassen; Referent erwähnt dies nur, weil gerade solche Durchschnitte die Anschauung besonders schärfen und wegen der vielen, durch verschiedene Lagen der Flächen entstehenden verschiedenen Formen der Durchschnittslinie in Modellen gar nicht mehr vollständig darstellbar sind. Giebt man jedem der Schüler eine andere Lage zur Behandlung (den minder Befähigten die einfacheren Fälle, wie z. B. wenn eine Kugel einen Cylinder nicht durchdringt, sondern nur einseitig schneidet), so kann keiner die Zeichnung des andern copiren, jeder muss selbstständig denken, und schliesslich liefert die Nebeneinanderstellung aller einzelnen Blätter eine äusserst lehrreiche Uebersicht über die verschiedenen Fälle und die ihnen entsprechenden Formveränderungen. Als Anhang zu Abschnitt 3) betrachtet der Verfasser theils in Poncelet'scher, theils in eigener Weise die Anwendungen der Perspective auf die Geometrie, z. B. die harmonischen Geraden, Aehnlichkeitspunkte, Sehnen- und Tangentenvielecke, Newton's

Transformation ebener Figuren u. dergl. m. Ueber die wissenschaftliche Bedeutung dieser Anwendungen überhaupt hat der Verfasser sich schon früher in einer lesenswerthen Abhandlung ausgesprochen, deren zweite Auflage 1856 erschien, und die wir bei dieser Gelegenheit in Erinnerung bringen wollen*).

Indem Referent das vorliegende gediegene Schriftchen den Gymnasiallehrern aufs Wärmste empfiehlt, hat er nur noch den Wunsch, dass sich recht viele derselben dadurch bewogen fühlen möchten, dem Verfasser zu folgen; die guten Wirkungen werden bald hervortreten.

SCHLÖMILCH.

Mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterrichte bearbeitet von EMIL KAHL, Lieutenant der Artillerie und Lehrer der Physik und Chemie an der Königlichen Kriegsschule zu Dresden. I. Theil: Aufgaben, II. Theil: Auflösungen. Leipzig, B. G. Teubner. Preis zusammen 1 Thlr. 14 Ngr.

Je zahlreicher und umfänglicher man Aufgaben-Sammlungen aus dem Gebiete der reinen Mathematik besitzt, desto seltener und verhältnissmässig weniger ausführlicher hat man sie für angewandte Mathematik und für Physik. Insofern ist daher schon jeder Beitrag für die specielle Literatur letzteren Gegenstandes als eine ebenso erwünschte wie dankenswerthe Erscheinung auf dem Büchermarkte zu betrachten, wie auch übrigens der Verfasser bei Bearbeitung einer selbstständigen Sammlung dieser Art zu Werke gegangen sein mag. Wir brauchen indessen bezüglich vorliegender Sammlung bei diesem einfachen und allgemeinen Urtheile nicht stehen zu bleiben, vielmehr wird Jeder nach Einsicht in dieselbe darin mit uns übereinstimmen, dass dieselbe für den Schul- und Privatgebrauch ein recht instructives Hilfsmittel zur Aneignung und zum klaren Verständniss der Hauptlehren der Physik darbietet. Sie unterscheidet sich zunächst von anderen derartigen Sammlungen, z. B. von der Fliedner'schen, auch darin, dass der Gebrauch der Differential- und Integralrechnung für einzelne Beispiele nicht ausgeschlossen ist, ohne jedoch die Kenntniss dieses Theiles der Mathematik durchgängig vorauszusetzen, indem die Mehrzahl der Beispiele davon unabhängig gestellt ist. Die Aufgaben sind in sechs Abtheilungen gegeben, von denen die erste, die mechanische Naturlehre betreffend, natürlich und billig einen verhältnissmässig grossen Theil des Buches einnimmt. Bei den 542 Aufgaben dieser Abtheilung sind namentlich und in Vergleich zu anderen Sammlungen vorzugsweise berücksichtigt worden die

*) Ueber den Einfluss der Projectionslehre auf die neuere Geometrie. Danzig, Kafemann.

Kapitel über Zerlegung der Kräfte, über die einfachen Maschinen ohne und mit Betracht der Reibung, der Begriff der Masse eines Körpers, sowie die Theorie der Kräftepaare.

Obgleich die Natur mancher Aufgaben, z. B. zur Lehre von den Trägheitsmomenten, die Anwendung der Integralrechnung unumgänglich macht, so sind doch auch mehrfache dahin gehörige Beispiele mit eingefügt, welche eine elementar-mathematische Berechnung zulassen. Ob nicht einzelne Aufgaben eine mehr elementare Fassung hätten erhalten können, wollen wir zwar dahin gestellt sein lassen, doch dürfte diese Frage bei verhältnissmässig nur wenig Beispielen aufgestellt werden können. Die schon erwähnte Reichhaltigkeit und grössere Auswahl wird aber immer jeden gegründeten Einwand als wenig bedeutsam erscheinen lassen.

In der darauf folgenden Abtheilung, 52 Aufgaben aus der Akustik enthaltend, sind ausser den Gesetzen für die Fortpflanzung des Schalles in der Luft, der Tonwellen in der Luft, für die Schwingungen der Luft in cylindrischen Röhren und für die Combinationstöne und Stösse, namentlich, wenngleich wieder mit Anwendung höherer Rechnung, auch die Schwingungen biegsamer und unelastischer Saiten berücksichtigt worden. In der dritten Abtheilung, Optik, mit 101 Aufgaben, finden wir zu den der Katoptrik und Dioptrik angehörigen Beispielen in einem Anhange einige die Interferenz betreffende Aufgaben.

Die vierte Abtheilung enthält 120 Aufgaben zur Lehre von der Wärme, wobei insbesondere das Thermometer, die Ausdehnung fester, tropfbarflüssiger und gasförmiger Körper durch die Wärme, die specifische Wärme fester und tropfbarflüssiger Körper und die latente Wärme berücksichtigt sind. Vielleicht würde hier der Herr Verfasser bei einer folgenden Auflage auf eine angemessene Ergänzung und Erweiterung Bedacht nehmen können und namentlich dem Capitel der Dampfmaschinen, welches nun einmal der Wärmelehre eingefügt zu werden pflegt, sowie der Calorimetrie etwas mehr Berücksichtigung zu schenken sich veranlasst finden.

Besondere Beachtung verdienen die fünfte Abtheilung, den Magnetismus, und die sechste, die Elektricität betreffend. Vorausgeschickt werden darin die Hauptsätze über die Messung der magnetischen und elektrischen Wirkungen nach absolutem Maasse, wie sie von Gauss und Weber aufgestellt worden sind. An diese knüpfen sich dann die darauf bezüglichen Aufgaben über die Bestimmung der magnetischen Wirkungen aus der gegebenen Vertheilung des Magnetismus, über kleine Schwingungen von Magnetstäben, über die Horizontalintensität des Erdmagnetismus durch Schwingungs- und Ablenkungsversuche bestimmt, über die Totalintensität des Erdmagnetismus. Für die in der sechsten Abtheilung enthaltenen Aufgaben bezüglich der magnetischen Wirkungen des elektrischen Stromes sind auch die von J. Müller angestellten Versuche und darauf gegründeten Gesetze, sowie das Ampère'sche Gesetz in Betreff der gegenseitigen

Einwirkung von Stromleitern berücksichtigt. Die fünfte Abtheilung enthält 54, die sechste 75 Aufgaben.

Der somit bezeichnete Inhalt dieser Aufgabensammlung dürfte schon zu einer näheren Einsicht derselben Veranlassung geben; ein Weiteres können wir dann den Lesern derselben überlassen, indem wir der Meinung sind, die Aufmerksamkeit auf eine würdige Erscheinung der physikalischen Literatur gelenkt zu haben. Dr. WITZSCHEL.

Lehrbuch der höheren Mechanik von L. NAVIER; deutsch bearbeitet von C. MEJER, Lehrer am Lyceum zu Hannover. Mit einer Vorrede von Professor Dr. WITTSTEIN. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung. 1858.

Das vorliegende Werk bildet ein Supplement zu den *Leçons d'Analyse* desselben Verfassers, welche von Professor Wittstein schon früher in's Deutsche übertragen worden sind, und ist daher in demselben Geiste geschrieben. Hinsichtlich des Inhalts bemerkt die Vorrede, „der Verfasser hat ein abgerundetes und nicht zu umfangreiches Ganzes geliefert, durch welches dem Lernenden ein vollständiger Begriff der theoretischen Mechanik in ihrer heutigen Gestalt sich aufschliesst". Dies möchte wohl eine kleine Uebertreibung sein; zu einem vollständigen Begriffe der analytischen Mechanik, wie ihn die im Vorworte erwähnten polytechnischen Institute geben müssen, gehört wohl ohne Zweifel noch Einiges, was im Buche nicht enthalten ist, z. B. die Anziehung der Ellipsoide und die hiermit zusammenhängende Untersuchung über die Gestalt freier rotirender Flüssigkeiten*). Gerade diese beiden ebenso wichtigen als interessanten Partien hätte der Uebersetzer leicht hinzufügen können, ohne das Buch um mehr als einen Druckbogen zu vergrössern. Ueberhaupt wären hie und da einige kleine Zusätze oder Verbesserungen am Platze gewesen (z. B. auf S. 11, wo eine sehr ungenügende Auflösung der Poisson'schen Functionalgleichung gegeben ist), der Uebersetzer scheint aber principiell sich streng an das Original gehalten zu haben, und das ist ein Grundsatz, den man freilich in vielen Fällen zugeben muss. Die Uebersetzung liest sich gut und scheint auch durchgängig correct zu sein. Aeusserlich empfiehlt sich das Buch gleichfalls durch elegante Ausstattung. SCHLÖMILCH.

*) Das Wenige, was hierüber in §. 371 beigebracht wird, ist nicht genau. Der Verfasser nimmt an, dass im Inneren der rotirenden Flüssigkeit die Anziehung proportional dem Abstande des Punktes von einem festen Centrum sei, er setzt also stillschweigend voraus, dass die rotirende Flüssigkeit die Kugelform besitze; nachher findet er ein abgeplattetes Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur, und dies ist ein offenbarer Widerspruch gegen die Voraussetzung.



Bibliographie

vom 16. October bis 10. November 1858.

Periodische Schriften.

Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Königsberg. 33. Abth. Königsberg und Leipzig, Rein'sche Buchhandlung. 2 Thlr.

Zeitschrift für Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie und verwandten Wissenschaften. Herausgegeben von C. A. F. Peters. Bd. I. Heft 1. Altona und Hamburg, Perthes, Besser & Mauke. pro 1. bis 4. Heft 1 Thlr.

Reine Mathematik.

Burg, A. v., Compendium der höheren Mathematik. 3. Auflage. Wien, Gerold's Sohn. 4 Thlr.

Moçnik, F., Lehrbuch der Algebra für Obergymnasien. 6. Aufl. Ebendas. 24 Ngr.

— Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien. 1. Abth. 9. Aufl. Ebendas. 16 Ngr.

Simerka, W., Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinanten. (Akademie.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 6 Ngr.

Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Herausgeg. v. Schnitzler. 1. Theil, Aufgaben aus der Differentialrechnung. Halle, Schmidt. $1^1/_6$ Thlr.

Hofmann, F., Grundriss der Stereometrie. Bayreuth, Grau'sche Buchhandlung. 7 Ngr.

— Die wichtigsten Sätze und Aufgaben der Trigonometrie. Ebendas. 7 Ngr.

Dilling, A., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der algebraischen Geometrie. Enthaltend Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck. Halle, Pfeffer. 1 Thlr.

ANGER, C. T., Elemente der Projectionslehre mit Anwendungen der Perspective auf Geometrie. Danzig, Kafemann. 16 Ngr.

WIEGAND, A., Lehrbuch der Mathematik. Th. I. Erster Cursus der Planimetrie. 6. Aufl. Halle, Schmidt. ⅙ Thlr.

Angewandte Mathematik.

BECKMANN, C., Graphische Resultate der Perspective für Architekten etc. Berlin, Ernst & Korn. ⅓ Thlr.

BAUR, F., Lehrbuch der niederen Geodäsie für Cameralisten etc. Wien, Braumüller. 3 Thlr.

SCHNEITLER, C. F., Die Instrumente und Werkzeuge der Messkunst. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

DUHAMEL, Lehrbuch der analytischen Mechanik; übersetzt von SCHLÖMILCH. 2. Aufl. Lief. 9 und 10. (Schluss.) Ebendas. à ⅓ Thlr.

BAURMEISTER, G. A., Theorie der Körperbewegungen in specieller Erörterung der Pendelbewegungen. Leipzig, E. H. Mayer. ⅙ Thlr.

Sammlung ausgeführter Constructionen aus dem Gebiete des Wasser-, Strassen- und Eisenbahnbaues. 2. Heft. Carlsruhe, Veith. 2 Thlr.

WIEBE, F. K. H., Skizzenbuch für den Ingenieur und Maschinenbauer. Heft 3. Berlin, Ernst & Korn. 1 Thlr.

SMITH, A., Der Bau des Weltsystemes in Bildern. Deutsch bearbeitet von MAYER-MENG. 2. Auflage. 3. Abdruck. Stuttgart, Nitzschke. 1 Thlr. 12 Ngr.

HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Leipzig, Hirzel. 2 Thlr.

BODE, J. E., Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels. 11. Aufl. Herausgeg. von Dr. BREMIKER. Berlin, Nicolai'sche Buchhandlung. compl. 2 Thlr.

KEPLERI, J., *astronomi, opera omnia, ed.* C. FRISCH, *Vol. II, pars* 1. Frankfurt a. M., Heyder & Zimmer. 2 Thlr.

HIRSCH, A., Ueber die Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Ngr.

WEISS, E., Die Bahn der Ariadne. Ebendas. 4 Ngr.

Physik.

Physikalisches Lexicon, 2. Aufl. von MARBACH und CORNELIUS. Lief. 67, 68. Leipzig, O. Wigand. à ½ Thlr.

SCHWIPPEL, K., Die Physik. Repetitorium für Schüler des Obergymnasiums. Brünn, Buschak & Irrgang. 1 Thlr. 14 Ngr.

BÖTTGER, C., Das Mittelmeer; eine Darstellung seiner physischen Geographie etc. Lief. 4 und 5. Leipzig, G. Mayer. à 12 Ngr.

HARTWIG, G., Das Leben des Meeres. 4. Auflage. Prachtausgabe. Frankfurt a. M. Meidinger & Sohn. 4 Thlr.

DELAMARCHE, Elemente der unterseeischen Telegraphie; aus dem Französischen von VICHELMANN. Berlin, Springer. 24 Ngr.

BAUMGARTNER, A. v., Ueber den Geist der Naturforschung unserer Zeit und ihre Resultate. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 4 Ngr.

HANDL, A., und A. WEISS, Untersuchungen über den Zusammenhang in den Aenderungen der Dichten und Brechungsexponenten in Gemengen von Flüssigkeiten und Verbindungen von Gasen. Ebendas. ⅛ Thlr.

PETZVAL, Ueber das neue Landschafts- als Fernrohr-Objectiv. Ebendas. 4 Ngr.

PORRO, J., *Sur le perfectionnement pratique des appareils optiques pour l'astronomie et pour la photographie. Paris, Mallet-Bachelier.* 3 *Frcs.*
